V. I. Igoshin

Полумодулярность в решетках интервалов

Mathematica Slovaca, Vol. 38 (1988), No. 4, 305--308

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136473

Math. Slovaca 38, 1988, No. 4, 305—308

ПОЛУМОДУЛЯРНОСТЬ В РЕШЕТКАХ ИНТЕРВАЛОВ

В. И. ИГОШИН

В настоящей работе полностью описываются все такие решетки, которые обладают полумодулярными снизу решетками интервалов. После доказательства основной теоремы приводится следствие, утверждающее, что для решеток L, удовлетворяющих условию обрыва убывающих цепей или условию обрыва возрастающих цепей, полумодулярность снизу решетки ее интервалов равносильна тому, что L — цепь, и приводится пример бесконечной решетки, не являющейся цепью, с полумодулярной снизу решеткой интервалов. В заключение дается описание решеток L, обладающих полумодулярной сверху решеткой интервалов: L состоит лишь из одного или двух элементов.

Пусть L — решетка, $a, b \in L$, $a < b$. Говорят, что элемент b покрывает элемент a в решетке L, или что элемент a покрывается элементом b в решетке L, и пишут $a \prec b$ или $b \succ a$, если интервал $[a, b] = \{x \in L \colon a \leqslant x \leqslant b\}$ решетки L состоит точно из двух элементов a и b. Решетка L называется полумодулярной снизу, если она удовлетворяет следующему условию, называемому условием покрытия снизу:

$$y \prec x \vee y \quad \rightarrow \quad x \wedge y \prec x \tag{$*$}$$

для любых $x, y \in L$. Решетка L называется полумодулярной сверху, если она удовлетворяет следующему условию, называемому условием покрытия сверху:

$$x \wedge y \prec x \quad \rightarrow \quad y \prec x \vee y \tag{$**$}$$

для любых $x, y \in L$. Заметим, что приведенные условия ($*$) и ($**$) двойственны между собой и, кроме того, взаимно обратны. Условия полумодулярности были введены Биркгофом [1] для решеток конечной длины. Им же и другими авторами показана большая важность класса полумодулярных решеток. Впоследствии условия полумодулярности рассматривались и в произвольных решетках.

Пусть $\mathrm{Int}(L)$ — решетка всех интервалов решетки L вместе с пустым множеством. Отношением порядка в $\mathrm{Int}(L)$ является отношение теоретико-множественного включения. Настоящая работа продолжает серию работ автора [3]—[7] по изучению свойств этой решетки.

Теорема. *Решетка* $\mathrm{Int}(L)$ *всех интервалов решетки* L *тогда и только тогда полумодулярна снизу, когда в решетке* L *для любых несравнимых элементов* x *и* y *существуют такие элементы* u, v, *что*

$$x \wedge y < u < x < v < x \vee y.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть решетка $\mathrm{Int}(L)$ полумодулярна снизу. Предположим, что в решетке L не выполняется условие теоремы. Следовательно, существуют такие элементы $x, y \in L$, что $x \mid y$ (т.е. x не сравним с y) и по меньшей мере один из интервалов $[x \wedge y, x]$ или $[x, x \vee y]$ является простым, т.е. состоит в точности из двух элементов.

Предположим сначала, что простым является интервал $[x \wedge y, x]$. Тогда ясно, что $[x, x \vee y] \prec [x \wedge y, x \vee y] = [x \wedge y, y] \vee [x, x \vee y]$. Но, с другой стороны, $[x \wedge y, y] \wedge [x, x \vee y] = \emptyset \not\prec [x \wedge y, y]$. Получаем противоречие с тем, что решетка $\mathrm{Int}(L)$ полумодулярна снизу.

Случай, когда простым является интервал $[x, x \vee y]$, рассматривается аналогично.

Достаточность. Пусть $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$ — такие два несравнимых интервала решетки L, что

$$[b_1, b_2] \prec [a_1, a_2] \vee [b_1, b_2].$$

Тогда

$$[b_1, b_2] \prec [a_1 \wedge b_1,\ a_2 \vee b_2].$$

Ясно, что последнее соотношение возможно тогда и только тогда, когда $b_1 = a_1 \wedge b_1$ и $b_2 \prec a_2 \vee b_2$, или же когда $a_1 \wedge b_1 \prec b_1$ и $a_2 \vee b_2 = b_2$.

Рассмотрим первую возможность: $b_1 = a_1 \wedge b_1$ и $b_2 \prec a_2 \vee b_2$. Тогда $b_1 \leqslant a_1$. Следовательно, ввиду того, что интервалы $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$ не сравнимы, имеем $a_2 \nleqslant b_2$. Предположим, что a_2 не сравним с b_2. Тогда, по условию, существует такой элемент $c \in L$, что $b_2 < c < a_2 \vee b_2$. Последнее противоречит условию: $b_2 \prec a_2 \vee b_2$. Следовательно, можно считать, что $b_1 \leqslant a_1$ и $b_2 \prec a_2$.

Рассмотрим тогда все случаи взаимного расположения элементов a_1 и b_2:

а) Элементы a_1 и b_2 не сравнимы. Тогда, согласно условию, существует такой элемент $c \in L$, что

$$b_2 < c < a_1 \vee b_2 \leqslant a_2.$$

Это противоречит условию: $b_2 \prec a_2$.

б) $a_1 \leqslant b_2$. Тогда из соотношений $b_1 \leqslant a_1 \leqslant b_2 \prec a_2$ следует, что

$$[a_1, a_2] \wedge [b_1, b_2] = [a_1, b_2] \prec [a_1, a_2],$$

т.е. для интервалов $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$ выполняется условие полумодулярности снизу.

в) $a_1 > b_2$. Тогда из соотношений $b_2 < a_1 \leqslant a_2$ и $b_2 \prec a_2$ следует, что $a_1 = a_2$, т.е. $b_1 \leqslant b_2 \prec a_2 = a_1$. Следовательно,

$$[a_1, a_2] \wedge [b_1, b_2] = \emptyset \prec [a_1, a_2],$$

т.е. условие полумодулярности снизу выполнено для интервалов $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$.

При рассмотрении второй возможности: $a_1 \wedge b_1 \prec b_1$ и $a_2 \vee b_2 = b_2$ доказательство получается двойственными рассуждениями.

Теорема полностью доказана.

Следствие. *Пусть L — решетка, в каторой выполняется условие обрыва убывающих цепей или условие обрыва возрастающих цепей. Тогда решетка* $\mathrm{Int}(L)$ *будет полумодулярна снизу в том и только в том случае, когда L является цепью.*

Доказательство. Пусть решетка L удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Если L не цепь, то в ней найдутся два такие элемента a и b, которые не сравнимы между собой и $a \succ a \wedge b$ и $b \succ a \wedge b$, т.е. в решетке L не будет выполняться условие теоремы. Следовательно, решетка $\mathrm{Int}(L)$ не будет полумодулярной снизу.

В работе [3] показано, что если L — решетка конечной длины, то ее решетка интервалов $\mathrm{Int}(L)$ будет полумодулярна снизу в том и только в том случае, если решетка L будет цепью. Этот факт отмечен также в [2, стр. 124, Теорема 1]. Нетрудно понять, что это утверждение вытекает из доказанного следствия.

Пример. Приведем пример бесконечной решетки, не являющейся цепью, но обладающей полумодулярной снизу решеткой интервалов. Ее диаграмма изобразена ниже.

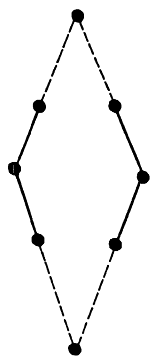

Рис. 1

Она состоит из двух «параллельных» цепей типа цепи целых чисел каждая с добавленными общими наименьшим и наибольшим элементами. Эта решетка удовлетворяет условию доказанной теоремы.

В заключение отметим, что *решетка* $\mathrm{Int}(L)$ *полумодулярна сверху, т.е. удовлетворяет условию* $(**)$, *тогда и только тогда, когда решетка* L *одноэлементна или двухэлементна.* В самом деле, если решетка L одноэлементна или двухэлементна, то решетка $\mathrm{Int}(L)$ цоответственно двухэлементна или есть решетка 2×2 (прямое производение двухэлементной цепи на себя). Обе эти решетки, как нетрудно понять, полумодулярны сверху. Обратно, если в решетке L имеются три таких элемента a, b, c, что $a < c < b$, то для интервалов $x = [a, a]$ и $y = [b, b]$ условие $(**)$ покрытия сверху не выполняется. Действительно, вычисляем:

$$x \wedge y = [a, a] \cap [b, b] = \emptyset \prec [a, a];$$

$$x \vee y = [a, a] \vee [b, b] = [a, b].$$

Следовательно, $x \wedge y \prec x$, но $y \not\prec x \vee y$, так как

$$y = [b, b] \subset [c, b] \subset [a, b] = x \vee y.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. Providence, R. I., 1967.

[2] BIRKHOFF, G.: Some applications of universal algebra Estergomb (Hungary), 1977, 107 128.

[3] ИГОШИН, В. И.: Решетки интервалов и решетки выпуклых подрешеток решеток. В: Упорядоченные множества и решетки. Саратов, 6, 1980, 69 76.

[4] IGOSHIN, V. I.: Identities in interval lattices of lattices. In: Coll. Math. Soc. J. Bolyai 33 (Contributions to Lattice Theory), Szeged (Hungary), 1980 (1983), 491 501.

[5] IGOSHIN, V. I.: On lattices with restrictions on their interval lattices In: Coll. Math. Soc. J. Bolyai 43 (Lectures in Universal Algebra), Szeged (Hungary), 1983 (1986), 209—216.

[6] ИГОШИН, В. И.: Алгебраическая характеристика решеток интервалов. Успехи матем. Наук 40, 1985, №3, 205—206.

[7] ИГОШИН, В. И.: Интервальные свойства квазимногообразий решеток. В: XVIII Всесоюзная алг. конф., тезисы сообщ., ч. I, Кишинев 1985, 212.

Поступило Июн 2, 1987

Саратовский педагогический институт им. К. А. Федина
СССР
410028 Саратов
Мичурина, 92