Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Miloš Matula

Aplikace matematiky na studium psaní

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 3, 245--256

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137110

POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK III — ČÍSLO 3

MATEMATIKA

APLIKACE MATEMATIKY NA STUDIUM PSANÍ

MILOŠ MATULA

Vlastnosti procesu psaní jsou přes důležitost psaní v našem kulturním životě dosud jen málo prostudovány. Poměrně nejvíce se jeho studiem zabývali pracovníci v těsnopise, neboť účelné sestavení soustavy písma a provádění psacích úkonů má pro stenografii mimořádný význam. I když předmětem zkoumání je u nich písmo stenografické, mají výsledky většinou platnost i pro psaní obyčejným písmem; neboť soustavu těsnopisného písma lze sice vytvořit nejrozmanitějšími způsoby, jejichž bohatost je ještě stupňována různou strukturou systémů krácení v té které soustavě, ale grafický materiál, s kterým těsnopisné soustavy pracují, je v podstatě neměnný a jeho elementy jsou totožné s grafickými prvky obyčejného písma (aspoň pokud jde o tzv. kursivní těsnopisné soustavy). Zejména tedy rozbor písma po stránce biomechanické a kinematické lze aplikovat na písmo stenografické i obyčejné.

Od minulého století vykonali těsnopisní pracovníci v zahraničí i u nás empirická měření rychlosti psaní jednotlivých grafických prvků. Tyto výzkumy spolu s hrubým pozorováním průběhu psaní ukázaly, že pohyby prstů a ruky při psaní mají největší rychlost uprostřed a nejmenší v krajních bodech pohybu a že doba napsání prvku písma jen velmi málo závisí na jeho velikosti. Pohyby prstů a ruky při psaní se uskutečňují stahováním a natahováním dvou skupin pružných svalů (které vzniká na základě nervových impulsů vedených ke svalům z mozku). Tato fakta vedla některé těsnopisné pracovníky k předpokladu, že prsty a ruka vykonávají při rychlém přirozeném psaní harmonické kmitavé pohyby. Pokud vím, bylo to poprvé dosti zřetelně vysloveno německým těsnopiscem dr. A. Kunowskim v časopise *Archiv für Stenographie*, ročník 1902. Sovětský těsnopisec N. N. Sokolov experimentálně potvrdil tento předpoklad a empiricky dokázal harmonickou povahu základních pohybů při psaní. Grafické prvky vznikají skládáním harmonických kmitavých pohybů prstů („shora dolů" a „zdola nahoru") a ruky („zleva doprava" a zprava doleva"); matematické vyjádření, jak známo, ukazuje, že tak vznikají Lissajousovy křivky, zejména úsečka, elipsa a křivka podoby osmičky. Praktická zkušenost vede dále Sokolova k tomu, že je nutno připustit také pohyby po cykloidálních křivkách, které zřejmě vznikají tím, že přibude ještě pohyb předloktí („zleva doprava", resp. „zprava doleva"). Uvedené tvary označuje Sokolov za základní prvky písma. Naproti tomu na př. grafický prvek č. 23 v níže uvedené tabulce těsnopisných znaků (v praxi často používaný) označuje Sokolov jako prvek odporující zákonům psaní, neboť se domnívá, že vzniká spojením prvků pravého a levého obratu. Na základě rozboru biomechanické podstaty těchto jevů podal Sokolov také rozbor mechanických důvodů deformace zaoblování úhlů a deformace vznikající při spojování prvků opačného obratu při rychlém psaní. Své výsledky uveřejnil Sokolov v knize *Těoretičeskije osnovy gosudarstvěnnoj jedinoj sistěmy stěnografii* (1949).

Domnívám se, že je přirozené zobecnit tyto empirické výsledky v tom smyslu, že pro rychle píšící ruku je přirozený každý psací pohyb, který vznikne skládáním zmíněných pohybů prstů, ruky a předloktí; vzhledem k malému rozměru prvků písma lze všechny tyto pohyby prakticky považovat za pohyby po přímce a pohyb předloktí, který se v poměru k délce předloktí děje velmi pomalu, lze prakticky považovat za rovnoměrný posun. V jednotlivých případech se ovšem může vyskytnout také např. pohyb ruky nebo předloktí shora dolů — ale takové případy mají v praxi malou úlohu a můžeme je tu ponechat stranou.

Nechť směr pohybu prstů je rovnoběžný se směrem osy y a směr pohybu ruky a předloktí rovnoběžný se směrem osy x. Pak lze pohyb při psaní prvků písma vyjádřit rovnicemi tvaru $x = a \cos (mt + \varphi) + ct + d$, $y = b \cos (nt + \psi) + e$. Jistě je možno předpokládat, že poměr $m : n$ je racionální, takže zřejmě můžeme předpokládat, že m a n jsou přirozená nesoudělná čísla.

Každý pro rychlé psaní vhodný prvek písma vznikne z nějaké křivky uvedeného tvaru omezením parametru t na vhodný interval. V praxi přitom nejsou souřadnice x, y zpravidla pravoúhlé, nýbrž kladné směry os souřadnic svírají obvykle ostrý úhel. Pro většinu našich úvah to není nikterak podstatné.

Z velkého množství křivek, které takto dostáváme, si pak soustava písma vybírá ty, které jsou jednak dostatečně rychlopisné, jednak psychologicky výhodné tím, že jejich geometrická povaha je natolik jednoduchá a výrazná, že umožňuje snadné vybavování a snadnou kontrolu při psaní.

Toto obecné pojetí umožňuje také klasifikaci grafických prvků z hlediska psacích pohybů.

Zatím co tedy v podstatě známe zákonitost, kterou se řídí rychlé psaní základních grafických prvků, není nikterak řešena velmi důležitá otázka, jak probíhá psací pohyb při spojování různých grafických prvků ve větší grafické celky, k němuž při psaní neustále dochází. Při přechodu od grafického prvku k jinému, odvozenému z jiné křivky, dojde nutně ke změně pohybových rovnic. Až na Sokolovův rozbor některých úkazů při deformaci písma není o tom známo prakticky nic a tím méně existuje obecná teorie. Ovšem způsob, jak se píšící ruka přizpůsobuje přechodům při spojování grafických prvků, může být mechanicky značně komplikovaný a sestavení příslušné teorie by si vyžádalo velmi dlouhých, pracných a mnohdy obtížně zpracovatelných výzkumů, které dosud nebyly v dostatečné šíři prováděny.

Přesto se domnívám, že je možno vytvořit uspokojivou a pro praktické účely vcelku postačující teorii spojování grafických prvků v „idealisovaném“ smyslu. Pro aplikaci nejde totiž vždy tolik o to, abychom přesně znali biomechanický průběh psacího pohybu při spojení znaků, nýbrž především o to, aby teorie ukazovala, do jaké míry jsou ta či ona grafická spojení hladce nebo obtížněji proveditelná, v kterých případech a jak velké zpomalení psacího pohybu v celku a jakého asi druhu deformace písma můžeme očekávat při spojeních, která nejsou hladká. Budeme tedy předpokládat, že v některých případech je možný okamžitý přechod z jedné grafické křivky do druhé (ve vhodném bodě), zatím co v ostatních případech deformují křivky tvar a mění se v křivky více méně blízké, mezi nimiž je hladký přechod možný. Půjde pak nejprve o to, jaké matematické podmínky je účelné klást na hladké spojení. Myslím, že teorie, kterou se pokusím naznačit v druhé části článku a která užívá kritéria, jež vystačí s geometrickými vlastnostmi grafických prvků, je v dobré shodě s praktickou zkušeností.

Poznamenávám ještě, že termínu „grafický" užívám v tomto článku stále zhruba ve smyslu „vztahující se k procesu psaní". Dále poznamenávám, že zde uvedený okruh otázek nevyčerpává možnosti úspěšné aplikace matematiky při studiu písma a psaní, zejména stenografie, jimiž jsem se zabýval v rámci činnosti Státního ústavu těsnopisného.

1. Grafické křivky

V 1. části článku budeme vyšetřovat v každé úvaze jen jediný grafický prvek, takže můžeme zjednodušit rovnice psacího pohybu tím, že budeme klást $\psi = 0$. Zřejmě stačí, když φ je dáno až na celé násobky 2π, takže můžeme předpokládat na př. $-\pi < \varphi \leqq \pi$.

Z toho, že naše písmo jde po horizontálních linkách (zleva doprava), se dá snadno usoudit, že za základní prvky písma se hodí s nepatrnými výjimkami jen případy $n = 1$; složitější grafické útvary jsou vytvořeny zpravidla kombinacemi grafických prvků vyhovujících podmínce $n = 1$. Z toho, že písmo směřuje odleva doprava, dále plyne, že jen ve zcela řídkých výjimkách se pohyb předloktí děje zprava doleva; prakticky můžeme tedy předpokládat $c \geqq 0$.

Definice 1. Křivku (1) $x = a \cos(mt + \varphi) + ct + d$, $y = b \cos t + e$, kde $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, $-\pi < \varphi \leqq \pi$, m přirozené, nazveme grafickou křivkou. Číslo m nazveme charakterem křivky, číslo a, resp. b její x-amplitudou, resp. y-amplitudou. Body křivky (1) pro $t = (2k - 1)\pi$, resp. $t = 2k\pi$ (k celé) nazveme dolními, resp. horními vrcholy křivky. Symbolem $B(t)$ budeme značit bod křivky (1) příslušející hodnotě t parametru.

Definice 2. Křivku (1) nazveme základní, když $c = 0$, a odvozenou, když $c > 0$. Základní křivkou příslušnou k odvozené křivce (1) nazveme křivku, která vznikne z (1), položíme-li $c = 0$. Základní křivku nazveme singulární, když $\sin \varphi = 0$ (t. j. $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \pi$); jinak ji nazveme normální. Je-li $\sin \varphi \neq 0$, pak číslo $\delta = \dfrac{c}{ma \sin \varphi}$ nazveme diskriminantem křivky (1).

Definice 3. Křivka (1) se nazývá kladně (záporně) orientovaná, když $\sin \varphi > 0$, tj. $0 < \varphi < \pi$ ($\sin \varphi < 0$, tj. $-\pi < \varphi < 0$). Křivka (1) se nazývá souměrná, jestliže pro každé t a pro každé celé k je $\frac{1}{2}[x(k\pi + t) + x(k\pi - t)] = x(k\pi)$.

Protože „degenerované" případy, kde $a = 0$ nebo $b = 0$, lze vyšetřit snadno zvlášť, budeme — pokud nebude výslovně uveden opak — stále předpokládat $a > 0$, $b > 0$.

Pro základní křivku zřejmě platí $B(t) = B(2k\pi + t)$ pro všechna t, takže při vyšetřování základních křivek se můžeme omezit na t z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Pro singulární základní křivku platí nadto $B(\pi + t) = B(\pi - t)$ pro všechna t, takže při vyšetřování geometrických vlastností singulárních základních křivek se můžeme omezit na t z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Pro každou grafickou křivku platí $x(2k\pi + t) - x(t) = 2k\pi c$, $y(2k\pi + t) = y(t)$, takže i odvozená grafická křivka „periodicky opakuje svůj tvar", když t proběhne interval délky 2π.

Věta 1. *Grafická křivka je souměrná právě tehdy, když* $\cos \varphi = 0$, *tj.* $|\varphi| = \frac{1}{2}\pi$.

Důkaz: Na základě definice souměrnosti vypočteme, že podmínka zní $a \cos (mk\pi + \varphi) \cos mt = 0$ identicky v t; protože předpokládáme $a > 0$, plyne odtud tvrzení.

Zřejmě $x(t)$ i $y(t)$ má pro každé t všechny derivace a pro žádné t není současně $y'(t) = y''(t) = 0$. Odtud plyne, že grafická křivka má v každém bodě tečnu.

Věta 2. *Grafická křivka nemůže mít jiné vícenásobné body než dvojné body. Normální základní křivka má* $m - 1$ *dvojných bodů, singulární základní křivka nemá dvojných bodů. Odvozená grafická křivka* K *má dvojné body právě tehdy, když příslušná základní křivka je normální a když buďto* K *má kladnou orientaci a je* $0 < \delta < 1$, *nebo* K *má zápornou orientaci a lichý charakter a je* $-1 < \delta < 0$, *nebo* K *má zápornou orientaci a sudý charakter a je* $r \leqq \delta < 0$, *kde* r *je minimum funkce* $\frac{\sin z}{z}$. *Základní křivka je topologickou úsečkou právě tehdy, když je singulární; krajními body jsou pak horní a dolní vrchol.*

Důkaz: I. Nechť $B(t_1) = B(t_2) = B(t_3)$ a nechť všechna tři čísla t_1, t_2, t_3, jsou navzájem různá. Pak platí $\cos t_1 = \cos t_2 = \cos t_3$. Odtud plyne, že buď existuje celé k a $\alpha \neq 0$ tak, že $t_1 = k\pi + \alpha$, $t_2 = k\pi - \alpha$, nebo existuje celé k a číslo α tak, že $t_1 = \alpha + k\pi$, $t_2 = \alpha - k\pi$. Druhá možnost nepřichází v úvahu, neboť znamená $t_1 = 2k\pi + t_2$; je-li křivka základní, je $B(t) = B(2k\pi + t)$ identicky, a je-li odvozená, je $x(t_1) - x(t_2) = 2k\pi c \neq 0$, takže $B(t_1) \neq B(t_2)$. Předpokládejme tedy $t_1 = k\pi + \alpha$, $t_2 = k\pi - \alpha$. Podobně předpokládejme $t_1 = p\pi + \beta$, $t_3 = p\pi - \beta$ a $t_2 = q\pi + \gamma$, $t_3 = q\pi - \gamma$. Tudíž $k\pi + \alpha = p\pi + \beta$, $k\pi - \alpha = q\pi + \gamma$, $p\pi - \beta = q\pi - \gamma$, odkud sečtením $2k\pi - \beta = 2q\pi + \beta$ neboli $\beta = (k - q)\pi$, takže $t_1 = t_3 + 2(k - q)\pi$ a stejná úvaha jako před chvílí ukáže, že hodnota t_3 nemá vliv na násobnost bodu $B(t_1)$. Grafická křivka nemůže tedy mít body násobnosti větší než 2, při čemž dvojný bod má tvar $B(t_1) = B(t_2)$, kde $t_1 = k\pi + \alpha$, $t_2 = k\pi - \alpha$ při vhodném celém k a vhodném $\alpha > 0$; přitom čísla k, α jsou zřejmě jednoznačně určena.

II. Nechť $c = 0$, tj. nechť křivka (1) je základní. Pak můžeme t omezit na interval $\langle 0, 2\pi \rangle$. Dvojný bod je tedy možný jen pro $t_1 = \pi + \alpha$, $t_2 = \pi - \alpha$. Podmínka $x(t_1) = x(t_2)$ neboli $a \cos (m\pi + m\alpha + \varphi) = a \cos (m\pi - m\alpha + \varphi)$ dává po úpravě $\sin (m\pi + \varphi) \sin m\alpha = 0$. Jestliže křivka je normální, tedy $\sin \varphi \neq 0$, dostáváme tudíž dvojné body pro $\sin m\alpha = 0$, tedy $\alpha = \frac{k}{m}\pi$ (k celé); protože $0 < \alpha < \pi$ a tedy $1 \leqq k \leqq m - 1$, dostáváme $m - 1$ dvojných bodů. Je-li křivka singulární, tedy $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \pi$, můžeme posunutím soustavy souřadnic dosáhnout, aby $d = e = 0$, načež bude $x = \pm a \,.$ $. \cos mt$, $y = b \cos t$, takže zřejmě x je polynom v y definovaný pro $|y| \leqq b$, a tedy křivka je topologický obraz úsečky $\langle -b, b \rangle$. Naproti tomu normální základní křivka nemůže být topologickou úsečkou, neboť, jak snadno vidíme, je uzavřená (ostatně pro $m = 1$ lehko seznáme, že základní křivka je elipsa, zatím co pro $m > 1$ má, jak jsme právě zjistili, dvojné body).

III. Nechť $c > 0$, tj. nechť křivka (1) je odvozená. Dvojné body musí mít tvar $t_1 = k\pi + \alpha_k$, $t_2 = k\pi - \alpha_k$ (k celé, $\alpha_k > 0$). Podmínka $x(t_1) = x(t_2)$

dává $a \sin (mk\pi + \varphi) \sin m\alpha_k = c\alpha_k$. Pro $\sin \varphi = 0$ nelze tomuto vztahu vyhovět, neboť $c > 0$; tedy dvojné body neexistují, když příslušná základní křivka je singulární. Při jiných φ můžeme psát $\frac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} = \pm \frac{c}{ma \sin \varphi} = \pm \delta$, kde znamení plus platí při sudém m nebo při lichém m a sudém k, znamení minus platí při lichém m a lichém k. V prvém případě je $\frac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} > 0$ nebo < 0 podle toho, zda orientace je kladná nebo záporná, v druhém případě naopak. Z vlastností funkce $\frac{\sin z}{z}$ plyne, že $\alpha_k \neq 0$ existuje v prvém případě, je-li $0 < \delta < 1$ při kladné orientaci a $r \leqq \delta < 0$ při záporné orientaci, v druhém případě, je-li $0 < -\delta < 1$ při záporné orientaci a $r \leqq -\delta < 0$ při kladné orientaci. Celkem tedy existují dvojné body v těchto případech: 1) $\varphi > 0$, m sudé, $0 < \delta < 1$; 2a) $\varphi > 0$, m liché, k sudé, $0 < \delta < 1$; 2b) $\varphi > 0$, m liché, k liché, $0 < \delta \leqq |r|$; 3) $\varphi < 0$, m sudé, $r \leqq \delta < 0$; 4a) $\varphi < 0$, m liché, k sudé, $r \leqq \delta < 0$; 4b) $\varphi < 0$, m liché, k liché, $-1 < \delta < 0$. Protože u našeho tvrzení nejde o to, zda k je sudé nebo liché, je důkaz hotov.

Aby grafická křivka byla z psychologického hlediska pohodlná pro praktické použití, je účelné, když její body vytvářejí jen jednoduché „kličky" (jako při psaní písmene „e"). Jestliže grafická křivka vyhovuje této podmínce (nebo jestliže vůbec nemá dvojné body), nazveme ji regulární. Matematicky to formulujeme takto:

Definice 4. Odvozená grafická křivka se nazývá regulární, jestliže má tyto dvě vlastnosti:

[1] když $B(t_1) = B(t_2)$ pro $t_1 < t_2$, pak $B(t)$ není dvojný bod pro žádné $t_0 \in (t_1, t_2)$;

[2] když $B(t_1) = B(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, pak $B(t)$ je uzlový bod, tj. tečny příslušející hodnotám t_1, t_2 jsou navzájem různé.

Z důkazu věty 2 plyne, že dvojný bod má právě jeden z tvarů (a) $B(2k\pi + \alpha_{2k}) = B(2k\pi - \alpha_{2k})$, (b) $B[(2k + 1)\pi + \alpha_{2k+1}] = B[(2k + 1)\pi - \alpha_{2k+1}]$, kde k je vhodné celé číslo. Vzhledem k tomu definujeme:

Definice 4a. Dvojný bod regulární grafické křivky se nazývá horní kličkou, jestliže má tvar (a), a dolní kličkou, jestliže má tvar (b). Výškou horní kličky $B(\beta)$ nazýváme číslo $y(2k\pi) - y(\beta)$, výškou dolní kličky $B(\beta)$ číslo $y(\beta) - y[(2k + 1)\pi]$.

Věta 3. *I. Odvozená grafická křivka K je regulární právě tehdy, když je splněna některá z těchto podmínek:*

[a] K má kladnou orientaci a sudý charakter a je $\delta > s$, kde s je relativní maximum funkce $\frac{\sin z}{z}$ v intervalu $(2\pi, \frac{5}{2}\pi)$.

[b] K má lichý charakter nebo K má zápornou orientaci a sudý charakter a je $|\delta| > |r|$, kde r je minimum funkce $\frac{\sin z}{z}$.

[c] Základní křivka příslušná ke K je singulární.

II. Jestliže regulární grafická křivka má dvojné body, pak při lichém charakteru má buď jen horní kličky (a to v případě kladném orientace) nebo jen dolní kličky (*a to v případě záporné orientace*); *při sudém charakteru a kladné orientaci má horní i dolní kličky a obojí kličky jsou stejně vysoké.*

III. Regulární grafická křivka sudého charakteru a záporné orientace nemá dvojných bodů.

Důkaz: I. Snadno se vidí, že vlastnost [1] v definici 4 je ekvivalentní s vlastností, že ke každému k existuje nejvýš jedno kladné α_k, při čemž $\alpha_k < \pi$ a dokonce $\alpha_k + \alpha_{k+1} < \pi$ (jestliže příslušná α_i existují).

II. Protože ke každému k existuje u regulární křivky nejvýš jedno α_k, může být zlomek $\dfrac{\sin m\alpha}{m\alpha}$ záporný jen tehdy, je-li roven r. Vlastnost [2] z definice 4 však je ekvivalentní vlastnosti, že pro dvojný bod neplatí vztah

$$\frac{x'(k\pi + \alpha_k)}{y'(k\pi + \alpha_k)} = \frac{x'(k\pi - \alpha_k)}{y'(k\pi - \alpha_k)} \quad \text{neboli}$$

$$\frac{-ma\sin(mk\pi + m\alpha_k + \varphi) + c}{-b\sin(k\pi + \alpha_k)} = \frac{-ma\sin(mk\pi - m\alpha_k + \varphi) + c}{-b\sin(k\pi - \alpha_k)};$$

jmenovatelé jsou $\neq 0$, neboť α_k není celý násobek π. Podle věty 2 existují dvojné body, jen když základní křivka je normální, tedy $\sin\varphi \neq 0$, takže poslední rovnost můžeme po úpravě psát ve tvaru $\cos m\alpha_k = \dfrac{c}{\pm ma\sin\varphi}$, kde plus platí pro sudé m nebo pro liché m a sudé k, kdežto minus platí pro liché m a liché k. Podle důkazu věty 2 je tedy $\cos m\alpha_k = \dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k}$ neboli $\operatorname{tg} m\alpha_k = m\alpha_k$. Tato rovnost tudíž má být vyloučena; ale derivováním funkce $\dfrac{\sin z}{z}$ zjistíme ihned, že čísla z, pro která $\operatorname{tg} z = z$, jsou právě ta, pro která $\dfrac{\sin z}{z}$ má extrém. Nemůže tedy být $\dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} = r$. Tudíž jestliže α_k existuje, je zlomek $\dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k}$ nutně kladný.

III. Definice 4 tedy říká právě toto: a) ke každému k existuje nejvýš jedno kladné α_k; b) $\alpha_k < \pi$, $\alpha_k + \alpha_{k+1} < \pi$, $\dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} > 0$ (pokud příslušná α_i existují).

IV. Rozeznávejme nyní tyto případy:

[1] $\sin\varphi > 0$, m sudé. Pak $\dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} = \delta > 0$. Jestliže $\delta \geqq 1$, pak podle věty 2 čísla α_k neexistují a křivka je tedy regulární. Jestliže $1 > \delta > s$, pak α_k je jednoznačně určeno a je $m\alpha_k < \pi$. Protože m je sudé a tedy $m \geqq 2$, je $\alpha_k < \frac{1}{2}\pi$. Protože δ nezávisí na k, existuje $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, takže podmínky III tohoto důkazu jsou splněny. Naopak když podmínky III tohoto důkazu jsou splněny a přitom m je sudé a $\sin\varphi > 0$, pak vzhledem k jednoznačnosti α_k musí být $\delta > s$. Tedy při sudém charakteru a kladné orientaci je křivka regulární

právě tehdy, když $\delta > s$. Dvojné body existují při $s < \delta < 1$, a to pro každé k, takže křivka má pak horní i dolní kličky; protože $\alpha_k = \alpha_{k+1}$, je výška všech kliček stejná.

[2] $\sin\varphi < 0$, m sudé. Pak $\dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} = \delta < 0$, takže křivka je regulární právě tehdy, když α_k neexistují, tedy (podle věty 2) když $|\delta| > |r|$.

[3] $\sin\varphi > 0$, m liché. Pak pro liché k je $\dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} = -\delta < 0$, takže křivka může být regulární, jen když α_k pro liché k neexistují, tedy když $\delta > |r|$. Pro sudé k je $\dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} = \delta > 0$ a jednoznačnost α_k je tu zase ekvivalentní se vztahem $\delta > s$. Snadno se přesvědčíme, že $|r| > s$, takže je-li $\delta > |r|$, je tím spíše $\delta > s$, tudíž podmínka $\delta > |r|$ je pro regularitu také postačující. Dvojné body mohou být jen pro sudé k, tedy jde o horní kličky.

[4] $\sin\varphi < 0$, m liché. Pak pro sudé k je $\dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} = \delta < 0$, takže křivka může být regulární, jen když α_k pro sudé k neexistují, tedy když $|\delta| > |r|$. Pro liché k je $\dfrac{\sin m\alpha_k}{m\alpha_k} = -\delta > 0$ a jednoznačnost α_k je ekvivalentní se vztahem $|\delta| > s$. Protože $|r| > s$, je zase podmínka $|\delta| > |r|$ pro regularitu postačující. Dvojné body mohou být jen pro liché k, tedy jde o dolní kličky.

[5] $\sin\varphi = 0$ (tedy základní křivka je singulární). Pak podle věty 2 dvojné body neexistují, takže křivka je regulární.

Poznámka. Jestliže $m \leqq 2$, pak k platnosti věty 3 stačí vlastnost [1] v definici 4. Vlastnosti [2] jsme totiž použili jen k vyloučení možnosti $\sin m\alpha/m\alpha_k = r$; protože však tato rovnost znamená, že $m\alpha_k \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, nemůže být splněna pro $m = 1$, neboť by nebylo $\alpha_k < \pi$, ani pro $m = 2$, neboť by nebylo $\alpha_k + \alpha_{k+1} = 2\alpha_k < \pi$, jak by žádala vlastnost [1] v definici 4.

Věta 4. *Grafická křivka může mít body vratu jen prvního druhu (tj. takové, v nichž přechází z jedné strany tečny na druhou). Základní křivka nemá body vratu. Odvozená grafická křivka K má body vratu právě tehdy, když příslušná základní křivka je normální a když buďto K má kladnou orientaci a diskriminant $\delta = 1$ nebo K má zápornou orientaci a lichý charakter a je $\delta = -1$. Při sudém charakteru jsou pak body vratu právě v horních a dolních vrcholech, při lichém charakteru jsou jen v horních vrcholech v případě kladné orientace a jen v dolních vrcholech v případě záporné orientace. Záporně orientovaná grafická křivka sudého charakteru nemá body vratu. Tečny v bodech vratu jsou rovnoběžné s osou y právě tehdy, když křivka je souměrná. Tečny v horních a dolních bodech vratu křivky sudého charakteru jsou spolu rovnoběžné právě tehdy, když křivka je souměrná (a jsou pak tedy rovnoběžné s osou y).*

Důkaz. I. Nutná podmínka $x'(t) = y'(t) = 0$ pro body vratu může být u základní křivky splněna pouze při $t = k\pi$ (k celé) a $\sin\varphi = 0$; v tomto případě však jde o krajní body singulární křivky.

II. Nechť nyní (1) je odvozená. Protože není nikdy současně $y'(t) = y''(t) = 0$, je podmínka $x'(t) = y'(t) = 0$ pro bod vratu také postačující. Z $y'(t) = 0$ plyne $t = k\pi$ (k celé), načež $x'(t) = 0$ dává $ma \sin(mk\pi + \varphi) = c$. Protože $c > 0$, $a > 0$, nemůže být tento vztah splněn při $\sin\varphi = 0$, takže body vratu neexistují, je-li příslušná základní křivka singulární. Při jiných φ je $ma \sin \varphi = c$ neboli $\delta = 1$ při sudém m nebo při lichém m a sudém k, kdežto $ma \sin \varphi = -c$ neboli $\delta = -1$ při lichém m a lichém k; přitom sudé k znamená horní, liché k dolní vrchol. Protože $c > 0$, je v prvém případě nutně $\sin \varphi > 0$, tedy kladná orientace, v druhém případě $\sin \varphi < 0$, tedy záporná orientace.

Abychom ukázali, že body vratu jsou prvního druhu, stačí dokázat, že je-li t bod vratu, je $x''(t)\, y'''(t) - x'''(t)\, y''(t) \neq 0$. Výraz vlevo je roven $-m^2ab \,.\, \cos (mt + \varphi) \sin t + m^3ab \sin (mt + \varphi) \cos t$; pro body vratu je $\sin t = 0$, $\cos t = \pm 1$, $\sin (mt + \varphi) = \pm \sin \varphi \neq 0$, neboť příslušná základní křivka je normální), takže celý výraz je skutečně $\neq 0$.

III. Protože $y''(k\pi) \neq 0$, je podmínkou pro rovnoběžnost tečny v bodě vratu s osou y rovnost $x''(k\pi) = 0$ (i v případě kosoúhlých souřadnic); protože $x''(k\pi) = -m^2a \,.\, \cos (mk\pi + \varphi)$, znamená to $\cos \varphi = 0$, takže křivka musí být podle věty 1 souměrná. Je-li m sudé, pak podmínka pro rovnoběžnost tečen v horních a dolních bodech vratu je $\dfrac{x''(2k\pi)}{y''(2k\pi)} = \dfrac{x''[(2k+1)\pi]}{y''[(2k+1)\pi]}$ neboli $\dfrac{m^2a \cos \varphi}{b} = \dfrac{-m^2a \cos \varphi}{b}$, tedy opět $\cos \varphi = 0$.

Věta 5. *Singulární základní křivka má $m - 2$ inflexních bodů (pro $m = 1$ žádný). Normální základní křivka má $2m - 2$ inflexních bodů (jestliže dvojný bod počítáme za dva body). Součet počtu bodů vratu a inflexních bodů odvozené grafické křivky při omezení parametru t na interval (i uzavřený) délky 2π je nejvýš $2m + 2$, pro $m = 1$ dokonce nejvýš 2. Odvozená grafická křivka sudého charakteru má mezi každými dvěma sousedními vrcholy aspoň jeden inflexní bod.*

Důkaz I. Nutná podmínka pro inflexní bod je $x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t) = 0$; v případě základní křivky, tedy $c = 0$, dává tato podmínka $f(t) = \sin (mt + \varphi) \,.\, \cos t - m \cos (mt + \varphi) \sin t = 0$. Tato podmínka také stačí, jestliže $x'(t) \,.\, y'''(t) = x'''(t)\, y'(t) \neq 0$, neboli $(m^2 - 1) \sin t \sin (mt + \varphi) \neq 0$. Předpokládejme, že křivka je normální, t. j. $\sin \varphi \neq 0$. Pak v případě $m = 1$ je $f(t) = \sin \varphi \neq 0$, takže inflexní body neexistují. Nechť tedy $m > 1$. Předpokládejme, že $\sin t \sin (mt + \varphi) = 0$. Protože $\sin t = 0$ znamená $t = k\pi$ a protože $\sin \varphi \neq 0$, nemůže být $\sin t = \sin (mt + \varphi) = 0$ současně, takže ve výrazu pro $f(t)$ je jeden člen rovný nule a jeden nikoli, tudíž $f(t) \neq 0$. Jestliže tedy $f(t) = 0$, musí být $\sin t \sin (mt + \varphi) \neq 0$, takže podmínka $f(t) = 0$ je skutečně pro inflexní body postačující. Je tedy třeba zjistit počet kořenů rovnice $f(t) = 0$ pro $m > 1$. Protože při vyšetřování základní křivky můžeme t omezit na interval $\langle 0, 2\pi \rangle$, je $f'(t) = (m^2 - 1) \sin t \sin (mt + \varphi) = 0$ právě tehdy, když $mt + \varphi = k\pi$ (k celé) neboli $t = \dfrac{k\pi - \varphi}{m}$, při čemž k nabývá $2m$ hodnot, nebo když $t = 0$ nebo $t = \pi$ nebo $t = 2\pi$. Předpokládejme např. $\sin \varphi > 0$ (případ $\sin \varphi < 0$ se probere obdobně). Je-li $\sin (mt + \varphi) = 0$, je $f(t) = -m \cos(mt + \varphi) \sin t$; při přechodu od $k = i$ ke $k = i + 1$ mění $\cos (mt + \varphi)$ znamení, zatím co $\sin t$ je kladné pro $k = 1, \ldots, m$ a záporné pro $k = m + 1, \ldots, (2m - 1)\, \pi, 2m\pi$. Tedy $f(t)$ mění znamení při přechodu od $k = i$ ke $k = i + 1$ s výjimkou případu $i = m$. Vyšetřme ještě znamení $f(t)$ pro $t = \pi$, $t = 0$, $t = 2\pi$. Je $f(\pi) = -\sin \varphi < 0$ pro sudé m a $f(\pi) = \sin \varphi > 0$ pro liché m, a na druhé straně pro $mt + \varphi = m\pi$ neboli $t = \dfrac{m\pi - \varphi}{m}$ je $\sin t > 0$, takže $f(t) < 0$ pro sudé m, $f(t) > 0$ pro liché m. Tedy $f(\pi)$ má stejné znamení jako $f\left(\frac{m\pi - \varphi}{m}\right)$ (tudíž také jako $f\left(\frac{(m+1)\pi - \varphi}{m}\right)$). Dále je $f(0) = \sin \varphi > 0$ a na druhé straně pro $mt + \varphi = \pi$ neboli $t = \frac{\pi - \varphi}{m}$ je $\sin t > 0$ neboli $f(t) > 0$. Konečně je $f(2\pi) = \sin \varphi > 0$ a na druhé straně pro $mt + \varphi = 2m\pi$ neboli $t = \frac{2m\pi - \varphi}{m}$ je $\sin t < 0$ neboli $f(t) > 0$. Úhrnem tedy pro posloupnost kořenů $0, \frac{\pi - \varphi}{m}, \frac{2\pi - \varphi}{m}, \ldots, \frac{m\pi - \varphi}{m}, \pi, \frac{(m+1)\pi - \varphi}{m}, \ldots, \ldots, \frac{2m\pi - \varphi}{m}, 2\pi$ rovnice $f'(t) = 0$ platí, že $f(t)$ mění znamení $(2m - 2)$-krát, takže zřejmě $f(t)$ má celkem $2m - 2$ kořenů.

Za druhé předpokládejme, že vyšetřovaná základní křivka je singulární, tedy $\sin \varphi = 0$. Buď na příklad $\varphi = 0$ (případ $\varphi = \pi$ je obdobný). Od situace u normální křivky se tento případ liší jednak tím, že $f(t) = 0$ má ještě kořeny $t = 0$, $t = \pi$, $t = 2\pi$, kterých si však nemusíme všímat, protože to zřejmě nejsou inflexní body, jednak tím, že proběhneme křivku už při omezení t na interval $\langle 0, \pi \rangle$, takže inflexních bodů je pouze $m - 2$.

II. Nechť nyní $c > 0$ (tedy křivka je odvozená). V tomto případě, jak snadno vypočteme, je nutná podmínka $f(t) = ma[\sin(mt + \varphi) \cos t - m \cos(mt + \varphi) \sin t] - c \cos t = 0$. Je $f'(t) = \sin t[ma(m^2 - 1) \sin(mt + \varphi) + c]$. Buď nejprve $m > 1$. Pak $f'(t) = 0$ jednak pro $\sin t = 0$, což v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ dává tři hodnoty, jednak pro $\sin(mt + \varphi) = -\frac{c}{(m^2 - 1) ma}$. Protože $c > 0$, $a > 0$, může $mt + \varphi$ ležet jen v intervalech $(\pi, 2\pi), \ldots, ((2m - 1)\pi, 2\pi)$, má-li být $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, při čemž v každém z těchto intervalů může $mt + \varphi$ nabýt dvou hodnot. V celku tedy může $f'(t) = 0$ mít v $\langle 0, 2\pi \rangle$ jen $2m + 3$ kořenů včetně krajních hodnot $t = 0$ a $t = 2\pi$, takže $f(t) = 0$ může mít v $\langle 0, 2\pi \rangle$ nejvýš $2m + 2$ kořenů.
Za druhé buď $m = 1$. Pak $f(t) = a \sin \varphi - c \cos t$, takže $f(t) = 0$ může mít v $\langle 0, 2\pi \rangle$ nejvýše dva kořeny.

III. Když m je sudé, pak $f(2k\pi) = ma \sin \varphi - c = -f[(2k + 1)\pi]$. Jestliže $ma \sin \varphi - c \neq 0$, je poslední tvrzení věty zřejmé. Nechť tedy $ma \sin \varphi = c$. Je $f'(2k\pi) = f'[(2k + 1)\pi] = 0$, $f''(2k\pi) = ma(m^2 - 1) \sin \varphi + c = -f''[(2k + 1)\pi]$, při čemž $f''(2k\pi) = c(m^2 - 1) + c = cm^2 \neq 0$. Tedy buď má f pro $t = 2k\pi$ maximum a pro $t = (2k + 1)\pi$ minimum nebo naopak, a protože $f(2k\pi) = f[(2k + 1)\pi] = 0$, je $f(t) = 0$ pro vhodné $t \in (2k\pi, (2k + 1)\pi)$.
Snadno lze zjistit, že znění vět 1—5 nezávisí na tom, zda v (1) jsou x, y pravoúhlé nebo kosoúhlé souřadnice.

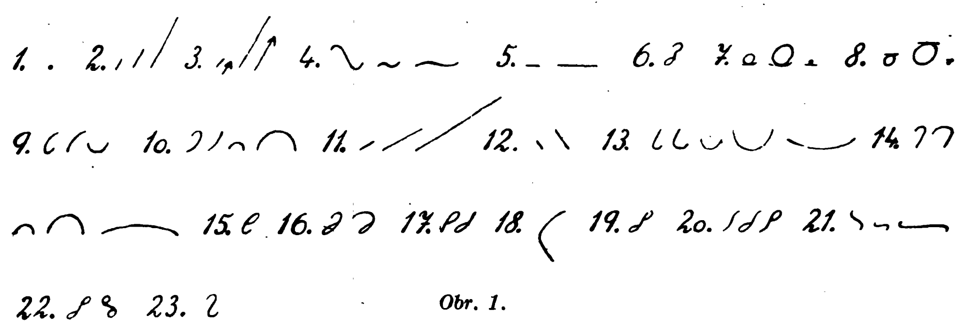
Poznámka. Pokud jde o základní křivky, podívejme se ještě, ve kterých případech dvě dvojice rovnic tvaru

$$x = a \cos(mt + \varphi), \quad y = b \cos t$$

vyjadřují touž základní křivku (nepřihlížíme-li k orientaci). Podmínka pro to, aby existovalo $u = u(t)$ tak, že křivka $x = a \cos(mt + \varphi_1)$, $y = b \cos t$ je totožná s křivkou $x = a \cos(mu + \varphi_2)$, $y = b \cos t$, je $t = 2k\pi \pm u$, $mt + \varphi_1 = 2k^*\pi \pm mu \pm \varphi_2$ (k, k^* celá, platí současně plus nebo současně minus). Odtud snadno plyne, že buď $\varphi_1 + \varphi_2$ nebo $\varphi_1 - \varphi_2$ musí být sudý násobek π. Jestliže speciálně $\varphi_1 + \varphi_2 = 2q\pi$ (q celé), dostaneme touž křivku s opačnými orientacemi (zejména v prakticky důležitém případě souměrných křivek $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi_2 = -\frac{1}{2}\pi$).

Definice 5. Nechť K je nesingulární grafická křivka (tj. grafická křivka, která není singulární základní křivkou). Říkáme, že K má typ ^+V (^-V), když je kladně (záporně) orientovaná a má body vratu. Říkáme, že K má typ ^+D (^-D), když je kladně (záporně) orientovaná a je buď normální základní křivkou nebo je odvozenou křivkou s dvojnými body. Říkáme, že K má typ N, když je odvozená a nemá dvojné body ani body vratu (poznamenejme, že křivka typu N může, ale nemusí mít orientaci; nemá orientaci, jestliže je odvozena ze singulární křivky). (Z předchozích vět plyne, že uvedené typy jsou disjunktní.) Jestliže T znamená jeden z právě uvedených typů, říkáme, že K má typ mT, jestliže má charakter m a typ T. Snadno patrný je význam rčení jako „typ T má kladnou orientaci“ a pod.

Příklady. Popíšeme si stručně, jak získáváme v praxi běžné prvky písma z grafických křivek; pro srovnání budu užívat hlavní znaky užívané v československé těsnopisné soustavě Heroutově-Mikulíkově (termín „znak“ znamená nejmenší grafickou jednotku, která má v těsnopisné soustavě samostatnou existenci):



Obr. 1.

Protože předmětem vyšetřování je tu zatím jediná grafická křivka, můžeme v (1) předpokládat $d = e = 0$. Nejprve vezměme „degenerované“ případy, kdy některé z čísel a, b je $= 0$.

1. V případě $a = b = c = 0$ degeneruje křivka na bod (znak č. 1 — v praxi se napíše nejčastěji jako kratičká úsečka). V případě $a = b = 0$, $c > 0$ máme rovnoměrný pohyb doprava po ose x (jako samostatný prvek rychlého psaní se vyskytne jen výjimečně).

2. Pro $a = c = 0$, $b > 0$ dostaneme kmitavý pohyb po ose y, např. znaky č. 2 při polokmitu shora dolů, č. 3 při polokmitu zdola nahoru.

3. Pro $a = 0$, $b > 0$, $c > 0$ dostaneme „vlnovku“ $y = b \cos x/c$ s inflexními body v průsečících s osou x (např. znaky č. 4, z nichž zejména druhý se v praxi leckdy napíše též jako cykloidální křivka).

4. Pro $a > 0$, $b = 0$ máme pohyb po ose x; prakticky důležitý je případ $c = 0$ — jako polokmit zleva doprava např. u znaků č. 5.

Dále už předpokládáme zase $a > 0$, $b > 0$.

Prakticky se užívá zejména znaků charakteru 1 nebo 2, značně řidčeji 3. Prvky ještě většího charakteru se vyskytnou jen zcela výjimečně. Důvodem je, že dosažitelná rychlost pohybů na psaní zúčastněných svalů je ovšem omezená, takže rychlost psaní je omezena tím z kmitavých pohybů, který má menší frekvenci, a je tedy v podstatě nepřímo úměrná charakteru; znaky s $m > 3$ bývají už pro rychlé psaní příliš těžkopádné. Charakter 3 má např. znak č. 6. V dalším se omezím na $m = 1$ a $m = 2$.

5. V případě $m = 1$ je normální základní křivkou elipsa (ve spec. případě kružnice) se středem v počátku. V souměrném případě $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi$ má elipsa v osách x, y sdružené průměry. Pro grafickou praxi jsou zpravidla vhodné jen elipsy s nepříliš velkou x-amplitudou. Při $0 < \varphi < \pi$ (kladné orientaci elipsy) máme znaky „levého obratu“, např. znaky č. 7, při $-\pi < \varphi < 0$ znaky „pravého obratu“, např. znaky č. 8. Ve spojení se

elipsovité znaky zpravidla píší jako cykloidální tvary s velkou kličkou. Jako část pohybu po kladné elipse mohou vzniknout např. též isolované znaky č. 9, po záporné elipse znaky č. 10; leckdy však tu jsou pro praxi výhodnější cykloidální tvary.

Lze zjistit, že pro $m = 1$ dostaneme všechny možné normální základní křivky při vhodných a, φ už při omezení na pravoúhlé souřadnice; obecně tomu tak není.

6. Singulární základní křivka pro $m = 1$ je úsečka. Pro $\varphi = 0$ dostáváme tzv. nezpříčené znaky (v praxi skoro vždy jen zdola nahoru, např. znaky č. 11), pro $\varphi = \pi$ tzv. zpříčené znaky (v praxi vždy shora dolů, např. znaky č. 12).

7. Nechť nyní $m = 1$, $c > 0$. Podmínka pro inflexní bod je $\cos t = \dfrac{a \sin \varphi}{c}$. Odtud a z našich vět plyne, že křivka odvozená ze singulární křivky je vlnovka typu N s inflexními body v průsečících s osou x (např. znaky č. 4). Z elipsy odvozené křivky jsou cykloidální povahy: a) obyčejné ($|\delta| = 1$) — typ ^+V např. u znaků č. 13, ^-V např. u znaků č. 14; b) prodloužené ($|\delta| < 1$) — typ ^+D s horní kličkou např. u znaku č. 15 (ve spojení též znaky č. 7), typ ^-D s dolní kličkou např. u znaků č. 16 (ve spojení též č. 8); c) zkrácené ($|\delta| > 1$) — typ N, vlnovka (leckdy u znaků č. 4). Částmi křivek typu D bývají v praxi též znaky č. 17 (jejich nekličkové konce se proto při rychlém psaní deformují zaoblováním).

Nyní ke znakům charakteru 2.

8. Pro základní křivku charakteru 2 dostaneme vyloučením t rovnici $4a^2y^4 - 4a^2b^2y^2 - 4ab^2xy^2 \cos \varphi + b^4(x + a \cos \varphi)^2 = 0$, při čemž ovšem $|x| \leqq a$. V singulárním případě $\cos \varphi = \pm 1$ máme oblouk paraboly; v grafické praxi se vyskytuje zřídka (někdy např. u znaku č. 18).

Nechť nyní křivka je normální. Z rovnice vidíme ihned, že i zde je křivka souměrná podle osy x v tom smyslu, že s bodem (x, y) obsahuje též bod $(x, -y)$ (obecněji se snadno zjistí, že základní křivka sudého charakteru je vždy v tomto smyslu souměrná podle osy x). Ke konstrukci můžeme užít buď známého způsobu konstrukce Lissajousových křivek nebo faktu, že křivku lze obdržet jako součet (ve smyslu sčítání y-ových souřadnic) oblouků dvou parabol, které mají v ose x průměr a jejichž tečna v průsečíku s osou x je rovnoběžná s osou y. Souměrná křivka má podobu osmičky (není však lemniskatou), při $\varphi \neq \pm \frac{1}{2}\pi$ dostaneme „deformované osmičky". V praxi se křivka uplatňuje při psaní cifry 8 — jinak má úlohu většinou jen příslušná odvozená křivka.

9. Přistupme nyní k odvozeným křivkám charakteru 2. Všimněme si nejprve, že nutná podmínka $x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t) = 0$ pro inflexní body u křivky $x = a \cos (2t + \varphi) + ct$, $y = b \cos t$ dává po úpravě vztah $4a \cos \varphi \sin^3 t = \cos t(4a \sin \varphi \cos^2 t - 6a \sin \varphi + c)$. Jestliže křivka má body vratu, tedy jestliže $c = 2a \sin \varphi$, plyne odtud $\sin (t + \varphi) = 0$; z toho usoudíme, že v tomto případě mezi každými dvěma sousedními vrcholy je nejvýše jeden inflexní bod, tedy podle věty 5 právě jeden. Tak vznikají např. znaky č. 21. U křivek bez bodů vratu se omezíme na případ souměrných křivek, tj. $\cos \varphi = 0$. Rovnice pro inflexní body se pak redukuje na rovnice $\cos t = 0$ a $\cos^2 t = \dfrac{6a \mp c}{4a}$ (minus pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, plus pro $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$). Omezíme-li se na regulární případ, nemá křivka podle věty 3 buď vůbec dvojných bodů, nebo má horní i dolní kličky. V obou případech je pro rychlé vybavování a kontrolu znaku při praktickém psaní žádoucí, aby křivka měla jen jediný inflexní bod mezi dvěma sousedními vrcholy. V případě $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ proto předpokládejme $c \geqq 6a$ nebo $c < 2a$ (případ $c = 2a$ tu znamená typ V, který jsme už vyšetřili); při $c \geqq 6a$ vzniká typ N tvaru vlnovky (jako samostatný znak v praxi nepoužívaný, protože jsou ovšem výhodnější vlnovky charakteru 1), při $c < 2a$ vzniká typ ^+D s kličkami (např. znaky č. 22; jako části této křivky lze vytvořit též např. isolované znaky č. 20). V případě $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$ jsou inflexní body automaticky jen v průsečících s osou x, protože rovnice $\cos^2 t = \dfrac{6a + c}{4a}$ nemá řešení; při omezení na regulární křivky můžeme podle našich vět dostat jen typ N podoby vlnovky. Prakticky důležité však je, že tímto způsobem můžeme dostat nejužívanější znak charakteru 2, totiž znak č. 23, který při správném psaní (bez deformace obloučků nebo deformace sklonu znaku) předpokládá rovnoběžnost tečen v inflexních bodech; vzhledem k souměrnosti to předpokládá rovnoběžnost těchto tečen s osou y, tedy vztah $x'(\frac{1}{2}\pi) = 0$, což dává $c = 2a$. Tedy znak č. 23 je odvozen ze záporně orientované „osmičky" pro $c = 2a$.

10. Vypočtěme, jaké nejvyšší rychlosti dosahují stenografové nikoli ve slovech za minutu, nýbrž v centimetrech za vteřinu. Zřejmě největší rychlosti dosahuje psací pohyb uprostřed nejdelší prakticky se vyskytující úsečky. Při střední velikosti stenografova

písma má tato úsečka přibližně délku 10 mm a empiricky lze zjistit, že nejrychlejší těsnopisci ji napíší asi za 0,07 vteřiny. Psaní této úsečky probíhá např. podle rovnic $x = 0$, $y = 5 \cos rt$; odtud plyne $\pi = 0{,}07r$. Maximum rychlosti $y' = -5r \sin rt$ nastává pro $\sin rt = \pm 1$. Snadno vypočteme, že toto maximum je asi 22,4 cm/sec; je ovšem přímo úměrné základní velikosti stenografova písma a individuální rychlosti stenografa.

Matematická teorie zákonů psaní má nejen teoretickou důležitost, ale také veliký praktický význam, zejména pro stenografii. Umožňuje zdůvodnit správnou techniku psaní, stupeň výhodnosti různých znaků nebo zkratek při rychlém psaní atd. Zatím co klasická stenografická teorie uvažovala např., že znak č. 15 vznikl tak, že úsečku opatříme nahoře kličkou a dole obloučkem (odvozenými z elipsy, případně kružnice), ukazuje matematický rozbor, že takový tvar v rychlopise neexistuje a že znak č. 15 vzniká z odvozené křivky typu 1^+D, tj. vzniká složením pohybu po kladně orientované elipse s rovnoměrným pohybem po přímce. Ukazuje, že např. znak č. 23 není grafomotoricky příbuzný s prvním znakem č. 14, jak se soudilo, nýbrž že oba znaky mají dokonce různý charakter, a vysvětluje současně, proč při rigorosním psaní znaku č. 23 probíhá pohyb pomaleji a proč tedy při rychlém psaní, které má snahu provádět všechny vertikální kmity přibližně stejně rychle (tedy psát po křivkách charakteru 1), dochází k deformaci znaku č. 23 ve znaky sinusoidální nebo cykloidální (tedy k redukci obloučků, ke změně sklonu apod.). Význam teorie ještě vzrůstá, když přejdeme k studiu spojování znaků.

(Dokončení.)