Bohumil Pardubský

Matematicko-statistické methody při kontrole hromadné výroby

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 2 (1957), No. 5, 534--544

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137191

# MATEMATICKO-STATISTICKÉ METHODY PŘI KONTROLE HROMADNÉ VÝROBY

Ing. Dr B. PARDUBSKÝ
Výzkumný ústav tepelné techniky, Praha

## 1. ÚVOD

Při každém výrobním pochodu se setkáváme se skutečností, že hodnoty jakostních charakteristik výrobků (na př. rozměr, úchylky geometrického tvaru, drsnost povrchu a pod.) vyrobené týmž technologickým postupem, týmž výrobním zařízením i týmž nástrojem, se od jednoho výrobku ke druhému mění. Je to způsobeno celou řadou vlivů, které působí na výrobní pochod a které nelze udržet konstantní. Podle charakteru výrobních vlivů rozdělujeme je na výrobní vlivy a) náhodné, b) systematické.

Náhodné výrobní vlivy jsou takové, jejichž působení se od výrobku k výrobku mění. Systematické výrobní vlivy jsou takové, jejichž působení se mění podle určitého zákona. Velký počet výrobních vlivů, jejich náhodnost a různorodost, znesnadňuje studium jednotlivých vlivů a v mnoha případech je úplně znemožňuje. Proto ke studiu vlivů je volena methoda statistická, která uvažuje všechny působící vlivy jako celek a statistická theorie výrobní chyby stává se základem jak pro statistickou regulaci výrobního pochodu tak pro statistické přejímací postupy. Z průmyslových oborů největšího rozšíření doznaly tyto statistické methody ve strojírenství, a proto se v dalším výkladu zaměříme na tento obor. V tomto článku jsou podány theoretické základy nejběžnějších statistických method regulace výroby. V dalším článku budou podány theoretické základy statistických přejímacích postupů.

## 2. ROZDĚLENÍ VÝROBNÍCH CHYB A ZÁKLADNÍ POJMY

Výrobní chybou $y$ budeme nazývat úchylku skutečného rozměru $x$ od rozměru jmenovitého $j$. Tedy výrobní chyba je dána vztahem $y = x - j$.

Podle druhu vlivu, který způsobil výrobní chybu, rozdělujeme výrobní chyby na 1. náhodné a 2. systematické.

Náhodná výrobní chyba při obrábění je výslednicí velkého množství jednotlivých dílčích náhodných výrobních chyb (tak zv. elementárních) způsobených náhodnými vlivy, jako na příklad: nestejnorodostí materiálu, chvěním stroje a nástroje, kolísáním teploty vzduchu a řezných kapalin, náhodnými změnami řezné rychlosti a posuvu, náhodnými chybami měření, atd. Všechny tyto dílčí výrobní chyby jsou většinou navzájem nezávislé. Celková výrobní chyba $y$ je dána součtem velkého počtu těchto dílčích výrobních chyb, které svými hodnotami jsou jen nepatrnou částí hodnoty celkové výrobní chyby. Tato skutečnost je současně podmínkou pro platnost Ljapunovova theoremu ([1] str. 213, [2] str. 16), podle něhož lze očekávat, že výrobní chyba způsobená náhodnými vlivy se bude řídit zákonem normálního rozdělení. Tedy, označíme-li $\eta$ náhodnou proměnnou, která nabývá hodnot náhodné výrobní chyby $y$, dostaneme pro pravděpodobnost

$$P(y < \eta \leqq y + \mathrm{d}y) = f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

kde $f(y)$ je frekvenční funkce normálního rozdělení; $\mu$ a $\sigma$ jsou parametry. Příslušná kumulativní distribuční funkce je dána vztahem

$$P(\eta \leqq y_0) = \int_{-\infty}^{y_0} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{y_0-\mu}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

a udává nám pravděpodobnost, že výrobní chyba $y$ nepřekročí hodnotu $y_0$. Integrál na pravé straně je známý integrál Laplaceův ([1] str. 373, [3] tab. VI.).

Pro úplnost výkladu definujeme ještě matematickou naději náhod. proměnné $\eta$

$$E[\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

a rozptyl

$$D^2[\eta] = E[(\eta - E[\eta])^2]. \tag{4}$$

Z definice matematické naděje snadno dokážeme platnost vztahů ( [4] str. 175 a str. 180)

$$E[a\eta + b] = aE[\eta] + b, \tag{5}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[\eta_i] \tag{6}$$

a za předpokladu, že náhodné proměnné $\eta_i$ pro $i = 1, 2 \ldots n$ jsou nezávislé

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} \eta_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[\eta_i]. \tag{7}$$

Pro rozptyly platí vztahy

$$D^2[\eta] = E[\eta^2] - E^2[\eta], \tag{8}$$

$$D^2[a\eta] = a^2 D^2[\eta], \tag{9}$$

a za předpokladu nezávislosti náhodných proměnných $\eta_i$ pro $i = 1, 2 \ldots n$

$$D^2\left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D^2[\eta_i]. \tag{10}$$

V našem případě, kdy náhodná proměnná $\eta$ má normální rozdělení s parametry $\mu, \sigma$, což budeme krátce vyznačovat $N(\mu, \sigma)$,

$$E[\eta] = \mu, \qquad D^2[\eta] = \sigma^2.$$

Parametry $\mu$ a $\sigma$ charakterisují výrobní pochod. Parametr $\mu$ udává úchylku od jmenovitého rozměru, na kterou byl stroj seřízen a parametr $\sigma$ charakterisuje přesnost výrobního zařízení. Během výrobního pochodu nepůsobí však pouze náhodné vlivy, ale i vlivy systematické. Je to především postupné opotřebovávání nástroje, jehož důsledkem je, že rozměr, na který byl stroj seřízen, se mění a tudíž se mění vzhledem k času i hodnota parametru $\mu$. V důsledku postupného otupování nástroje vzrůstají řezné síly, vzrůstá tření a tím i teplota na břitu nástroje. Tento systematický vliv se projeví ve změně hodnoty parametruga tedy přesnost výrobního zařízení se postupně zhoršuje. Úkolem regulace je upozornit na tyto změny v hodnotách parametrů $\mu$ a $\sigma$ především tehdy, když ohrožují dodržení technických předpisů kladených na výrobek.

## 3. STATISTICKÉ METHODY REGULACE VÝROBNÍCH POCHODŮ

### 3.1 Způsob provádění statistických method regulace výrobních pochodů

Způsob provádění statistické methody regulace výrobních pochodů spočívá v tom, že v určitých časových intervalech je vždy odebráno malé množství výrobků, nejčastěji 4—10 kusů, a u každého kusu je stanovena hodnota příslušné jakostní charakteristiky. Pomocí těchto hodnot vyčíslíme zvolenou výběrovou charakteristiku a její hodnotu vyznačíme v regulačním diagramu. Regulační diagram pak obsahuje dvě hodnoty, nazývané regulačními mezemi, které jsou předem vypočtené tak, že mezi těmito regulačními mezemi leží s velkou pravděpodobností $(1 - \alpha)$ (nejčastěji $[1 - \alpha] = 0{,}95$) hodnoty výběrových charakteristik za předpokladu, že během časového intervalu hodnoty parametrů $\mu$ a $\sigma$, rozdělení výrobní chyby regulované jakostní charakteristiky, nedoznaly změn. Poloha a vzdálenost regulačních mezí závisí jednak na hodnotách parametrů $\mu$ a $\sigma$, jednak na zvolené výběrové charakteristice a zvolené pravděpodobnosti $\alpha$. Jestliže hodnota výběrové charakteristiky leží mezi regulačními mezemi, není nutné zasahovat do výrobního pochodu. V opačném případě výrobní pochod vyžaduje seřízení. Původní methoda statistické regulace byla prováděna pomocí výběrového průměru $\bar{y}$ a výběrové směrodatné odchylky $s$, avšak neosvědčila se v praxi v důsledku zdlouhavého a poměrně nesnadného výpočtu zejména charakteristiky $s$.

Byla proto snaha nahradit tyto výběrové charakteristiky jednoduššími, které se dají snadno vyčíslit a vzniklo tak několik druhů regulačních method.

### 3.2 Methoda regulace pomocí charakteristik $(\bar{y}, R)$

Při této methodě se regulace provádí pomocí výběrových průměrů $\bar{y}$ a výběrových rozpětí $R$. Číselná hodnota výběrového rozpětí je dána rozdílem mezi největší a nejmenší naměřenou hodnotou ve výběru rozsahu $n$ (zřejmě $n \geqslant 2$). Abychom mohli stanovit regulační meze charakteristiky $R$, je nutno stanovit především její rozdělení.

Uvažujme $n$ nezávislých pozorování náhodné proměnné $\eta$, která nabývá hodnot $y$ v intervalu $\langle a; b\rangle$. Potom pravděpodobnost, že mezi $n$ výsledky pozorování bude jedna hodnota ležet v intervalu $\langle y; y + \mathrm{d}y\rangle$, jedna v intervalu $\langle y + R_n; y + R_n + \mathrm{d}R_n\rangle$ a $(n - 2)$ hodnoty budou ležet v intervalu $\langle y; y + R_n\rangle$, je rovna

$$n(n-1) f(y)\, \mathrm{d}y\, f(y + R_n)\, \mathrm{d}R_n\, [F(y + R_n) - F(y)]^{n-2}, \qquad (11)$$

kde

$$f(y)\, \mathrm{d}y = \text{pravděpodobnost}\ P(y < \eta \leqslant y + \mathrm{d}y)$$

a

$$F(y) = \text{pravděpodobnost}\ P(\eta \leqslant y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Uvažujme náhodnou proměnnou $\varrho_n$, která nabývá hodnot $R_n = y_{\max} - y_{\min}$ a nazývá se rozpětí. Potom této náhodné proměnné přísluší vzhledem k (11) frekvenční funkce

$$\varphi(R_n) = n(n-1) \int_{a}^{b-R_n} f(y) f(y + R_n) [F(y + R_n) - F(y)]^{n-2}\, \mathrm{d}y.$$

V případě, že náhodné pronénné $\eta$ přísluší rozdělení $N(0,1)$, potom rozdělení rozpětí $R_n$ je dáno vztahem

$$\varphi(R_n) = n(n-1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+R_n)^2}{2}} \left[\int\limits_{y}^{y+R_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t\right]^{n-2} \mathrm{d}y.$$

$$\text{pro } 0 \leqslant R_n < \infty$$

a matematická naděje vztahem

$$E[\varrho_n] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_n\, \varphi(R_n)\, \mathrm{d}R_n = \mathrm{d}_n. \tag{12}$$

(Hodnoty koeficientu $d_n$ pro $n = 2$ až 20 jsou uvedeny v tab. VIII [7]). Uvažujeme-li náhodnou proměnnou $\eta'$, která nabývá hodnot $y'$ a přísluší jí normálního rozdělení $N(\mu, \sigma)$, potom náhodná proměnná $\eta = \dfrac{\eta' - \mu}{\sigma}$ má normální rozdělení $N(0,1)$ a

$$R_n = y_{\max} - y_{\min} = \frac{y'_{\max} - \mu}{\sigma} - \frac{y'_{\min} - \mu}{\sigma} = \frac{y'_{\max} - y'_{\min}}{\sigma} = \frac{R'_n}{\sigma}, \tag{13}$$

kde $R'_n$ je rozpětí v náhodném výběru $n$ hodnot ze základního souboru $N(\mu, \sigma)$.

Vzhledem ke vztahu (13) a uvažujeme-li náhodnou proměnnou $\varrho'_n$, která nabývá hodnot $R'_n$, dostaneme vztah pro matematickou naději

$$E[\varrho_n] = E\left[\frac{\varrho'_n}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} E[\varrho'_n]. \tag{14}$$

Odhadneme-li matematickou naději $E[\varrho'_n]$ průměrným rozpětím $\bar{R}'_n$ ve výběrech o rozsahu $n$ z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma)$, potom odhad parametru $\sigma$ je vzhledem ke vztahu (12) a (14) dán vztahem

$$\sigma \approx \bar{R}'_n \frac{1}{d_n}, \tag{15}$$

kde $\bar{R}'_n = \dfrac{1}{k} \sum\limits_{i=1}^{k} R'_{n,i}$, $k$ je počet výběrů a $R_{n,i}$ je rozpětí v $i$-tém výběru rozsahu $n$.

Dále je nutno pro náhodnou proměnnou $\varrho_n$ určit $\alpha$-fraktily $R_{\alpha,n}$, které pro dané $\alpha$ a $n$ jsou definovány vztahem

$$P(\varrho_n \leqslant R_{\alpha,n}) = \int\limits_{0}^{R_{\alpha,n}} \varphi(R_n)\, \mathrm{d}R_n = 1 - \alpha. \tag{16}$$

Uvažujeme-li náhodnou proměnnou $\varrho'_n$, která nabývá hodnot rozpětí $R'_n$ v náhodném výběru rozsahu $n$, vzatého ze základního souboru $N(\mu,\sigma)$, potom příslušný $\alpha$-fraktil $R'_{n,\alpha}$ je dán vzhledem k (13) vztahem

$$P(\varrho'_n \leqslant R'_{\alpha,n}) = P(\varrho'_n \leqslant \sigma R_{\alpha,n}) = 1 - \alpha. \tag{17}$$

Odhadneme-li parametr $\sigma$ pomocí vztahu (15), potom odhad $\alpha$—fraktilu je

$$R'_{\alpha,n} \approx \bar{R}'_n \cdot \frac{R_{\alpha,n}}{d_n}. \tag{18}$$

(Hodnoty $R_{\alpha,n}$ pro různá $\alpha$ a pro $n = 2$ až 20 jsou uvedeny v tab. VIII [7].)

Nyní přistoupíme k stanovení regulačních mezí pro výběrové průměry a rozpětí.

Uvažujeme-li základní soubor, který má normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$, potom rozdělení výběrových průměrů rozsahu $n$ je zase normální s parametry $\mu$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ([5] str. 64). Potom tedy s pravděpodobností $(1 - \alpha)$ výběrové průměry $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ budou ležet uvnitř intervalu $\langle \mu - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rangle$, kde

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt. \tag{19}$$

Regulační meze pro výběrové průměry $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ a pro danou pravděpodobnost $\alpha$ jsou určeny krajními hodnotami intervalu

$$\langle \mu - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sigma; \mu + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sigma \rangle, \tag{20}$$

když parametry $\mu$ a $\sigma$ nahradíme příslušnými odhady.

Parametr $\mu$ odhadneme na podkladě většího počtu měření jako průměrnou hodnotu výběrových průměrů. Tedy

$$\mu \approx \bar{\bar{y}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i, \tag{21}$$

kde $k$ je počet výběrů (doporučuje se $k = 25$).

$\bar{y}_i$ je výběrový průměr v $i$-tém výběru rozsahu $n$.

Parametr $\sigma$ odhadneme pomocí vztahu (15).

Při praktickém provádění statistické regulace se výpočet regulačních mezí pro výběrové průměry provádí pomocí vzorců

$$\bar{y}_h = \bar{\bar{y}} + A_2 \bar{R}'_n \qquad \bar{y}_d = \bar{\bar{y}} - A_2 \bar{R}'_n, \tag{22}$$

kde $\bar{y}_n$ resp. $\bar{y}_h$ je horní resp. dolní regulační mez pro výběrové průměry a $A_2 = \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}\, d_n}$.

Hodnoty konstanty $A_2$ pro 100 $\alpha$ % = 1 %, 0,5 % a 0,27 % a pro $n = 4$ až 10 jsou tabelovány ( [7] str. 30). Regulační meze pro výběrová rozpětí rozsahu $n$ jsou přímo určeny vztahem (18). Pro praktické účely je výpočet usnadněn tím, že pro $100\,\alpha\,\% = 1\,\%$, $0{,}5\,\%$, $0{,}27\,\%$ a pro $n = 4$ až 10 jsou tabelovány hodnoty koeficientu

$$D_4 = \frac{R_{\alpha,\,n}}{d_n}, \tag{23}$$

([7] str. 30) a výpočet regulační meze se provede dosazením příslušných hodnot do výrazu

$$R'_h = \overline{R}'_n \cdot D_4; \tag{24}$$

kde $R'_h$ je horní regulační mez pro výběrová rozpětí,

$$\overline{R}'_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} R'_{i,\,n} \quad (R'_{i,\,n} \text{ je rozpětí výrobní chyby v } i\text{-tém výběru rozsahu } n).$$

Jestliže do regulačního diagramu zanášíme přímo naměřené hodnoty jakostní charakteristiky vázané s výrobní chybou $y$ lineárním vztahem $y = x - j$, zůstává výpočet regulační meze $R'_h$ nezměněn a pro výběrové průměry nutno k regulačním mezím $\bar{y}_n$ a $\bar{y}_d$ přičíst jmenovitý rozměr $j$. Výrobní pochod regulujeme tím způsobem, že v pravidelných časových intervalech se odebere od stroje předem určený počet výrobků $n$ a u každého výrobku určíme hodnotu výrobní chyby jakostní charakteristiky resp. její skutečnou hodnotu. Jestliže jak aritmetický průměr, tak i rozpětí naměřených hodnot leží uvnitř příslušných regulačních mezí, nevyžaduje výrobní pochod úprav. V opačném případě ať již výběrové rozpětí nebo průměr leží svou hodnotou mimo regulační meze, je nutno stroj znovu seřídit. Pravděpodobnost případu, kdy bude požadováno znovu seřízení stroje a není ho ve skutečnosti potřebí, je rovna $\alpha$. Při krátkých výrobních seriích nelze stanovit odhady parametrů $\mu$ a $\sigma$. Aby bylo možno stanovit regulační meze i v tomto případě, provádí se výpočet pomocí konstrukčních mezních rozměrů předepsaných pro sledovaný rozměr. Za předpokladu, že rozdělení výrobní chyby je normální a seřizování stroje je prováděno na střed tolerančního pole, požadujeme, aby procento výrobků, které mají sledovaný rozměr mimo předepsanou toleranci $T$ nebylo větší, než předem zvolené procento $100\,\beta\,\%$. Potom zřejmě musí platit

$$2\, t_{\frac{\beta}{2}}\, \sigma \leqq T, \tag{25}$$

kde $t_{\frac{\beta}{2}}$ je dáno vztahem (19).

Jelikož předpokládáme, že seřizování stroje je prováděno na střed tolerančního pole, je úchylka středu tolerančního pole totožná s hodnotou parametru $\mu$. Potom vzhledem ke vztahu (20), ve kterém parametr $\sigma$ nahradíme rovností ze vztahu (25), bude horní resp. dolní regulační mez pro výběrové průměry ležet ve vzdálenosti

$$\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}\, T}{2\, t_{\frac{\beta}{2}} \sqrt{n}}, \tag{26}$$

od středu tolerančního pole na obě strany.

Pro praktické účely je výhodnější udávat vzdálenost regulačních mezí $\bar{x}_h$ resp. $\bar{x}_d$ od mezních rozměrů, která je vzhledem ke vztahu (26) dána výrazem

$$\frac{1}{2} T - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}}{2\, t_{\frac{\beta}{2}} \sqrt{n}}\, T = lT, \tag{27}$$

kde veličina $l = \frac{1}{2} - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}}{t_{\frac{\beta}{2}}\, 2 \sqrt{n}}$ je pro $100\,\alpha\,\% \text{ a } 100\,\beta\,\% = 1\,\%, 0{,}5\,\%, 0{,}27\,\%$ a pro $n = 4$ až 10 tabelována ( [7] str. 32).

Obdobně, nahradíme-li ve vztahu (17) parametr $\sigma$ rovností ze vztahu (25), dostaneme regulační mez pro výběrové rozpětí a

$$R'_h = \frac{R_{\alpha, n}}{2\, t_{\frac{\beta}{2}}}\, T. \tag{28}$$

Veličina $\frac{R_{\alpha, n}}{t_{\frac{\beta}{2}}}$ pro $100\,\alpha\,\% = 1\,\%, 0{,}5\,\%, 0{,}25\,\%, 0{,}135\,\%, 0{,}1\,\%$, $100\,\beta\,\% = 2\,\%, 1\,\%, 0{,}5\,\%, 0{,}27\,\%, 0{,}2\,\%$ a pro $n = 4$ až 10 je tabelována a označena $D_3$ ( [9] str. 53, český překlad).

Regulace výrobního pochodu se provádí stejným způsobem jak bylo výše uvedeno.

Přes jednoduchost výpočtu výběrových průměrů i rozpětí nedoznala methoda regulace prováděná pomocí těchto charakteristik širšího uplatnění. Příčinou je jednak nutnost vedení dvou samostatných diagramů pro každou výběrovou charakteristiku, jednak obtížnost výpočtu průměru přímo u stroje pracovníkem provádějícím kontrolu rozměru. Byla proto hledána taková charakteristika, která by vyžadovala vedení pouze jednoho diagramu a stanovení výběrové charakteristiky naprosto jednoduché. Těmto požadavkům plně vyhovuje charakteristika tvořená extrémními hodnotami.

### 3.3 Methoda regulace pomocí extrémních hodnot

Nejprve stanovme rozdělení maximálních hodnot ve výběru rozsahu $n$. Uvažujme $n$ nezávislých pozorování náhodné proměnné $\eta$, která nabývá hodnot $y$ v intervalu $\langle a; b\rangle$. Potom pravděpodobnost, že mezi $n$ výsledky pozorování maximální hodnota bude ležet v intervalu $\langle y, y + \mathrm{d}y\rangle$, je rovna

$$n\, P(y < \eta \leqslant y + \mathrm{d}y)\, [P(\eta \leqslant y)]^{n-1}. \tag{29}$$

Označíme-li $v_n$ náhodnou proměnnou, která nabývá maximálních hodnot $v_n$ v náhodných výběrech rozsahu $n$, potom vzhledem k (29) frekvenční funkce maximálních hodnot má tvar

$$\varphi(v_n) = n f(v_n) \left[ \int_a^{v_n} f(t)\, \mathrm{d}t \right]^{n-1}, \tag{30}$$

kde

$$f(v_n)\, \mathrm{d}v_n = P(v_n < \eta \leqslant v_n + \mathrm{d}v_n)$$

a

$$\int_a^{v_n} f(t)\,\mathrm{d}t = P(\eta \leqslant v_n).$$

Předpokládáme-li, že náhodné proměnné $\eta$ přísluší normální rozdělení $N(0,1)$, potom vzhledem k (1) a (2) frekvenční funkce maximálních hodnot má tvar

$$\varphi(v_n) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{v_n^2}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v_n} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right]^{n-1} \tag{31}$$

a matematická naděje

$$E[\nu_n)] = n \int_{-\infty}^{\infty} v_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{v_n^2}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v_n} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right]^{n-1} \mathrm{d}v_n. \tag{32}$$

Integrací per-partes dostaneme

$$E[\nu_n] = \frac{n(n-1)}{\sqrt{2\pi}}\, I_{n-2}, \tag{33}$$

kde

$$I_{n-2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,[F(t)]^n\,\mathrm{d}t \quad \text{a} \quad F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Hodnoty $I_n$ byly napočteny pro $n = 2, 3 \dots 11$ a jsou tabelovány ( [8] str. 315). Snadno lze si ověřit platnost vztahu

$$E[\nu_n'] = \sigma E[\nu_n] + \mu, \tag{34}$$

kde $\nu_n'$ je náhodná proměnná, která nabývá maximálních hodnot v náhodných výběrech rozsahu $n$ vzatých ze základního souboru $N(\mu, \sigma)$. Obdobným postupem stanovíme matematickou naději pro minimální hodnoty ve výběrech rozsahu $n$ a dostaneme

$$E[\zeta_n'] = -\sigma E[\nu_n] + \mu, \tag{35}$$

kde $\zeta_n'$ je náhodná proměnná, která nabývá minimálních hodnot ve výběrech rozsahu $n$ vzatých ze základního souboru $N(\mu, \sigma)$.

Označíme-li regulační mez pro maximální resp. minimální hodnoty $V_h$ resp. $M_d$, potom tyto regulační meze jsou dány řešením rovnice

$$P(\zeta_n' \leqslant M_d;\ \nu_n' > V_h) + P(\zeta_n' \leqslant M_d;\ \nu_n' \leqslant V_h) + \\ + P(\zeta_n' > M_d;\ \nu_n' > V_h) = \alpha, \tag{36}$$

kde $\alpha$ je předem zvolená pravděpodobnost mylného zastavení výrobního pochodu; volí se nejčastěji $\alpha = 0{,}05$ nebo $\alpha = 0{,}0027$. Jelikož v rovnici (36) jsou dvě neznámé $V_h$ a $M_d$, volíme podmínku, aby obě regulační meze ležely symetricky kolem hodnoty parametru $\mu$. Potom tedy

$$V_h - \mu = \mu - M_d. \tag{37}$$

Přímé řešení rovnice (36) je značně obtížné a proto stanovme ještě pravděpodobnost, že v náhodném výběru rozsahu $n$ vzatého ze základního souboru $N(\mu, \sigma)$ bude maximální i minimální hodnota ležet uvnitř regulačních mezí. Tato pravděpodobnost je rovna

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{M_d}^{V_n} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y\right]^n \tag{38}$$

a vzhledem ke vztahu (36) lze psát

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{M_d}^{V_h} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y\right]^n = 1 - \alpha. \tag{39}$$

Jednoduchou úpravou vztahu na levé straně rovnice (39) a se zřetelem ke vztahu (37) dostaneme

$$\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{U_n} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t\right]^n = 1 - \alpha, \tag{40}$$

kde $U_n = \dfrac{V_h - \mu}{\sigma}$. Rovnici (40) řešíme vzhledem k neznámé $U_n$. Ve vztahu

$$\frac{V_h - \mu}{\sigma} = U_n, \tag{41}$$

parametr $\mu$ vyjádříme pomocí (34) a parametr $\sigma$ odhadneme pomocí vztahu (15) a dostaneme

$$V_h = E[\nu'_n] + \frac{U_n - E[\nu_n]}{d_n}\,\overline{R}. \tag{42}$$

Matematickou naději $E[\nu'_n]$ odhadneme jako aritmetický průměr maximálních hodnot v náhodných výběrech rozsahu $n$. Pro praktické účely je regulační mez pro maximální hodnoty dána vztahem

$$V_h = \overline{V} + D_5 \overline{R}, \tag{43}$$

kde $\overline{V}$ je průměrná maximální hodnota ve výběrech rozsahu $n$, $D_5 = \dfrac{U_n - E[\nu_n]}{d_n}$, $\overline{R}$ je průměrné rozpětí ve výběrech rozsahu $n$.

Hodnoty koeficientu $D_5$ pro $n = 2, 3 \ldots 10$ a $\alpha = 0{,}05$ jsou uvedeny v *tab. 1*. Obdobně vzhledem ke vztahům (37) a (41) dostaneme

$$\frac{\mu - M_d}{\sigma} = U_n. \tag{44}$$

Odhadneme-li parametr $\mu$ pomocí vztahu (35) a parametr $\sigma$ pomocí vztahu (15), dostaneme výraz pro regulační mez pro minimální hodnoty

$$M_d = E[\zeta'_n] - \frac{U_n - E[\nu_n]}{d_n}\,\overline{R}. \tag{45}$$

Matematickou naději $E[\zeta'_n]$ odhadneme jako aritmetický průměr minimálních hodnot ve výběrech rozsahu $n$. Pro praktické účely je regulační mez pro minimální hodnoty dána vztahem

$$M_d = \overline{M} - D_5 \overline{R}, \tag{46}$$

kde $\overline{M}$ je průměrná minimální hodnota ve výběrech rozsahu $n$, $\overline{R} = \overline{V} - \overline{M}$. Regulaci výrobního pochodu provádíme tak, že v pravidelných časových intervalech stanovíme hodnoty jakostní charakteristiky vždy u $n$ náhodně vybraných výrobků a výrobní pochod hodnotíme podle minimální a maximální zjištěné hodnoty. Jestliže tyto extrémní hodnoty leží uvnitř regulačních mezí, výrobní pochod nevyžaduje žádného zásahu. Jestliže alespoň jedna z těchto extrémních hodnot překročí regulační mez, je nutno výrobní pochod zastavit a příčiny, které způsobily tento stav, odstranit. Pravděpodobnost mylného zastavení výrobního pochodu je rovna $\alpha$.

Stejně jako u předcházející methody regulace tak i u této lze stanovit regulační meze pomocí konstrukčních mezních rozměrů. Předpokládáme, že rozdělení výrobní chyby resp. sledovaného rozměru je normální, seřizování stroje je prováděno na střed tolerančního pole a procento výrobků, které mají sledovaný rozměr mimo předepsanou toleranci $T$ nepřekročí hodnotu $100\,\beta\,\%$.

Zřejmě platí vztah (25). Nahradíme-li ve vztahu (41) parametr $\sigma$ vztahem (25) dostaneme

$$V_h = \mu + \frac{U_n}{2\,t_{\frac{\beta}{2}}}\,T. \tag{47}$$

Jelikož předpokládáme, že seřizování se provádí na střed tolerančního pole, tedy $\mu = \frac{T_h + T_d}{2}$, kde $T_h$ resp. $T_d$ je horní resp. dolní mezní rozměr. Potom regulační mez pro maximální hodnoty je

$$V_h = \frac{T_h + T_d}{2} + D_6\,T \tag{48}$$

a zcela obdobně regulační mez pro minimální hodnoty je

$$M_d = \frac{T_h + T_d}{2} - D_6\,T, \tag{49}$$

kde koeficient $D_6 = \frac{U_n}{2\,t_{\frac{\beta}{2}}}$ pro $n = 2, 3 \ldots 10$, $\alpha = 0{,}05$ a $100\,\beta\,\% = 2\,\%$, $1\,\%$, $0{,}5\,\%$, $0{,}27\,\%$ je uveden v *tab. 2.*

Regulace výrobního pochodu se provádí stejným způsobem jak bylo výše uvedeno.

*Tabulka 1.*

Koeficienty $D_5$

| Rozsah výběru | $D_5$ |
|---|---|
| 2 | 1,48 |
| 3 | 0,91 |
| 4 | 0,71 |
| 5 | 0,60 |
| 6 | 0,54 |
| 7 | 0,49 |
| 8 | 0,46 |
| 9 | 0,43 |
| 10 | 0,41 |

*Tabulka 2.*

Koeficienty $D_6$

| Rozsah výběru $n$ | Přípustné průměrné procento zmetků za mezními rozměry | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 % | 1 % | 0,5 % | 0,27 % |
| 2 | 0,48 | 0,43 | 0,40 | 0,37 |
| 3 | 51 | 46 | 43 | 40 |
| 4 | 54 | 48 | 44 | 42 |
| 5 | 55 | 50 | 46 | 43 |
| 6 | 57 | 51 | 47 | 44 |
| 7 | 58 | 52 | 48 | 45 |
| 8 | 59 | 53 | 49 | 45 |
| 9 | 59 | 54 | 49 | 46 |
| 10 | 60 | 54 | 50 | 47 |

*(Dokončení)*

# ALGORITMY A POČÍTACÍ STROJE*)

*(Dokončení)*

§ 5.

Turingův stroj má ve srovnání s elektronickými počítacími stroji jisté odchylné vlastnosti, protože byl navržen ještě před vznikem prvních elektronických počítacích strojů. Jsou to tyto odchylky:

I. V Turingově stroji je provedeno rozčlenění celého procesu na nejjednodušší elementární operace, namnoze ještě jednodušší než v elektronických samočinných počítačích.

II. Paměť Turingova stroje má tvar nekonečné pásky rozdělené na buňky (žádný skutečný stroj ovšem nemůže mít nekonečnou paměť, takže zde jde o idealisaci).

Uveďme si nyní podrobný popis Turingova stroje:

1. Turingův stroj disponuje konečným počtem symbolů $S_1, S_2, \ldots, S_k$, které představují tak zvanou základní abecedu stroje. V této abecedě se kodují jak údaje do stroje vkládané, tak dílčí údaje, které se v něm postupně vytvářejí. Dohodneme se na tom, že mezi symboly základní abecedy budeme počítat i „prázdný" znak (třeba $S_1$), který má ten význam, že po vyslání do některé buňky paměti vymazává její obsah, takže pak buňka je prázdná. Říkáme o ní též, že uchovává prázdný znak. V libovolné fázi práce stroje může být v každé buňce paměti nejvýš jeden znak. Na začátku práce stroje se do pásky paměti uloží počáteční údaje (počáteční informace) zakodované určitým systémem znaků základní abecedy. Stroj pracuje v taktech jdoucích po sobě, během nichž se počáteční informace postupně přetváří v dílčí výsledné informace. Podle druhu počáteční informace $A$ mohou nastat tyto dva případy:

a) Po proběhnutí konečného počtu taktů se stroj zastaví a vyšle signál o svém zastavení. Na pásce se při tom objeví obraz určité informace $L$. V tom případě říkáme,

*) Referát z článku B. A. Trachtěnbrot, *Algoritmy i mašinnoje rešenije zadač*, Mat. v škole, 1956, č. 4 a 5.