Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

V. A. Fok

Homogennost, kovariantnost a relativnost v theorii prostoru a času

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 2, 197--201

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137098

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

promyšlení a znalost matematických prostředků, a že byla vypracována na západě, kde je silný sklon k idealistickým interpretacím. Filosofové pak často nechápou — ani při nejlepší snaze — fysikální obsah theorie relativity, což zase vede k odsuzování theorie, která představuje jeden z největších úspěchů bádání člověka.

Zkráceně přeložil Josef Veselka

Akademik V. A. FOK

HOMOGENNOST, KOVARIANTNOST A RELATIVNOST V THEORII PROSTORU A ČASU

Понятия однородности, ковариантности и относительности в теории пространства и времени. *Voprosy filosofii*, 1955, č. 4, str. 131—135.

S geometrického hlediska je přirozené dělit theorii prostoru a času na theorii homogenního (galileovského) prostoru a času a na theorii nehomogenního (riemanovského a einsteinovského) prostoru a času. Pro stručnost budeme někdy říkat místo »prostor a čas« prostě »prostor«.

Galileovský prostor je maximálně homogenní, což je dáno těmito jeho vlastnostmi:

a) všechny body a časové okamžiky galileovského prostoru jsou ekvivalentní,
b) všechny směry v galileovském prostoru jsou ekvivalentní,
c) všechny inerciální soustavy, pohybující se vzájemně přímočaře a rovnoměrně, jsou ekvivalentní (Galileův princip relativity).

Homogennost prostoru a času je dána existencí grupy transformací, které zachovávají čtyřrozměrnou vzdálenost dvou bodů (interval). Výraz pro interval má v theorii prostoru a času velkou úlohu, neboť je přímo spjat s formami, jimiž se vyjadřují základní fysikální zákony, zejména pohybový zákon volného hmotného bodu a zákon šíření čela vlny ve volném prostoru. Výše uvedené charakteristiky homogenního galileovského prostoru a), b), c) jsou spjaty s těmito transformacemi:

1. ekvivalence všech bodů a časových okamžiků odpovídá posunutí počátku souřadnic a počátečního časového okamžiku. Tato transformace obsahuje čtyři parametry (tři souřadnice počátku souřadnic a počáteční okamžik);
2. ekvivalence všech směrů odpovídá otočení souřadnicových os. Tato transformace obsahuje tři parametry (tři úhly);
3. ekvivalence všech inerciálních soustav odpovídá přechodu od dané vztažné soustavy k jiné, která se vzhledem k dané soustavě pohybuje rovnoměrně a přímočaře. Tato transformace obsahuje tři parametry (tři složky relativní rychlosti).

Nejobecnější transformace obsahuje deset parametrů. Je to Lorentzova transformace.

Je známo, že grupa transformací v n-rozměrném prostoru, která zachovává výraz pro čtverec vzdálenosti dvou »nekonečně blízkých« bodů, může obsahovat nejvýše $^1/_2 n\ (n + 1)$ parametrů. Existuje-li grupa transformací, která obsahuje právě tento počet parametrů, nazývá se prostor maximálně homogenním. Takový prostor má konstantní křivost. Je-li tato křivost rovna nule, je prostor euklidovský (nebo pseudoeuklidovský).

V našem případě je $n = 4$, tedy 10 parametrů je právě maximální možný počet parametrů. Galileovský prostor, k němuž se vztahuje Lorentzova transformace, je tedy — jak již bylo řečeno — maximálně homogenní.

Theorie galileovského prostoru, založená na Lorentzových transformacích, se nazývá speciální theorií relativity. Přesněji řečeno, obsahem této theorie je formulace fysikálních zákonů s ohledem na vlastnosti galileovského prostoru. Zakladatelem této theorie je Albert Einstein (1879—1955).

Obecnou gravitaci nelze vměstnat do rámce homogenního galileovského prostoru. Einstein ukázal, proč to nelze učinit: nejen setrvačná, ale i tíhová massa tělesa závisí na jeho energii.

Theorii obecné gravitace lze vybudovat, vzdáme-li se homogennosti »prostoru v celku« a uvažujeme-li prostor homogenní jen v nekonečně malém okolí zkoumaného bodu. Termíny »prostor v celku«, »podmínky v nekonečnu«, »nekonečně malý« ap. používáme v matematickém smyslu, jak se jich používá v theorii pole, nikoli ve smyslu doslovném. Matematicky se redukce na okolí zkoumaného bodu vyjadřuje přechodem od euklidovské (přesněji pseudoeuklidovské) geometrie ke geometrii Riemannově. Dnešní obecnou gravitační theorii vypracoval rovněž Albert Einstein.

Pojem »prostor v celku« je pro nás oblast dostatečně velká, aby pole uvažované soustavy bylo na jejích hranicích zanedbatelné. K hranicím této oblasti se také vztahují »podmínky v nekonečnu«. Rozměry této oblasti mohou být ve skutečnosti velmi různé. To závisí na dané úloze. Pro atom nebo molekulu lze pokládat za nekonečně velkou vzdálenost řádově mikron, pro naši sluneční soustavu vzdálenost jednoho světelného roku, pro Galaxii vzdálenost stamilionů světelných let. Nikdy neznamená pojem »prostor v celku« celý vesmír. Zavádět do úvah pojem »celého vesmíru« pokládám za noeticky nepřípustné.

Skutečnost, že lokálně (v infinitesimálním okolí) lze prostor brát podle obecné gravitační theorie za homogenní, analogicky homogennosti, jíž vyjadřují Lorentzovy transformace, je spjata s možností v malém okolí bodu a v malém okolí časového okamžiku nahradit tíhové pole polem zrychlení (princip ekvivalence). Fysikálně je to zdůvodněno platností Galileova zákona, podle něhož všechna tělesa padají, není-li odporujícího prostředí, stejně rychle (přesněji s týmž zrychlením). Obecněji lze Galileův zákon formulovat jako rovnost setrvačné a tíhové massy. Je třeba zdůraznit, že tento fundamentální zákon má zcela obecný charakter, ač princip ekvivalence má jen přísně lokální platnost; nelokálně aplikován stává se nepřesným a platným jen pro slabá pole a jen pro malé pohybové rychlosti.

Při studiu prostoru a času se však nelze omezit jen na lokální úvahy (to jest na nekonečně malé oblasti prostoru a na nekonečně malé časové intervaly). Je nutno nějak charakterisovat prostor v celku. V opačném případě nelze úlohu formulovat jednoznačně. To je patrné zvlášť jasně z faktu, že rovnice pole (i gravitačního pole) jsou parciálními diferenciálními rovnicemi, které dávají jednoznačné řešení jen za daných počátečních a okrajových podmínek. Rovnice pole a okrajové podmínky jsou neoddělitelně spolu spjaty. Okrajové podmínky nejsou nijak méně důležité než rovnice samy. Avšak v úlohách, vztahujících se k celému prostoru, se okrajové podmínky vztahují k vzdáleným jeho oblastem, a k jejich formulaci je nezbytné znát vlastnosti prostoru v celku.

Poznamenejme, že Einstein nedocenil náležitě nedostatečnost jen lokálních úvah a důležitost okrajových podmínek.

Nejjednodušší a zároveň nejdůležitější je případ, kdy lze předpokládat prostor homogenní (ve smyslu Lorentzových transformací) v nekonečnu. V tomto případě budou mít nehomogennosti, podmíněné přítomností mass, lokální charakter. Massy s jejich tíhovými poli budou jakoby vnořeny do galileovského prostoru. Tento případ je proto tak důležitý, že existence pohybových integrálů je spjata s homogenností prostoru v nekonečnu. Pouze tehdy, připouští-li prostor Lorentzovy transformace (o 10 parametrech) v nekonečnu, existuje všech 10 pohybových integrálů včetně integrálů energie.

Je také možno předpokládat, že prostor v celku není úplně, nýbrž jen částečně homogenní. Jako dříve je přípustný libovolný posuv počátku souřadnic a libovolné otočení souřadnicových os, což dává šest parametrů. Ostatní čtyři parametry Lorentzovy transformace, to jest tři složky rychlosti a počáteční časový okamžik jsou určeny prvými šesti parametry. Takový prostor zkoumal po prvé Fridman. Poněvadž prostorová část tohoto prostoročasu má Lobačevského geometrii, je možno tento prostoročas nazývat prostorem Fridmanovým-Lobačevského. Na rozdíl od galileovského prostoru připouští tento prostor existenci určitého tíhového pole při střední hustotě hmoty, různé od nuly. Je proto možno předpokládat, že v kosmologii, v úvahách týkajících se obrovských oblastí rozměrově stamilionů světelných roků, přibližně rovnoměrně zaplněných galaxiemi, aproximuje prostor Fridmanův-Lobačevského skutečnost lépe než prostor galileovský. Avšak theorie lokálních nehomogenností v prostoru Fridmanově-Lobačevského není ještě dostatečně propracována.

V závislosti na vlastnostech prostoru v celku se také řeší otázka existence privilegované soustavy souřadnic.

V galileovském prostoru jsou privilegovanými obyčejné kartézské souřadnice a čas. Souhrn těchto proměnných se nazývá galileovské souřadnice. Jejich privilegovanost je založena na tom, že Lorentzovy transformace, které vyjadřují homogennost prostoru, jsou v těchto proměnných lineární. Také v prostoru homogenním jen v nekonečnu je možno zavést privilegovanou soustavu souřadnic, určenou až na Lorentzovu transformaci (harmonické souřadnice). Tato skutečnost, zjištěna po prvé v našich pracích, má velký význam. Teprve její pomocí lze prokázat, že privilegovanost Kopernikovy heliocentrické soustavy před soustavou Ptolemaiovou se zachovává i v Einsteinově gravitační theorii. Privilegovanost harmonických souřadnic se projevuje hlavně v tom, že harmonické souřadnice vedou k jednoznačným řešením, a to jak v konkretních úlohách, tak v zásadních otázkách.

Privilegované souřadnicové soustavy existují pravděpodobně i v prostoru Fridmanově-Lobačevského. Otázka však nebyla dosud zkoumána, neboť není dosud vypracována theorie lokálních nehomogenností v takovém prostoru.

Tvůrce gravitační theorie Albert Einstein popíral existenci privilegovaných soustav. To je spjato s jeho již zmíněným přeceňováním lokálních úvah, které jsou jádrem Riemannovy geometrie, a nedoceněním důležitosti studia prostoru v celku. Bezpochyby tu měla jistou úlohu Einsteinova filosofická koncepce, vycházející z E. Macha.

Otázka různých souřadnicových soustav a změny tvarů rovnic při přechodu od jedné souřadnicové soustavy k jiné má v theorii prostoru a času důležité místo.

Zvlášť velký význam se přikládá kovariantnosti rovnic. Kovariantností se rozumí toto: Uvažujme transformaci souřadnic, při níž se závisle proměnné (funkce) transformují zcela určitým způsobem (na příklad jako tensory), a zkoumejme tvary rovnic před a po transformaci. Jsou-li nové rovnice s transformovanými proměnnými téhož tvaru, jako rovnice původní s původními proměnnými, nazýváme je kovariantními. Kovariantnost rovnic umožňuje zapisovat je bez explicitního vyznačení souřadnicové soustavy. Požadavek, aby rovnice byly kovariantními, má kromě toho velký význam heuristický, neboť omezuje rozmanitost tvarů rovnic a pomáhá tak zvolit správné tvary. Je však třeba zdůraznit, že toto omezení je možné jen za předpokladu, že se omezí také počet zaváděných funkcí. Připustí-li se totiž libovolně mnoho proměnných funkcí, je možno prakticky jakékoli rovnici dát kovariantní tvar.

Kovariantnost rovnic sama není tedy nijak výrazem nějakého fysikálního zákona. Tak na příklad v mechanice soustavy hmotných bodů jsou Lagrangeovy rovnice 2. druhu kovariantními vzhledem k libovolným transformacím souřadnic, ač nevyjadřují žádný nový fysikální zákon ve srovnání na příklad s Lagrangeovými rovnicemi 1. druhu, které se uvádějí v pravoúhlých souřadnicích a kovariantní nejsou. Kovariantnosti Lagrangeových rovnic 2. druhu se dosahuje zavedením pomocných funkcí.

V Riemannově geometrii jsou novými pomocnými funkcemi koeficienty $g_{\lambda\mu}$ ve výrazu pro čtverec vzdálenosti dvou nekonečně blízkých bodů. Tyto pomocné funkce umožňují konstruovat výrazy, které jsou kovariantní vzhledem k libovolné transformaci souřadnic. Samo o sobě to není nic nového, avšak požadavek, aby kovariantní výrazy neobsahovaly jiných funkcí než $g_{\lambda\mu}$, je tak silně omezující, že vede takřka jednoznačně k rovnicím gravitačního pole, které našel A. Einstein.

Srovnejme kovariantnost v Riemannově geometrii s výše uvedeným pojmem homogennosti prostoru. Jak jsme již ukázali, je homogennost galileovského prostoru dána existencí transformací, které zachovávají výraz pro čtyřrozměrnou vzdálenost dvou bodů. Podrobněji lze říci, že se při těchto transformacích zachovávají koeficienty tohoto výrazu, to jest veličiny $g_{\lambda\mu}$. V obecném případě však, v Riemannově geometrii takových transformací není, neboli riemannovský prostor není homogenní. V Riemannově geometrii jde o transformace souřadnic, jež mají za následek transformace veličin $g_{\lambda\mu}$, *a takové transformace, ani kovariantnost vzhledem k nim nemá žádného vztahu k homogennosti nebo nehomogennosti prostoru.*

Nyní můžeme vysvětlit nedorozumění, která jsou spojena s interpretací slova »relativnost«, a jež tak zakořenila v literatuře.

V prvních pracích o theorii relativity souvisel pojem relativnosti s pojmem homogennosti prostoru. Theorií relativity se nazývala theorie galileovského prostoru, jehož homogennost je charakterisována Lorentzovými transformacemi. Název je do jisté míry oprávněný vzhledem k tomu, že velkou úlohu má v této theorii Galileův princip relativity.

S vypracováním Einsteinovy gravitační theorie se však začal používat termín »obecná relativnost«, který vnesl do věci zmatek. Tento termín se začal používat ve smyslu »obecná kovariantnost« (to jest ve smyslu kovariantnost rovnic vzhledem k transformacím souřadnic, provázených transformacemi veličin $g_{\lambda\mu}$). Viděli jsme však, že taková kovariantnost nemá nic společného s homogenností prostoru, což dále znamená, že »obecná relativnost« nemá nic společného s »relativností vůbec«. Tato se pak začala nazývat »speciální«, což jakoby mělo znamenat, že je zvláštním případem »obecné relativnosti«.

Pro ilustraci uveďme několik příkladů. Jak známo může být theorie homogenního galileovského prostoru podána nejen ve tvaru kovariantním vzhledem k Lorentzovým transformacím, ale ve tvaru kovariantním obecně. V řeči »obecné« a »speciální« theorie relativity se tato krajně jednoduchá myšlenka dá vyslovit jen s velkými obtížemi. Nebudeme to zde provádět.

Vzpomeneme-li, že již v newtonovské mechanisace máme co činit s obecně kovariantními Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu, musíme i zde hovořit o tom, že newtonovská mechanika obsahuje »obecnou relativnost«. Termín »obecná relativnost«, nebo »obecný princip relativity« je používán (především samým Einsteinem) také ve smyslu gravitační theorie. Již základní Einsteinova práce o gravitační theorii (1916) má název »Základy obecné theorie relativity«. To činí zmatek ještě větší. V gravitační theorii se předpokládá prostor nehomogenní, relativnost je však spjata s homogenností prostoru. Dostáváme se tedy k závěru, že v obecné theorii relativity žádné relativnosti není. I tehdy, bereme-li v gravitační theorii prostor homogenní v nekonečně malém, znamená gravitační theorie omezení pojmu relativnosti, a nikoli jeho zobecnění, neboť obecná theorie relativity nepracuje s galileovským prostorem, homogenním nejen v nekonečně malém, nýbrž v celku.

Z řečeného je jasné, že termíny »obecná relativnost«, »obecná theorie relativity«, »obecný princip relativity« jsou nepřípustné. Nevedou jen k nedorozuměním, ale odráží přímo nesprávné chápání theorie samé. Ač to zní paradoxně, takto nesprávně chápal theorii sám její autor A. Einstein, který neviděl, že nová theorie, kterou vypracovával, nezobecňuje pojem relativnosti, nýbrž j i n é pojmy, a to pojmy geometrické.

Skutečnost, že hluboká, elegantní a přesvědčivá theorie gravitace nebyla správně pochopena svým tvůrcem, nás nemusí mnoho překvapovat. V dějinách fysiky je dost příkladů, kdy skutečný smysl zásadně nové theorie nepoznal její autor, nýbrž někdo jiný. Stačí poukázat na Maxwella. Maxwellova theorie skoncovala s mechanikou jako základem fysiky, Maxwell sám však se držel po výtce mechanistických představ. Teprve Lorentz ukázal jasně smysl Maxwellových rovnic, ukázal, že elektromagnetické pole je samo o sobě fysikální realita (to jest, že je hmotné), že může existovat ve volném prostoru bez nositele. Je zajímavé, že týž příklad pro totéž nepochopení uvádí sám Einstein v jedné ze svých posledních prací.

Analogický osud mají gravitační rovnice Einsteinovy. Gravitační theorie, na nich založená, je bezesporně jedním z největších úspěchů lidského genia. Bude-li očištěna ode všech cizích prvků a termínů, vynikne její skutečný smysl a duch jistě výrazněji než dosud.

Zkráceně přeložil Josef Veselka