Mathematica Slovaca

Anatolii Alekseevich Karatsuba

Нули арифметических рядов Дирихле

Mathematica Slovaca, Vol. 44 (1994), No. 5, 633--649

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136634

Mathematica Slovaca
©1994
Mathematical Institute
Slovak Academy of Sciences

Math. Slovaca, **44** (1994), No. 5, 633–649

НУЛИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ КАРАЦУБА

(Communicated by Stanislav Jakubec)

ABSTRACT. This is an expository paper on the zeros of the arithmetical Dirichlet series. Author's main result: At least $T(\log T)^{0.5-\varepsilon}$ zeros of the Davenport-Heilbronn function lie on the segment $(0,T]$ of the critical line.

§1. *Ряд Дирихле* – выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} = f_1(s)\,, \tag{1}$$

где $a(n)$ – комплексные числа (коэффициенты ряда), $s=\sigma+\mathrm{i}t$, $\mathrm{i}^2=-1$, σ и t – вещественные числа. Если $a(n)$ – арифметическая функция n, то $f_1(s)$ назовем *арифметическим рядом Дирихле* (коротко ASD)

§2. Примеры арифметических рядов Дирихле.

Наиболее известным ASD является $\zeta(s)$ – *дзета-функция Римана.* В этом случае $a(n)=1$, $n=1,2,3,\dots$,

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\,, \qquad \operatorname{Re} s>1\,.$$

Функция $\zeta(s)$ продолжается на всю s – плоскость с помощью тождества

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\Big(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s+1}{2}}\Big)\omega(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2}$$

AMS Subject Classification (1991): Primary 11M41, 11M26.

Key words: Arithmetical Dirichlet series, Davenport-Heilbronn function, Euler product, Functional equation, Zeros on the critical line.

где $\Gamma(s)$ – *гамма-функция Эйлера*,

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x n^2} .$$

С помощью функции $\zeta(s)$ получаются другие ASD; например,

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_k(n) n^{-s} , \qquad \mathrm{Re}\, s > 1 ;$$

$$\zeta^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} , \qquad \mathrm{Re}\, s > 1 ;$$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n^2) n^{-s} , \qquad \mathrm{Re}\, s > 1 ;$$

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^2(n) n^{-s} , \qquad \mathrm{Re}\, s > 1 ;$$

$$\zeta(s)\zeta(s-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) n^{-s} , \qquad \mathrm{Re}\, s > \max(1, a+1) .$$

В выписанных формулах коэффициенты ASD – известные арифметические функции: $\tau_k(n)$ – *число решений уравнения* $n = x_1 \ldots x_k$ в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$, в частности, $\tau_2(n) = \tau(n)$ – число делителей числа n; $\mu(n)$ – *функция Мёбиуса*, $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа, $\mu(n) = (-1)^r$, если $n = p_1 \ldots p_r$, где $p_1 < \cdots < p_r$ – простые числа; $\sigma_a(n)$ – *сумма a-х степеней делителей числа* n, т.е.

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a .$$

Обобщением $\zeta(s)$ является *дзета-функция Гурвица* $\zeta(s;\alpha)$,

$$\zeta(s;\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)^{-s} , \qquad 0 < \alpha \le 1 , \quad \mathrm{Re}\, s > 1 .$$

Очевидно, что $\zeta(s;1) = \zeta(s)$. С помощью формулы суммирования

Эйлера $\zeta(s;\alpha)$ продолжается в полуплоскость $\mathrm{Re}\, s > -1$;

$$\zeta(s;\alpha) = \sum_{n=0}^{N}(n+\alpha)^{-s} + \frac{1}{s-1}\Big(N+\alpha+\frac{1}{2}\Big)^{1-s} - \frac{s}{8}\Big(N+\alpha+\frac{1}{2}\Big)^{-1-s}$$

$$+\, s(s+1) \int\limits_{N+\frac{1}{2}}^{\infty} \sigma(u)(u+\alpha)^{-s-2}\, \mathrm{d}u\,,$$

$$\sigma(u) = \int\limits_{0}^{u} \Big(\frac{1}{2} - \{x\}\Big)\, \mathrm{d}x\,,$$

$N \geq 1$ – произвольное целое число. Кроме того, при $\mathrm{Re}\, s < 0$ справедлива следующая формула, продолжающая $\zeta(s;\alpha)$ на всю s – плоскость:

$$\zeta(s;\alpha) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\bigg(\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n\alpha}{n^{1-s}} + \cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n\alpha}{n^{1-s}}\bigg).$$

Другими примерами ASD являются *L-функции Дирихле*,

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}\,, \tag{3}$$

где $\chi(n)$ – *характер Дирихле.*

Еще один пример ASD – *дзета-функции Эпштейна* $\zeta(s,Q)$,

$$\zeta(s,Q) = \sum_{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{n}}_{m^2+n^2\neq 0}\big(Q(m,n)\big)^{-s}\,, \tag{4}$$

где

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2\,, \qquad D = b^2 - 4ac < 0\,,$$

т.е. $Q(x,y)$ – положительно определенная бинарная квадратичная форма.

§3. Ряд проблем теории чисел тесно связан с некоторыми свойствами ASD. Так, например, проблемы распределения простых чисел в натуральном ряде и арифметических прогрессиях связаны с проблемами распределения нулей $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$. Проблемы асимптотического поведения сумматорных функций коэффициентов $a(n)$ рядов Дирихле, т.е. сумм $A(X)$,

$$A(X) = \sum_{n\leq X} a(n)\,, \qquad X \to +\infty\,,$$

тесно связаны с проблемами асимптотического поведения

$$|f_1(s)| = |f_1(\sigma + \mathrm{i}\, t)|, \qquad |t| \to +\infty .$$

Существует также связь между расположением нулей $f_1(s)$ и поведением $\max\limits_{t \le T} |f_1(\sigma + \mathrm{i}\, t)|$. Создана целая наука, посвященная этой тематике, которая сейчас называется теорией дзета-функции Римана (в честь Б. Римана, который первым стал в самой общей форме изучать связи $\zeta(s)$ с теорией простых чисел).

§4. Центральной проблемой этой теории является *гипотеза Римана* RH *– все комплексные нули* $\zeta(s)$ *лежат на прямой* $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ (*критическая прямая*). RH к настоящему времени не доказана. Есть и более смелые гипотезы: RH справедлива для всех $L(s, \chi)$ и подобных им ASD.

Из RH следует много очень точных арифметических утверждений, которые хорошо известны и на которых я не буду здесь останавливаться. Замечу только, что из некоторых чисто арифметических утверждений, следует RH.

§5. Чем же характеризуются ASD, кроме их общего задания равенством (1), и что заставляет надеяться на справедливость RH?

Прежде всего все ASD представляются в виде отношения целой функции конечного порядка и многочлена и удовлетворяют функциональному уравнению (иногда говорят Риманова типа); эти условия коротко будем обозначать символом FE. Например, из (2) видно, что $s(s-1)\zeta(s)$ – целая функция первого порядка, и, кроме того, справедливо тождество:

$$\xi(s) = \xi(1 - s), \tag{5}$$

где

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) \zeta(s).$$

Тождество (5) и является функциональным уравнением $\zeta(s)$.

Аналогично, для определенного класса $\zeta(s, Q)$ имеет место функциональное уравнение вида

$$\xi(s, Q) = \xi(1 - s, Q), \tag{6}$$

где

$$\xi(s, Q) = \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\pi} \right)^{s} \Gamma(s) \zeta(s, Q).$$

Замечу, что FE для ASD является очень жестоким условием. Например, имеет место следующая теорема (Г а м б у р г е р [1]):

Пусть $G(s)$ *– целая функция конечного порядка,* $P(s)$ *– многочлен,* $f_2(s) = \dfrac{G(s)}{P(s)}$, *ряд вида*

$$f_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s},$$

сходится при $\operatorname{Re} s > 1$ *и выполняется функциональное уравнение*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) f_2(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big) f_3(1-s), \tag{7}$$

где ряд

$$f_3(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-1+s},$$

сходится при $\operatorname{Re} s < -\alpha < 0$*; тогда*

$$f_2(s) = c\zeta(s), \qquad c \text{ константа.}$$

Легко видеть, что (7) даже слабее, чем (5). Однако FE еще не определяет местоположение нулей ASD. Есть такие ASD, которые имеют FE, но нули этих ASD лежат не только на критической прямой. Например, такими ASD являются некоторые $\zeta(s, Q)$, в частности, при $Q(x,y) = x^2 + 5y^2$. Другим примером подобных ASD является функция $f(s)$,

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r(n) n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1, \tag{8}$$

где $r(n) = r(n+5)$, $r(1) = 1$, $r(2) = \varkappa$, $r(3) = -\varkappa$, $r(4) = -1$, $r(5) = 0$, $\varkappa = \dfrac{\left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2\right)}{\left(\sqrt{5} - 1\right)}$. Эта функция введена в 1936 г. Дэвенпортом и Хейльбронном [2]. Она удовлетворяет FE:

$$g(s) = g(1-s), \qquad g(s) = \Big(\frac{\pi}{5}\Big)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\Big(\frac{s+1}{2}\Big) f(s). \tag{9}$$

Как $\zeta(s, Q)$, $Q(x,y) = x^2 + 5y^2$, так и $f(s)$, имеют нули в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$, т.е. для них RH не имеет места.

§6. Что же отличает $\zeta(s)$ от $f(s)$ или от $\zeta(s,Q)$? По-видимому, это отличие и заставляет быть справедливой RH. Основным отличием $\zeta(s)$ от общих ASD является наличие у $\zeta(s)$ *тождества Эйлера* или, как иногда говорят, *Эйлерова произведения* (коротко – EP):

$$\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}\,, \qquad \operatorname{Re}s>1\,. \tag{10}$$

Ни $f(s)$, ни $\zeta(s,Q)$ (исключая очевидные случаи), не имеют тождества вида (10).

По-видимому, тождество Эйлера и «заставляет» нули $\zeta(s)$ с $\operatorname{Im}s\neq 0$ «попадать» на прямую $\operatorname{Re}s=\dfrac{1}{2}$. По крайней мере все наиболее яркие результаты, связанные с нулями $\zeta(s)$, $L(s,\chi)$, так или иначе используют тождество Эйлера. Достаточно напомнить теоремы А. Сельберга о нулях $\zeta(s)$ на критической прямой, плотностные теоремы Ингама-Титчмарша-Монтгомери-Хаксли-Ютилы, теоремы большого решета Бомбьери-Виноградова, теоремы А. Сельберга о нулях $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой, и др.

§7. В последние годы (приблизительно в последние десять-пятнадцать лет) вновь пробудился интерес к нулям ASD, не имеющих EP. Появился ряд новых результатов, как теоретического характера (доказанные теоремы), так и вычислительного характера (связанных с большими вычислениями на современных ЭВМ). Возникли новые гипотезы. Все эти исследования, все размышления в этом направлении могут прояснить механизм влияния EP на нули ASD, т.е. могут помочь продвинуться в направлении доказательства RH.

Чтобы удобно было формулировать результаты о нулях ASD, введем, ставшие стандартными в этой тематике, функции $N(T)$, $N_0(T)$, $N(\sigma,T)$, $N_0(\sigma,T)$:

$$N(T)=\#\{\varrho:\ f_1(\varrho)=0,\ \operatorname{Re}\varrho\geq 0,\ 0<\operatorname{Im}\varrho\leq T\};$$

$$N_0(T)=\#\{\varrho:\ f_1(\varrho)=0,\ \operatorname{Re}\varrho=\frac{1}{2},\ 0<\operatorname{Im}\varrho\leq T\};$$

$$N(\sigma,T)=\#\{\varrho:\ f_1(\varrho)=0,\ \operatorname{Re}\varrho>\sigma,\ 0<\operatorname{Im}\varrho\leq T\};$$

$$N_0(\sigma,T)=\#\{\varrho:\ f_1(\varrho)=0,\ \operatorname{Re}\varrho=\sigma,\ 0<\operatorname{Im}\varrho\leq T\}.$$

Везде ниже предполагаем, что $T\geq T_0>10$.

Наличие FE Риманова типа у ASD позволяет доказать утверждение подобное известной теореме Римана-Мангольдта:

$$N(T)\sim cT\log T\,, \tag{11}$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная (для $\zeta(s)$ $c = \dfrac{1}{2\pi}$). Множитель $\log T$ в (11) появляется из-за гамма-множителя в FE. Кроме того, FE для $f_1(s)$ показывает, что нули $f_1(s)$ расположены симметрично относительно прямой $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$, которую из-за этого (а также, из-за RH) называют критической.

Замечу, что если $f_1(s) = \zeta(s)$, то RH утверждает, что $N_0(T) = N(T)$.

В 1936 г. Г. Дэвенпорт и Г. Хейльбронн [2] доказали, что если $f_1(s) = \zeta(s,Q)$, $Q(x,y) = x^2 + 5y^2$, или $f_1(s) = f(s)$, то $N(1,T) > cT$, $c > 0$ – постоянная.

С помощью рассуждений Харди – Литтлвуда легко доказать для этих же функций, что

$$N_0(T) > c_1 T, \qquad c_1 > 0 \text{ – постоянная.}$$

В 1976 г. С. М. Воронин [3], [4] доказал для указанных функций соотношения:

$$N(\sigma_2,T) - N(\sigma_1,T) \sim c(\sigma_1,\sigma_2)T, \tag{12}$$

где

$$\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1, \qquad c(\sigma_1,\sigma_2) > 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что при $\sigma > \dfrac{1}{2}$

$$N_0(\sigma,T) = O(T). \tag{13}$$

Таким образом, нули $f_1(s)$ с FE, но без EP, «размазаны» по некоторой полосе вида $|\operatorname{Re} s| \le \alpha$, куда попадает критическая полоса $|\operatorname{Re} s| \le 1$. Для функций $\zeta(s)$, $L(s,\chi)$, этого эффекта, точнее, соотношения (12), нет. Например, для $\zeta(s)$ справедлива оценка Ингана [5]:

$$N(\sigma,T) \le cT^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \log^{14} T, \qquad c > 0 \text{ – постоянная.}$$

При $\sigma > \dfrac{1}{2}$ легко получаем:

$$\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma} = 3 - \frac{3}{2-\sigma} < 1,$$

т.е. при $\sigma > \dfrac{1}{2}$ выполняется неравенство:

$$N(\sigma,T) < T^{\delta}, \qquad \delta < 1, \;\; T \ge T_1(\delta) > 0.$$

Последнее неравенство и соотношение (12) особенно ярко подчеркивает отличие ASD с EP и без EP.

§8. В 1980 г. С. М. Воронин [6] доказал теорему о том, что критическая прямая является особым множеством для нулей $f(s)$, на ней находится аномально много нулей $f(s)$. Сначала им было доказано, что

$$\frac{N_0(T)}{T} \to +\infty \qquad \text{при} \quad T \to +\infty\,,$$

а затем – более точное утверждение [6]:

$$N_0(T) \geq T \exp\Bigl(\frac{1}{20}\sqrt{\log\log\log\log T}\,\Bigr)\,, \qquad T \geq T_1\,. \tag{14}$$

Неравенства (13) и (14) как раз и показывают, что критическая прямая является особым множеством для нулей $f(s)$.

§9. В 1986 г. Д. Хейчал [7] опубликовал свои исследования, связанные с нулями $\zeta(s,Q)$.

Им проведены большие вычисления нулей $\zeta(s,Q)$ и, вместе с Э. Бомбьери, высказаны гипотезы об их расположении. В частности, высказана и условно доказана (в предположении справедливости расширенной RH и некоторых других гипотез) теорема о том, что для нулей некоторых $\zeta(s,Q)$ выполхяется следующее соотношение:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{N_0(T)}{N(T)} = 1\,,$$

другими словами, почти все нули $\zeta(s,Q)$ лежат на критической прямой (см. [8]). В [7] сделано также замечание, что «Сельбергу был известен результат, аналогичный (14), когда он писал [9]».

§10. В 1989 г. Бомбьери сообщил автору, что А. Сельбергом для $f(s)$ доказано соотношение:

$$N(T) - N_0(T) > cT\sqrt{\log\log T}\,,$$

где $c > 0$ – постоянная. Последнее неравенство показывает, что для $f(s)$ вне критической прямой в полосе $0 < \operatorname{Im} s \leq T$ лежит существенно больше, чем $O(T)$ нулей.

Ряд интересных результатов и гипотез относительно нулей определенного класса рядов Дирихле содержится в недавно опубликованной статье А. Сельберга [27].

§11. В 1990 г. автор опубликовал метод, позволяющий получать несравненно более точные результаты о нулях $f(s)$, $\zeta(s,Q)$, лежащих на критической прямой, чем (14). Усовершенствованный вариант этого метода позволил доказать для нулей $f(s)$ неравенство вида:

$$N_0(T) > T\sqrt{\log T}\exp\Big(-c\sqrt{\log\log T}\,\Big), \tag{15}$$

где $c > 0$ – постоянная (см. [10], [11]). Подобного вида неравенства могут быть доказаны и для более общих функций, чем $f(s)$, а также для $\zeta(s,Q)$ и др. В частности, если $\zeta(s;\alpha)$ – функция Гурвица, $\alpha = \dfrac{a}{q}$, $q > 2$, $(a,q) = 1$,

$$h(s) = h(s;\alpha) = \beta\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s;\alpha) + \bar{\beta}\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s;\alpha),$$

где β – произвольное комплексное число, то для нулей $h(s)$ выполняется неравенство вида:

$$N_0(T) > T(\log T)^{\gamma}\exp\Big(-c\sqrt{\log\log T}\,\Big), \tag{16}$$

где $\gamma\varphi(q) = 1$, $c > 0$ – постоянная, $T \geq T_1 > 10$.

§12. Что дало возможность получить для $N_0(T)$ оценку лучшую, чем $N_0(T) > cT$?

Здесь следует коротко напомнить историю получения нижних оценок $N_0(T)$ для $\zeta(s)$, т.к. развитие именно этих исследований привело к прогрессу в исследовании нулей ASD.

В 1914 г. Г. Харди [12] доказал, что на критической прямой лежит бесконечно много нулей $\zeta(s)$. До этого времени были известны, в частности, Б. Риману, лишь несколько первых комплексных нулей $\zeta(s)$.

В 1920 г. Г. Харди и Д. Литтлвуд [13] доказали много больше, именно, что

$$N_0(T) > cT, \qquad c > 0. \tag{17}$$

Метод доказательства последнего неравенства годился для общих ASD и приводил к такой же оценке. В 1932 г. К. Зигель [14] предложил свой подход к доказательству теоремы Харди-Литтлвуда об оценке $N_0(T)$, который был затем несколько уточнен Р. О. Кузьминым

[15]. У К. Зигеля в неравенстве (17) $c = \dfrac{3}{8\pi}\,\mathrm{e}^{-1.5}$, у Р. О. Кузьмина – $c = \dfrac{3}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-1.5}$.

В 1942 г. А. Сельберг [9] разработал новый метод в этой проблематике и доказал свое знаменитое неравенство:

$$N_0(T) > cN(T), \qquad c > 0. \tag{18}$$

При доказательстве (18) А. Сельберг существенно пользовался тем, что $\zeta(s)$ имеет EP. Несколько ниже я более подробно остановлюсь на этом. В 1976 г. Н. Левинсон [16] объединил идеи К. Зигеля и А. Сельберга и получил в (18) $c = \dfrac{1}{3}$.

Теорема Н. Левинсона формулируется так: по крайней мере треть всех комплексных нулей $\zeta(s)$ лежит на критической прямой.

Отмечу, что наряду с нижнимы оценками $N_0(T)$ в этой проблематике решались и другие важные задачи, в частности, задачи, связанные с количеством нулей $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой и с верхней оценкой расстояния между соседними нулями $\zeta(s)$ на критической прямой. Здесь выдающиеся результаты были получены Я. Мозером, который существенно улучшил соответствующие результаты Харди – Литтлвуда, стоявшие без изменений в течение более полувека (см. [17] – [24], а также [25]).

Как же решаются задачи, связанные с нулями, скажем, $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой? Остановлюсь на идейной стороне разработанных здесь методов.

§13. Метод Г. Харди-Д. Литтлвуда-Э. Ландау.

Рассмотрим функцию Римана $Z(t)$,

$$Z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(t)}\,\zeta\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,t\Big),$$

где

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(t)} = \pi^{-\mathrm{i}\,t}\,\frac{\Gamma\Big(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\mathrm{i}\,t}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{1}{4} - \dfrac{\mathrm{i}\,t}{2}\Big)}.$$

Из FE следует, что $Z(t)$ принимает вещественные значения при вещественных значениях t, а вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой.

Основная идея Харди-Литтлвуда-Ландау состоит в следующем: если при $h > 0$ выполняется неравенство

$$J_1(t) = \int\limits_t^{t+h} |Z(u)|\ \mathrm{d}u > \left| \int\limits_t^{t+h} Z(u)\ \mathrm{d}u \right| = J_2(t), \tag{19}$$

то на интервале $(t, t+h)$ лежит нуль $Z(u)$.

Так «улавливается» нуль $Z(u)$. Чтобы оценить количество нулей $Z(u)$ на $(0,T)$, поступают следующим образом. Пусть E_1 – множество точек $t \in (0,T)$, для которых выполняется неравенство (19), $E_2 = (0,T) \setminus E_1$, $h > 0$ – некоторый параметр. Очевидно, что при $t \in E_2$, $J_1(t) = J_2(t)$. Поэтому имеют место соотношения:

$$I_3 = \int\limits_0^T J_1(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{E_1} J_1(t)\ \mathrm{d}t + \int\limits_{E_2} J_1(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{E_1} J_1(t)\ \mathrm{d}t + \int\limits_{E_2} J_2(t)\ \mathrm{d}t \le I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{E_1} J_1(t)\ \mathrm{d}t, \qquad I_2 = \int\limits_0^T J_2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Отсюда получаем

$$I_3 - I_2 \le I_1. \tag{20}$$

Интеграл I_3 достаточно просто оценивается снизу. Интегралы I_1 и I_2 оцениваются сверху с помощью неравенства Коши:

$$I_1^2 \le \mu(E_1) \int\limits_0^T J_1^2(t)\ \mathrm{d}t; \qquad I_2^2 \le T \int\limits_0^T J_2^2(t)\ \mathrm{d}t. \tag{21}$$

Если получится оценка вида $I_2 = \widetilde{o}(I_3)$, то из (20) и (21) находим:

$$I_3^2 \le c\mu(E_1) \int\limits_0^T J_1^2(t)\ \mathrm{d}t,$$

т.е. для $\mu(E_1)$ получается нижняя оценка. Из нижней оценки для $\mu(E_1)$ следует оценка количества нулей $Z(t)$ на $(0,T)$ вида:

$$N_0(T) \ge c_1 h^{-1} \mu(E_1), \qquad c_1 > 0 \text{ – постоянная.}$$

Эта идея применима к любому ASD независимо от того, имеется EP или нет. При этом требуется только наличие FE, чтобы иметь аналог функции $Z(t)$. Для всех таких ASD получается оценка величины $N_0(T)$ вида:

$$N_0(T) > cT\,, \qquad c > 0 \text{ – постоянная.}$$

Сделаю несколько замечаний по поводу изложенной идеи. Интегралы I_2 и I_3 имеют почти одинаковый вид:

$$I_3 = \int\limits_0^T \int\limits_t^{t+h} |Z(u)|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t\,;$$

$$I_2 = \int\limits_0^T \left|\int\limits_t^{t+h} Z(u)\, \mathrm{d}u\right| \mathrm{d}t\,.$$

Для функции $Z(u)$ справедлива приближенная формула, которая сейчас называется формулой Римана-Зигеля (эту формулу нашел К. Зигель в бумагах Б. Римана): $|u| \geq 2\pi$,

$$Z(u) = 2\sum_{n\leq\sqrt{\frac{|u|}{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\bigl(\theta(u) - u\log n\bigr) + O\bigl(|u|^{-\frac{1}{4}}\log|u|\bigr)\,.$$

Из приведенной формулы видно, что $Z(u)$ – осциллирующая функция. Поэтому I_2 будет меньше I_3, если только h – длина промежутка интегрирования во внутреннем интеграле, достаточно велика, чтобы уловить осцилляцию $Z(u)$. Поэтому, чем больше h, тем проще уловить осцилляцию $Z(u)$, но, вместе с тем, получается меньшая нижняя оценка $N_0(T)$ и, наоборот, чем меньше h, тем труднее уловить осцилляцию $Z(u)$ и тем точнее получается нижняя оценка $N_0(T)$. Г. Харди и Д. Литтлвуд получили свой результат при $h = A > 10$, A – постоянная, т.е. они оценили $\mu(E_1)$ снизу величиной c_1T, $c_1 > 0$ – постоянная.

§14. Метод К. Зигеля.

При доказательстве своей теоремы К. Зигель пользуется формулой Б. Римана:

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Bigl(\frac{s}{2}\Bigr)\zeta(s)\\ &= \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Bigl(\frac{s}{2}\Bigr)\int\limits_{0\swarrow 1} \frac{x^{-s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi x^2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi x}}\,\mathrm{d}x + \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\Bigl(\frac{1-s}{2}\Bigr)\int\limits_{0\nwarrow 1} \frac{x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi x^2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi x}}\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

где интегрирование совершается по прямым, пересекающим вещественную ось на отрезке $(0, I)$ под углами $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$. При $s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,t$ имеем:

$$\zeta(s) = 2\,\mathrm{Re}\,\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\varrho(s)\,,$$

где $\varrho(s)$ – соответствующий интеграл. Тогда для $N_0(T)$ справедливо неравенство:

$$N_0(T) > \frac{1}{\pi}\Big|\Delta\arg\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\varrho(s)\Big| - 1\,,$$

где переменная s пробегает отрезок вида $s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,t$, $0 < t \le T$, а изменение аргумента $\varrho(s)$ при переходе через нуль $\varrho(s)$, лежащий на этом отрезке, считается равным кратности нуля, умноженной на π. Приращение аргумента множителя $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)$ вычисляется применением формулы Стирлинга, а приращение аргумента $\varrho(s)$ оценивается с помощью оценки количества нулей $\varrho(s)$ в прямоугольнике с вершинами в точках $s = \frac{1}{2}$, 2, $2 + \mathrm{i}\,T$, $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,T$.

§15. Метод А. Сельберга.

Возвращаясь к методу Харди-Литтлвуда-Ландау заметим, что в нем существенно используется неравенство Коши вида

$$\left(\int_0^T |G(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \le T\int_0^T |G(t)|^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Это неравенство обращается в равенство, если $G(t) = \mathrm{Const}$, $0 < t \le T$ и, следовательно, оно тем точнее, чем ближе $G(t)$ к константе. А. Сельберг вместо функции $Z(t)$ рассматривает функцию $F(t)$,

$$F(t) = Z(t)\Big|\varphi\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,t\Big)\Big|^2\,,$$

причем $\varphi(s)$ подбирается так, чтобы $F(t)$ была близка к постоянной. При выборе $\varphi(s)$ А. Сельберг существенно пользуется тем, что $\zeta(s)$ имеет EP. Более точно, $\varphi(s)$ задается следующим равенством:

$$\varphi(s) = \sum_{\nu \le X} \beta(\nu)\nu^{-s}\,,$$

где

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\Big(1 - \dfrac{\log \nu}{\log X}\Big), & 1 \le \nu < X, \\ 0, & \nu \ge X, \end{cases}$$

а вещественные числа $\alpha(\nu)$ определяются соотношением:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Как подчеркивает сам А. Сельберг подобное соображение было впервые применено Г. Бором и Э. Ландау в их исследованиях, касающихся $N(\sigma, T)$ для фиксированного $\sigma > \dfrac{1}{2}$ (см. [9; с. 5]). Нетрудно доказать, что

$$\frac{1}{T}\int_0^T |Z(t)|^2 \, dt \sim \log T, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T |F(t)|^2 \, dt \sim c.$$

Таким образом, в среднем $|Z(t)|$ имеет порядок $\sqrt{\log t}$, $t \ge t_1 > 0$, в то время как функция А. Сельберга $F(t)$ в среднем имеет порядок, равный константе. Еще раз подчеркну, что метод А. Сельберга существенно использует наличие у $\zeta(s)$ EP и он прямо не применим к ASD без EP.

§16. Метод С. М. Воронина.

При доказательстве (14) для нулей $f(s)$ С. М. Воронин существенно пользуется тем, что $f(s)$ является линейной комбинацией двух L-функций Дирихле, каждая из которых имеет EP.

Оценивая снизу интеграл I,

$$I = \int_0^T |f(s)| \, dt,$$

он заменяет $f(s)$ на линейную комбинацию эйлеровских произведений $P_1(s)$ и $P_2(s)$ с небольшим, но растущим с ростом T, количеством сомножителей. Вследствие теоремы Кронекера к оценке снизу интеграла

$$\int_0^T |c_1 P_1(s) + c_2 P_2(s)| \, dt$$

можно привлечь теоретико-вероятостные соображения (см [6]).

§17. Метод автора.

Как уже отмечалось выше, функция Дэвенпорта–Хейльбронна $f(s)$ не имеет EP и потому идею А. Сельберга к $f(s)$ прямо применить нельзя. Но $f(s)$ можно представить так:

$$f(s) = \frac{1 - \mathrm{i}\varkappa}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + \mathrm{i}\varkappa}{2} L(s, \overline{\chi}), \tag{22}$$

где $\chi(n)$ – характер Дирихле по модулю 5 такой, что $\chi(2) = \mathrm{i}$. Каждое слагаемое в (22) имеет EP, так как

$$L(s, \chi) = \prod_p \Bigl(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Bigr)^{-1}, \qquad \operatorname{Re} s > 1\,.$$

Легко видеть, что

$$\prod_{p \equiv \pm 1 \pmod 5} \Bigl(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Bigr)^{-1} = \prod_{p \equiv \pm 1 \pmod 5} \Bigl(1 - \frac{\overline{\chi}(p)}{p^s}\Bigr)^{-1},$$

т.е. $f(s)$ при $\operatorname{Re} s > 1$ делится на часть EP, равную $r(s)$,

$$r(s) = \prod_{p \equiv \pm 1 \pmod 5} \Bigl(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Bigr)^{-1}.$$

Пользуясь этим, можно найти такую $\varphi_1(s)$, что функция $F_1(t)$,

$$F_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1(t)} f\Bigl(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\Bigr) \Bigl|\varphi_1\Bigl(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\Bigr)\Bigr|^2,$$

аналогичная функции $F(t)$ А. Сельберга, хотя и не будет в среднем константой, но будет много меньше, чем $\sqrt{\log t}$. Легко доказать, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T |F_1(t)|^2 \,\mathrm{d}t \sim \sqrt{\log T},$$

т.е. $F_1(t)$ в среднем имеет порядок $\sqrt[4]{\log T}$. Но только этого еще не достаточно для доказательства (15). Другим соображением явилась мысль сравнивать малые степени интегралов $J_1(t)$ и $J_2(t)$, т.е. сравнивать величины

$$J_1^{\alpha}(t) \quad \text{и} \quad J_2^{\alpha}(t), \tag{23}$$

где $\alpha > 0$, $\alpha = \alpha(T) \to 0$ при $T \to +\infty$. При малых α интегралы (23) близки к постоянной. Эти две идеи позволили доказать (15), (16), а также целый ряд других результатов. Отмечу также, что при оценке снизу интеграла от дробной степени модуля ASD существенно используется теорема Гэбриэла [26].

§18. Резюмируя изложенное можно сказать, что критическая прямая содержит аномально много нулей ASD с FE Риманова типа и таких, которые делятся на часть EP, хотя самого EP не имеет. Этот факт еще раз подчеркивает, что за RH отвечает EP.

Литература

[1] HAMBURGER, H.: *Über die Riemannsche Funktional-gleichung der ζ-Funktion*, Math. Z. **10; 11; 13** (1921; 1922; 1922), 240–254; 224–245; 283–331.

[2] DAVENPORT, H.—HEILBRONN, H.: *On the zeros of certain Dirichlet series*, J. London Math. Soc. **11** (1936), 181–185; 307–312.

[3] ВОРОНИН, С. М.: *О нулях дзета-функций квадратичных форм*, Труды МИАН **142** (1976), 136–147.

[4] ВОРОНИН, С. М.: *О нулях дзета-функций квадратичных форм*, Докл. АН СССР **235** (1977), 257–258.

[5] INGHAM, A. E.: *On the estimation of $N(\sigma, T)$*, Quart. J. Math. **11** (1940), 291–292.

[6] ВОРОНИН, С. М.: *О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой*, Изв. АН СССР, Сер. Мат. **44** (1980), 63–91.

[7] HEJHAL, D. A.: *Zeros of Epstein Zeta-Functions and Supercomputers.* In: Proc. of the Internat. Congress of Math., Berkeley, California, 1986, pp. 1362–1384.

[8] BOMBIERI, E.—HEJHAL, D. A.: *Sur les zeros des fonctions zeta d'Epstein*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **304** (1987), 213–217.

[9] SELBERG, A.: *On the zeros of Riemann's zeta-function on the critical line*, Arch. Math. of Naturv. **45** (1942), 101–104; *On the zeros of Riemann's zeta-function*, Skr. Norske Vid. Akad., Oslo 1942, 10.

[10] КАРАЦУБА, А. А.: *О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой*, Изв. АН СССР, Сер. Мат. **54** (1990), 303–315.

[11] КАРАЦУБА, А. А.: *О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения*, Изв. РАН, Сер. Мат. **57** (1993), 3–14.

[12] HARDY, G. H.: *Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C.R. Acad. Sci. **158** (1914), 1012–1014.

[13] HARDY, G. H.—LITLWOOD, J. E.: *The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line*, Math. Z. **10** (1921), 283–317.

[14] SIEGEL, C. L.: *Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie*, Quellen Stud. Gesch. Math., Astr., und Phys. **2** (1932), 45–80.

[15] КУЗЬМИН, Р. О.: *О корнях функции Римана $\zeta(s)$*, Доклады АН СССР **2** (1934), 398–400.

[16] LEVINSON, N.: *More that third of the zeros of Riemann's zeta functionen are on $\sigma = \frac{1}{2}$*, Adv. Math. **13** (1974), 383–436.

[17] МОЗЕР, Я.: *Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой*, Acta Arith. **26** (1974), 33–39.

[18] МОЗЕР, Я.: *Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. **31; 35** (1976; 1979), 45–51; 403–404.

[19] МОЗЕР, Я.: *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. **31** (1976), 31–43.

[20] МОЗЕР, Я.: *О законе Грама в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. **32** (1977), 107–113.

[21] МОЗЕР, Я.: *Доказательство гипотезы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. **36** (1980), 147–156.

[22] МОЗЕР, Я.: *О корнях уравнения* $Z'(t) = 0$, Acta Arith. **40** (1981), 79–89; 97–107.

[23] МОЗЕР, Я.: *Улучшение теоремы Харди-Литтлвуда о плотности нулей функции* $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, Acta Math. Univ. Comenian. **42-43** (1983), 41–50.

[24] МОЗЕР, Я.: *Некоторые следствия из формулы Римана-Зигеля*, Труды МИАН **163** (1984), 183–185.

[25] КАРАЦУБА, А. А.: *Дзета-функция Римана и ее нули*, УМН **40** (1985), 19–70.

[26] GABRIEL, R. M.: *Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves*, J. London Math. Soc. **2** (1927), 112–117.

[27] SELBERG, A.: *Old and new conjectures and results about class of Dirichlet series.* In: Proceedings of the Amalfi Conference an Analytic Number Theory, 1992, Univ. di Salerno, pp. 367–385.

Received November 4, 1993

Steklov Mathematical Institute
Vavilov street 42
SU-117 966 Moscow, GSP-1
Russia
E-mail: karacuba@icm.msk.su