Math. Slovaca 40, 1990, No. 3, 321—324

# О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАКСИМУМАМИ И С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

А. Р. МАГОМЕДОВ

ABSTRACT. In this paper we investigate the existence and uniqueness of periodic solutions for differential equations with maxima and a small parameter.

В работах [2, 3] рассматривались вопросы о существовании, единственности и об алгоритме построения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений с максимумами (в векторной форме) вида

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t), \max_{\tau\in[t-h,\, t]} y(\tau)),$$

где $F(t, y(t), \max_{\tau\in[t-h,\, t]} y(\tau))$ — аналитическая вектор-функция своих аргументов и периодическая по $t$ с периодом $2\pi$.

В данной статье изучаются некоторые вопросы, касающиеся существования периодических решений для дифференциальных уравнений с максимумами и с малым параметром (в векторной форме) вида

$$\dot{y}(t) = F_1(t, y(t), \max_{\tau\in[t-h,\, t]} y(\tau)) + \mu F_2(t, y(t), \max_{\tau\in[t-h,\, t]} y(\tau), \mu), \tag{1}$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, $y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$,

$$y_\tau(t) = \max_{\tau\in[t-h,\, t]} y(\tau) = \left\{\max_{\tau\in[t-h,\, t]} y_1(\tau), \ldots, \max_{\tau\in[t-h,\, t]} y_n(\tau)\right\}.$$

Предположим, что

1°. Функции $F_1(t, y(t), y_\tau(t))$ и $F_2(t, y(t), y_\tau(t), \mu)$ — периодические по $t$ с периодом $2\pi$, причем $2\pi < h$;

2°. Функции $F_1(t, y(t), y_\tau(t))$ i $F_2(t, y(t), y_\tau(t), \mu)$ — непрерывные и дифференцируемые по своим аргументам;

3°. Порождающая система (при $\mu = 0$)

$$\dot{y}_0(t) = F_1(t, y_0(t), \max_{\tau\in[t-h,\, t]} y_0(\tau))$$

имеет периодическое решение $y_0(t)$ периода $2\pi$.

Рассмотрим систему в вариациях

AMS Subject Classification (1980): Primary 34C25.
Key words: Differential equations with maxima, Periodic solutions, Small parameters.

$$\dot{y}(t) = F_{1y}(t, y_0(t), y_{0\tau}(t))\, y(t) + F_{1y_\tau}(t, y_0(t), y_{0\tau}(t))\, y_\tau(t), \tag{3}$$

где

$$F_{1y}(t, y_0(t), y_{0\tau}(t)) = \frac{\partial F_1(t, y_0(t), y_{0\tau}(t))}{\partial y(t)},$$

$$F_{1y_\tau}(t, y_0(t), y_{0\tau}(t)) = \frac{\partial F_1(t, y_0(t), y_{0\tau}(t))}{\partial y_\tau(t)}, \quad y_{0\tau}(t) = \max_{\tau \in [t-h,\, t]} y_0(\tau).$$

На основании этих условий могут быть доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если система* (3) *не имеет других периодических решений периода* $2\pi$, *кроме тривиального, то существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что при* $\mu < \mu_0$ *система* (1) *имеет периодическое решение* $y(t, \mu)$, *для которого*

$$\lim_{\mu \to 0} y(t, \mu) = y_0(t). \tag{4}$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы проведем некоторые существенные для дальнейшего рассждения. Каждой непрерывной функции на $[-h, 0]$ соответствует единственное решение $y(t; \varphi, \mu)$ системы (1), которые при $[-h, 0]$ совпадает с $\varphi(t)$ [3]. Предполагаем, что выполнено условие, обеспечивающее единственность и непрерывную зависимость решения системы (2) от начальных условий и параметров. Определяем оператор $Q_t^\mu \varphi = y(t + t_1; \varphi, \mu)$, который при фунсированных $t_1$ и $\mu$ ставит в соответствие функции $\varphi$, определенной на $[-h, 0]$, функцию $y(t + t_1; \varphi, \mu)$, определенную также на $[-h, 0]$. Неподвижные точки оператора $Q_{2\pi}^\mu \varphi$ будут начальными функциями периодических решений. Пусть $F(\varphi, \mu) = \varphi - Q_{2\pi}^\mu \varphi$. Согласно условиям теоремы, система (2) имеет периодическое решение $y_0(t)$, следовательно, уравнение $F(\varphi, \mu)$ удовлетворяется при $\mu = 0$, $\varphi = y_0(t_1)$. Функция $F(\varphi, \mu)$ дифференцируема по Фреше относительно $\varphi$ и можно показать, что ее дифференциал в точке $y_0(t_1)$, при $\mu = 0$ будет $I - Q$, где $I$ — тождественный оператор, а $Q$ — оператор, построенный для системы (3) таким образом, как $Q_{2\pi}^\mu$ для системы (1). При $2\pi > h$, $Q$ – вполне непрерывный оператор, и если система (3) не имеет других периодических решений, кроме тривиального, то оператор $I - Q$ обратим. Согласно теореме о неявных отображенях в банаховых пространствах [1] заключаем, что существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu < \mu_0$ уравнение $F(\varphi, \mu) = 0$ имеет решение, которое при $\mu \to 0$ стремится к $y(t_1)$. Таким образом, Теорема 1 доказана.

Теперь докажем теорему без использованиа системы в вариациях.

**Теорема 2.** *Если периодическое решение* $y_0(t)$ *системы* (2) *равномерно асимптотически устойчиво, то при достаточно малом* $\mu$ *система* (1) *имеет периодическое решение* $y(t, \mu)$ *такое, что*

$$\lim_{\mu \to 0} y(t, \mu) = y_0(t).$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия теоремы оператор $Q^{\mu}_{2\pi}$ имеет неподвижную точку. Для этого используем одну из теорем Ф. Браудера:

Пусть [illegible] — банахово пространство, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_1$ — открытые и выпуклые множества в [illegible], $\mathcal{F}_0$ — замкнутое и выпуклое множество, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, $f$ — вполне непрерывные отображения $\mathcal{F}$ в [illegible]; предположим, что существует натуральное число такое, что $f^m$ определено на $\mathcal{F}_1$, $f^j(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{F}_1$, при $0 \leq j \leq m$, $f^m(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{F}_0$; тогда по теореме Браудера $f$ имеет неподвижную точку в $\mathcal{F}_0$.

В нашем случае $f = Q^{\mu}_{2\pi}$. Покажем, что указанные выше условия выполнены.

По предложению решение $y_0(t)$ равномерно асимптотически устойчиво. Не уменьшая общности, можем допустить, что $y_0(t) \equiv 0$, т.к. к этому приводит простая замена переменных.

Равномерная асимптотическая устойчивость означает существование числа $\delta_0 > 0$ и двух функций $\delta(\eta)$ и $T(\eta)$ таких, что если $|\varphi| < \delta(\eta)$, то $|y(t; \varphi, 0)| < \eta$, $t \geqslant -h$ и если $|\varphi| < \delta_0$, $t \in T(\eta)$, то $|y(t; \varphi, 0)| < \eta$.

Пусть

$$\delta_1 = \delta(1), \quad 0 < \eta < \min\left\{\delta_0,\ \delta\left(\frac{1}{2}\delta_1\right)\right\},$$

$$T = T\left\{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)\right\},$$

$m$ — наименьшее натуральное число, для которого $2\pi m > T + h$. Пусть $\mathcal{F}$ — сфера $|\varphi| < \delta_1$. Тогда $|y(t; \varphi, 0)| < 1$, $\varphi \in \mathcal{F}$, $t \geqslant -h$. Если $\mu$ достаточно мало, то $|y(t; \varphi, \mu)| < 2$ при $\varphi \in \mathcal{F}$, $-h \leqslant t \leqslant 2\pi m$. Отсюда следует, что при $\varphi \in \mathcal{F}$ имеем $|Q^{\mu}_{2\pi}\varphi| < 2$ и на основании (1) $Q^{\mu}_{2\pi}$ вполне непрерывен на $\mathcal{F}$.

Из полученной оценки следует также возможность продолжения решений при $\varphi \in \mathcal{F}$. Следовательно, оператор $Q^{\mu}_{2\pi}$ определен для всех $\varphi \in \mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{F}_1$ — сфера $|\varphi| < \eta$, а $\mathcal{F}_0$ — сфера $|\varphi| < \dfrac{3}{4}\delta\left(\dfrac{1}{2}\eta\right)$. Для $|\varphi| < \eta$, $t \geqslant -h$ имеем $|y(t; \varphi, 0)| < \dfrac{1}{2}\delta_1$, т.к. $\eta > \delta\left(\dfrac{1}{2}\delta_1\right)$. При достаточно малом $\mu$ следует, что

$$|y(t; \varphi, \mu)| < \delta, \quad -h \leqslant t \leqslant 2\pi m.$$

Отсюда вытекает

$$|Q^{\mu}_{2\pi}|^j(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{F},\ 0 \leq j \leqslant m, \text{ так как}$$

$$(Q^{\mu}_{2\pi})^{j}(\varphi) = y(2\pi j + t_1;\ \varphi,\ \mu).$$

Для $\|\varphi\| < \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$, $t \geqslant -h$ имеем $|y(t;\ \varphi,\ 0)| < \frac{1}{2}\eta$, а поэтому при $\mu$ достаточно малом $|y(t;\ \varphi,\ \mu)| < \eta$, если

$$\|\varphi\| \leqslant \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right), \quad -h \leqslant t \leqslant 2\pi m.$$

Таким образом

$$(Q^{\mu}_{2\pi})^{j}(\mathscr{F}_0) \subset \mathscr{F}_1, \quad 0 \leqslant j \leqslant m.$$

Из $\eta < \delta_0$ следует, что при $\varphi \in \mathscr{F}_0$, $t < T$ имеем

$$|y(t;\ \varphi,\ 0)| < \frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right),$$

следовательно, при достаточно малом $\mu$ имеем

$$|y(t;\ \varphi,\ \mu)| \leqslant \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right),$$

если $\delta \in \mathscr{F}$, $2\pi m - h \leqslant t \leqslant 2\pi m$, т.е.

$$(Q^{\mu}_{2\pi})^{m}(\mathscr{F}_1) \subset \mathscr{F}_0,$$

что доказывает теоремы.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] ХАРТМАН, Ф.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мир, Москва 1970.

[2] МАГОМЕДОВ, А. Р. -РЯБОВ, Ю. А.: О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений с максимумами. Извест. АН Азерб. ССР. Серия физ.-тех. и мат. наук, № 2, 1975, 76 83.

[3] РЯБОВ, Ю. А.—МАГОМЕДОВ, А. Р.: Дифференциальные уравнения с максимумами. Баку 1983, 1—32. (Препринт АН Азерб. ССР, ин-т физики: 83—75)



Поступило 4. 1. 1988



*АКАДЕМИЯ НАУК*
*Азербайджанской ССР*
*ШЕМАХИНСКАЯ АСТРОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ*
*Азерб. ССР, г. Шемаха.*