Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Kurt-R. Biermann

Z vývoje theorie pravděpodobnosti: Z dějin počtu pravděpodobnosti

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 1, 31--35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137165

Z VÝVOJE THEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Předkládáme čtenářům dvě pojednání: K. R. Biedermann, »Z dějin počtu pravděpodobnosti« a H. Steinhaus, »O některých zásadních otázkách matematické statistiky«, velmi instruktivní nejen po stránce věcné, ale i s hlediska historického. Tyto články totiž neobyčejně výstižně zachycují pronikavý rozdíl mezi problematikou, která byla v popředí zájmu vynikajících matematiků, kteří stáli u kolébky počtu pravděpodobnosti, a problematikou theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, jíž se zabývají matematikové dnes. *Redakce*

KURT R. BIERMANN

Z DĚJIN POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI[1])

Listujeme-li v dějinách počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky, nalézáme jména mnoha vynikajících matematiků: Pascal, Fermat, Huygens, Jakob Bernoulli, Moivre, Bayes, Euler, Daniel Bernoulli, Laplace, Gauss, Poisson, Čebyšev[2]) — výčet by byl příliš dlouhý, kdybychom chtěli vyjmenovat všechny, kdož obohatili theorii počtu pravděpodobnosti až do současné doby. Všem vděčí tato theorie za to, že se dnes stala nepostradatelnou pro správné pochopení kosmických a atomových jevů, biologických a lékařských otázek, průmyslových a jiných praktických problémů.

Všichni jmenovitě uvedení vědci byli ještě matematickými universalisty. Jen o Bayesovi nevíme v tomto směru nic bližšího. Jejich činnost se neomezovala totiž jen na jeden obor, obohacovali matematickou vědu v různých oblastech, mezi jinými též na poli počtu pravděpodobnosti.

V roce 1956 jsme vzpomněli tří výročí, která jsou věnována J. Bernoullimu a C. F. Gaussovi. 300 let uplynulo od narození a 250 let od smrti Jakoba Bernoulliho, 100 let od Gaussovy smrti. Tito dva velcí matematikové obohatili a rozvinuli zvlášť velkou měrou počet pravděpodobnosti.

Tato úvaha nemá být v žádném případě náčrtem dějin počtu pravděpodobnosti. Má spíše vyzdvihnout otázku, jakými problémy se zabývali první theoretikové počtu pravděpodobnosti, na jejichž podkladě potom formulovali základy klasické theorie[3],) neboť *„již od pradávna byl veliký půvab historických studií v tom, zjišťovat, že jednotlivé příklady byly vyšetřovány dříve, než vznikla ucelená theorie, největším půvabem však bylo sledovat, jak postupně vznikaly elementy našeho dnešního světového názoru.“*[4])

V dřívějších dobách měly hry veliký význam jako prostředek k ukrácení času a ukojení sázkové vášně. Možnost získat bez námahy ve hře jmění — na možnost prohry se nemyslelo, tak jako je vcelku zvykem dodnes — sváděla poddaného i rytíře, obchodníka i konšela, mistra cechu i příslušníka dvoru, aby sáhli po kartách nebo kostkách. Není proto divu,

[1]) Kurt R. Biermann, *Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Wissenschaftliche Annalen, roč. 5, č. 6, 1956.

[2]) Blaise Pascal, 1623—1662; Pierre de Fermat, 1601—1665; Christian Huygens, 1629—1695; Jakob Bernoulli, 27. XII. 1654, na jiném místě 6. I. 1655—1705; Abraham de Moivre, 1667—1754; Thomas Bayes, 1763; Leonard Euler, 1707—1783; Daniel Bernoulli 1700—1782; Pierre Simon Marquis de Laplace, 1749—1827; Carl Friederich Gauss, 1777—1855; Siméon Denis Poisson, 1781—1840; Pafnutij Lvovič Čebyšev, 1821—1894, všichni členové Pruské akademie věd, ze které vznikla Německá akademie věd v Berlíně.

[3]) „Klasická theorie“, na rozdíl od theorie četností a názoru, že pravděpodobnost výskytu je speciální míra množiny (moskevská škola a j.).

[4]) F. v. Krbek, *Eingefangenes Unendlich*, Lipsko 1954, p. III.

že se počtáři a později matematikové zabývali zkoumáním vyhlídek na výhru a vytvořili tak základy počtu pravděpodobnosti.

Podobný zjev bylo možno na př. pozorovat v 18. stol., kdy se zúčastnilo theoretického zkoumání „lotinky", která vznikla r. 1620 v Janově při příležitosti každoroční volby 5 placených úředníků ze 100 senátorů, mnoho vynikajících matematiků, kteří rozvinuli theorii počtu pravděpodobnosti. Jedním z nich byl na př. též L. Euler, největší matematik 18. stol.

Již v komentáři k Dantově Divina Commedia, vydaném v Benátkách 1477, je zmínka o různých způsobech, jak hodit třemi kostkami určitý počet ok.[5]) Praví se tam, že pro 18 ok existuje jen jedna možnost, t. j. hodit každou z těchto tří kostek 6, což je bezesporu správné.

Tvrdí-li se tam však, že 17 ok lze též hodit jen jedním způsobem, ukazuje se, že autor tuto otázku ještě dostatečně nepromyslil. Míní, že 17 ok lze získat pouze tím způsobem, že dvěma kostkami hodí vždy po 6 a třetí 5 ok. Je pro něho tedy pravděpodobnost, že vrhne 18 nebo 17 ok stejně velká. Ve skutečnosti však je pravděpodobnost hodit 17 ok třikrát tak velká jako pravděpodobnost, že hodíme 18 ok.[6])

Roku 1494 byla vydána opět v Benátkách *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, sepsaná 1487 v Perugii františkánem a profesorem matematiky Lucou Paciolim (1445—1514) — jeho největší dílo. V uvedené „Summa", jak je dílo krátce nazýváno, se objevuje mezi „zvláštními úlohami" problém, který nás bude především zajímat. To proto, že jej řešili ti, kteří později položili vědecké základy počtu pravděpodobnosti.

Úloha, která vzbuzuje po staletí zájem, není ojedinělým případem. Uveďme zde lineární rovnice, které se ve formě složitých úloh „Diophantových" (kolem r. 250 n. l.) uvádějí již od dob indoevropské, arabské, byzantské a středověké matematiky až po novodobé učebnice, v nichž nakonec slouží již jen pedagogickým účelům.[7])

Otázka, jejíž řešení chceme sledovat, je tato:

Hra je vyhrána tehdy, když jeden z t hráčů vyhraje jako prvý v s jednotlivých partiích. Jak je třeba rozdělit vklad mezi hráče, přeruší-li se hra po r jednotlivých partiích? $1 \leq r \leq t(s-1)$.

Pacioli řeší tuto úlohu pro 2 a 3 hráče; dochází k (chybnému) řešení, že vklad je třeba rozdělit v poměru počtu jednotlivých vyhraných partií. Jsou-li tedy na př. zúčastněni dva hráči A a B a hráč A vyhrál p a B q partií k okamžiku přerušení hry, je třeba rozdělit vklad v poměru $p : q$.

Po druhé se objevuje tato otázka zhruba o 50 let později v práci Geronima Cardana (1501—1576) *Practica arithmetica generalis* (Milán 1539). Cardano bere v úvahu počet partií s, potřebných k výhře a dělí vklad mezi hráče A a B v poměru

$$\left[1 + 2 + \ldots + (s - q)\right] : \left[1 + 2 + \ldots + (s - p)\right].$$

Tento nesprávný výsledek ukazuje, že matematické myšlení nemělo ještě potřebných předpokladů pro správné řešení problému. Není proto udivující, že ani výborný Niccolo Tartaglia (1500—1557), který se též zabýval tímto problémem, nenašel správné řešení.

Než uvedeme Tartagliův pokus, uveďme ještě dva jiné příspěvky Cardanovy z počtu

[5]) G. Libri, *Historie des sciences mathématiques* en Italie, Paříž 1838—1841, II, p. 188.

[6]) 17 můžeme hodit buď „pětkou" na první kostce a „šestkami" na druhé a třetí kostce, nebo „pětkou" na druhé kostce a „šestkami" na první a třetí kostce, nebo konečně „pětkou" na třetí kostce a „šestkami" na první a druhé kostce.

[7]) Kurt Vogel, *Griech. Algebra in Rechenbüchern des Mittelalters*, Mathem-physikal. Semesterberichte IV. 1/2, Göttingen 1954, p. 122 ad.

pravděpodobnosti. Z jedné formulace v práci *De ludo aleae* je vidět, že Cardano v jistém smyslu tušil zákon velkých čísel. Tento zákon (že při rostoucím počtu pokusů se s rostoucí pravděpodobností blíží počet případů skutečných stále více a více součinu z počtu pokusů a pravděpodobnosti výskytu)[8]) je zejména spjat se jmény J. Bernoulliho, Bayese a Poissona. Cardano pravděpodobně narazil při praktických pokusech s kostkami, které sloužily empirickému zjišťování variací, na souvislost mezi pravděpodobností a relativní četností, aniž by ji uměl přesně formulovat a dokázat.

Konečně budiž ještě stručně uveden problém z Cardanovy práce *Practica arithmeticae generalis*. Představuje totiž první znění otázky, která později, označena jako „Petrohradský problém"[9]) měla sehrát velikou úlohu v počtu pravděpodobnosti. Dnes má theorie, zabývající se těmito otázkami, t. zv. „theorie morální naděje", která je spjata zejména se jménem D. Bernoulliho, již jen převážně historickou cenu.

Vraťme se zpět k Tartagliovi. Jeho spor s Cardanem a jeho žákem L. Ferrarim (1522—1565) o prvenství řešení kubické rovnice vešel do dějin matematiky. Spor mezi těmito počtáři nepostrádá ani tragické, ani komické stránky.

U Tartaglia se opět objevuje naše úloha dělení vkladu, a to v práci *General trattato di numeri et misure* (Benátky 1556—1560), v díle, které podle úsudku t. č. nejlepšího znalce dějin matematiky v Německu[10]) Jos. E. Hoffmanna (Ichenhausen), „*předkládá velmi obratným způsobem veškerou průměrnou znalost tehdejší doby z oboru aritmetiky a geometrie*". Trataglia pochybuje o možnosti přesného řešení vůbec a je toho mínění (mylného), že nejspíše spravedlivý je dělící poměr $(s + p - q) : (s + q - p)$.

Srovnáme-li dosud udaná řešení číselně, vidíme toto:

Budiž: $s = 5, t = 2, r = 4, p = 3$ a $q = 1$.

Pak správný dělící poměr vkladu mezi hráče A a B při přerušení hry za stavu $r = = p + q$ je podle názoru

Pacioliho 3 : 1, t. zn., že hráč A má nárok na $^3/_4$ a hráč B na $^1/_4$ vkladu,
podle Cardana 10 : 3, t. zn., že hráč A má nárok na $^{10}/_{13}$ a hráč B na $^3/_{13}$ vkladu,
podle Tartagliy 7 : 3, t. zn., že hráč A má nárok na $^7/_{10}$ a hráč B na $^3/_{10}$ vkladu.

Uplynulo sto let, než bylo nalezeno správné řešení a to skoro současně třemi matematiky: Pascalem, Fermatem a Huygensem. Je to názorný příklad toho, že pokrok v poznání je závislý na stavu znalostí té které doby. Laplace píše plným právem, že vedou k Pascalovi a Fermatovi „*počátky vědy o počtu pravděpodobnosti, který patří k největším objevům 17. století, a jehož objevení možno srovnat s pozoruhodnými věcmi, které zcnádhernily 17. století a které lidskému duchu dělá největší čest*".[11]) Ve století, které přineslo nejdůležitější matematické objevy,[12]) bylo řešení dělicího poměru (*calcul des partis*), jen jedním objevem mezi mnohými.

Ukažme ještě Fermatovo řešení výše uvedeného příkladu: hráči A chybí ještě 2,

[8]) Tato formulace (G. Joss-Th. Kaluza, *Höhere Mathematik für den Praktiker*, Lipsko 1954) se jeví pro rámec předloženého pojednání dostatečná. Rozdíly mezi Bernoulliho a Bayesovým theoremem atd. můžeme opominout. Nebudeme rozebírat ani těžkosti, které vznikají z toho, že ideální, geometricky „správné" a fysikálně homogenní kostky neexistují, jako se nebudeme zabývat pochybnostmi o klasické definici pravděpodobnosti: „pravděpodobnost je poměr případů příznivých ke všem případům možným".

[9]) Konečná formulace „Petrohradského problému" zní: A a B házejí mincí (rub, líc) za těchto podmínek: B dá A dvě peněžní jednotky, hodí-li A prvním vrhem rub (líc); čtyři jednotky, hodí-li rub (líc) druhým hodem; hodí-li v n-tém hodu rub (líc), 2^n peněžních jednotek. Otázka je kolik musí vložit A. (Srovnej P. S. de Laplace, *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit*, Dtsch. O. Kl. No 233, Lipsko 1932 a A. Meyer, *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Lipsko 1872).

[10]) J. E. Hoffmann, *Geschichte der Mathematik I*, Göschen No 226, Berlín 1953.

[11]) Viz citaci v pozn. [9]).

[12]) Viz pozn. [4]).

hráči *B* ještě 4 vítězné partie k výhře celé hry a tím k výhře celého vkladu. Hra by musela být ukončena nejpozději po 5 dalších partiích. Na př.:

Číslo partie	Hráč *A*	Hráč *B*
1—4	*AAA*	*B*
5	*A*	
6		*B*
7		*B*
8		*B*
9	*A*	

Jak by mohlo vypadat zbývajících 5 partií? O tom nás poučí tato sestava:
Možnosti:

Čís. partie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
6	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
7	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*
8	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*
9	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*

Čís. partie	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
5	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*
6	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*
7	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
8	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*
9	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*

26 z těchto 32 možností je příznivých pro hráče *A* a jen 6 (a to 11, 12, 14, 16, 18 a 20) pro hráče *B*. Hráč *A* má proto nárok na $^{26}/_{32} = {}^{13}/_{16}$ a hráč *B* na $^{6}/_{32} = {}^{3}/_{16}$ vkladu, když se přeruší hra po 4. partii, a když z těchto čtyř partií vyhrál hráč *A* tři a hráč *B* jednu. Uvedenou úlohu řešil i další matematik této na matematiky tak bohaté doby, geometr J. Bernoulli. Ve své *Ars conjectandi* [13]) udal vlastní methodou správný dělící poměr, totiž $^{13}/_{3}$ pro náš shora uvedený příklad číselný (pro $t = 2$).

První *Ars conjectandi*, vydaná posmrtně r. 1713 Bernoulliho synovcem Nicolasem, byla, přestože zůstala jen fragmentem, nesmírným krokem vpřed.

Plným právem se mohl J. Bernoulli domnívat, že se nikdo jiný nezabýval tolik problémy z počtu pravděpodobnosti jako on po dvacet let.[14]) V *Ars cojectandi* nejsou obsažena jen Bernoulliova čísla, nazvaná po jejich objeviteli, a methoda úplné indukce, nalezená již před r. 1654 Pascalem. Toto dílo nemá nesmírný význam jen pro rozvoj kombinatoriky, nýbrž uvádí především první formulaci zákona velkých čísel — „pravděpodobnost a posteriori" a návod k použití „umění induktivního úsudku" na občanské, morální a hospodářské otázky. V 18. stol. došlo k nesmírnému rozvoji theorie pravděpodobnosti. Led byl prolomen a nové myšlenky obohatily theorii a otevřely jí nová pole aplikace

[13]) Kurt-R. Biermann, *Über eine Studie von C. W. Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Forschungen und Forschritte 29, 1955, p. 110ff.
Deutsch O. Kl. 107 u. 108, Lipsko 1899.

[14]) *Brief an G. W. Leibnitz vom 3. 10. 1703*, L. M. S. 3, 1, p. 77a d.

ve statistice, soudnictví, v theorii chyb a jinde, v plodném spolupůsobení s ostatními matematickými obory.

Zjednodušuje myšlenkový pochod a názornost[15]), shrnul Laplace, velký matematik a oportunista[16]) tehdejší znalosti počtu pravděpodobnosti, při čemž je obohatil takovým způsobem, že všechny své předchůdce zastínil. Současně lze u něho též pozorovat tehdy velmi rozšířené přeceňování theorie. *Théorie analytique des probabilités* (1812) a *Essai philosophique sur les probabilités* (1814) jsou jeho největší díla na poli počtu pravděpodobnosti.

I u něho nalézáme shora uvedenou úlohu dělícího poměru.[17]) Laplace ji řeší pomocí parciální diferenciální rovnice prvního řádu.

Hráči A chybí k vítěznému ukončení hry ještě $s - p = v$ a hráči B ještě $s - q = w$ jednotlivých partií. Pravděpodobnost výhry pro hráče A je:

$$f(v, w) = \left(\frac{1}{2}\right)^v \left[1 + \frac{1}{2} v + \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{v(v+1)\ldots(v+w-2)}{(w-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{w-1}\right].$$

Dosadíme-li naše čísla, dostáváme

$$f(2, 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{13}{16}.$$

Hráč B má tedy nárok na $^3/_{16}$ vkladu.[18])

Sledovali jsme historii dělícího poměru po 300 let. Mohli bychom ji sledovat dále až do r. 1951[19]) a její řešení podat pomocí sumačních vzorců a určitých integrálů, nebo jiným způsobem. Znamenalo by to však příliš velký odklon od thematu; náš stručný přehled neklade si přirozeně nárok na úplnost. Tak jsme mohli uvést mezi jiným vyšetřování dělícího poměru, které prováděl N. J. Fuss (1755—1862) v Petrohradě, osobní sekretář Eulerův a později manžel jeho vnučky.[20]) Cílem bylo však ukázat, jak otázky, které se zdají být zcela odlehlé od praxe, pomáhají vzniku a rozvoji theorie, která nakonec nalézá pro přírodní i společenské vědy velmi důležité oblasti aplikace.

Zkráceně přeložila R. Mikulaschková

---

[15]) H. Wieleitner, *Geschichte der Mathematik II*, Göschen 875, Berlín—Lipsko 1923, str. 20.

[16]) Praví se, že měnil předmluvu svých prací při každé změně režimu ve Francii.

[17]) Viz citaci v pozn. [9]).

[18]) *Ableitung und Beweis*, O. Kl. 233, p. 192 a d.

[19]) Srv. n. př. R. v. Mises, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Vídeň 1951.

[20]) Kromě uvedených pramenů bylo použito díla *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* M. Cantora (sv. II, III, Lipsko 1900 a sv. IV, 1924). Toto standardní dílo je stále ještě nejobsáhlejším dílem i když je v některých směrech již překonáno.