N.Ya. Medvedev

ℓ-многообразия без независимого базиса тождеств. II.

Mathematica Slovaca, Vol. 35 (1985), No. 4, 377--380

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136404

Math. Slovaca 35, 1985, No. 4, 377—380

l-МНОГООБРАЗИЯ БЕЗ НЕЗАВИСИМОГО БАЗИСА ТОЖДЕСТВ (II)

Н. Я. МЕДВЕДЕВ

Эта статья является продолжением работы автора [1]. Методами, разработанными в этой работе, доказано существование бесконечного числа разрешимых ступени 2 l-многообразий, не имеющих независимого базиса тождеств. Все определения и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в [1].

Рассмотрим

$$u_{m/n}(x, y) = |((|x| \vee |y|)^{-1}|[x, y]|^n(|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^m) \times (|x| \vee |y|)^{-1}|[x, y]|^{-n}(|x| \vee |y|)|$$

где $0 < \frac{m}{n} < 1 (m, n > 0)$ и $(T_{m/n}, P_{m/n})$ — линейно упорядоченная группа, определенная в [1] (§ 1) при $\beta = \frac{m}{n}$. Пусть $V_{m/n} - l$ — многообразие, определяемое следующей бесконечной системой тождеств $\Sigma_{m/n}$:

$$\begin{cases} \text{а)}\ (|x| \vee |y|)^{-1} u_{m/n}(x, y)(|x| \vee |y|) \wedge u^k_{m/n}(x, y) = u^k_{m/n}(x, y) \quad (k \in N), \\ \text{б)}\ (x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e. \end{cases}$$

Заметим сначала, что все l-многообразия $V_{m/n}$ различны. Непосредственная проверка показывает, что на линейно упорядоченной группе $(T_{m/n}, P_{m/n})$ выполнено тождество $u_{m/n}(x, y) = e$ и, следовательно, выполнены все тождества системы $\Sigma_{m/n}$.

Пусть $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m}{n}$, покажем, что тогда $(T_{m/n}, P_{m/n}) \bar{\in} V_{m_1/n_1}$. Действительно, при $x = \left(\frac{m}{n}, 0\right)$, $y = (1, a) \neq (1, 0)$, имеет место:

1) $|[x, y]| = (1, b)$, где $b \neq 0$;

2) $(|x| \vee |y|)^{-1}(1, b)^n(|x| \vee |y|) = \left(1, \frac{m}{n} b\right)^n = (1, b)^m$;

3) $(|x| \vee |y|)^{-1}(1, b)^{nn_1}(|x| \vee |y|) = (1, b)^{mn_1} > (1, b)^{m_1 n}$ так как $m_1 n < mn_1$. Из 3) получаем $(|x| \vee |y|)^{-1}(1, b)^{n_1}(|x| \vee |y|) > (1, b)^{m_1}$ и, значит,

$$u_{m_1/n_1}\left(\left(\frac{m}{n},0\right),(1,a)\right)=|(1,b)^{m_1}(|x|\vee|y|)^{-1}(1,b)^{-n_1}(|x|\vee|y|)|>e$$

в линейно упорядоченной группе $(T_{m/n}, P_{m/n})$. Но

$$(|x|\vee|y|)^{-1}u_{m_1/n_1}(x,y)(|x|\vee|y|)=$$
$$=\left(\frac{m}{n},0\right)^{-1}u_{m_1/n_1}\left(\left(\frac{m}{n},0\right),(1,a)\right)\left(\frac{m}{n},0\right)<u_{m_1/n_1}\left(\left(\frac{m}{n},0\right),(1,a)\right)$$

и поэтому все тождества а) системы Σ_{m_1/n_1} нарушаются на $(T_{m/n}, P_{m\,n})$ при этих значениях переменных x и y. Следовательно $(T_{m/n}, P_{m/n})\bar{\in} V_{m_1/n_1}$ и $V_{m_1\,n_1}\neq V_{m\,n}$.

Лемма 1. *Пусть β — положительное действительное число и $\beta>1$. Тогда для любого*

$$0<\frac{m}{n}<1,\quad \mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)\not\subseteq V_{m/n}\quad \textit{и}\quad (T_\beta, P_\beta)\bar{\in} V_{m\,n}.$$

Доказательство. Покажем, что тождества а) из $\Sigma_{m\,n}$ нарушаются на (T_β, P_β) при $x=(\beta,0)$, $y=(1,a)$, где $a\neq 0$. Действительно,

$$|[x,y]|=(1,b)\neq(1,0)$$

и

$$(|x|\vee|y|)^{-1}|[x,y]|^n(|x|\vee|y|)=(1,\beta b)^n>(1,\beta b)^m>(1,b)^m,$$

так как $m<n$ и $\beta>1$. Отсюда

$$\begin{aligned}u_{m/n}((\beta,0),(1,a))=|((|x|\vee|y|)^{-1}(1,b)^n(|x|\vee|y|)\wedge(1,b)^m)\\ \times(|x|\vee|y|)^{-1}(1,b)^{-n}(|x|\vee|y|)|=\\ =|(1,b)^m(\beta,0)^{-1}(1,b)^{-n}(\beta,0)|>e\end{aligned}$$

и

$$(\beta,0)^{-1}u_{m/n}((\beta,0),(1,a))(\beta,0)<u^k_{m/n}((\beta,0),(1,a))$$

при натуральных $k>\beta$. Следовательно, тождества а) из $\Sigma_{m\,n}$ нарушаются на (T_β, P_β) при $k>\beta$.

Теорема 1. *l-многообразие $V_{m/n}$ не имеет независимого базиса тождеств.*

Доказательство. Рассмотрим l-многообразие $W_{m/n}$, определяемое тождествами:

$$\begin{cases}\text{а)}\ (|x|\vee|y|)^{-1}u_{m/n}(x,y)(|x|\vee|y|)\wedge u^3_{m/n}(x,y)=u^3_{m/n}(x,y),\\ \text{б)}\ (x\wedge y^{-1}x^{-1}y)\vee e=e.\end{cases}$$

Покажем, что не существует l-многообразия V, накрывающего $V_{m\,n}$ в решётке l-многообразий L и такого, что $W_{m/n}\supseteq V\supseteq V_{m/n}$. Пусть, напротив, V-такое l-многообразие. Так как в V выполнено тождество *б)*, то *V является* o-аппроксимируемым l-многообразием и, значит, однозначно определяется своими линейно упорядоченными группами (см. [1]). Поэтому существует линейно упорядоченная группа $(G, P)\in V$ и $x, y\in G$, такие, что

1) $(|x|\vee|y|)^{-1}u_{m/n}(x, y)(|x|\vee|y|)\wedge u^3_{m/n}(x, y)=u^3_{m/n}(x, y)$,

2) $(|x|\vee|y|)^{-1}u_{m/n}(x, y)(|x|\vee|y|)\wedge u^k_{m/n}(x, y)\neq u^k_{m/n}(x, y)$ и $k>3$.

Отсюда следует, что элементы $u_{m/n}(x, y)$ и $(|x|\vee|y|)^{-1}u_{m/n}(x, y)(|x|\vee|y|)$ архимедово эквивалентны. Поэтому в системе выпуклых подгрупп линейно упорядоченной группы (G, P), скачок выпуклых подгрупп $\bar{G}_\alpha\supset G_\alpha$, определяемый элементом $u_{m/n}(x, y)$ инвариантен относительно сопряжений элементом $(|x|\vee|y|)$. Пусть K-подгруппа G, порожденная элементами $u_{m/n}(x, y)$ и $(|x|\vee|y|)$, упорядоченная линейно относительно индуцированного порядка. Положим $K_\alpha=K\cap G_\alpha$, $\bar{K}_\alpha=K\cap\bar{G}_\alpha$. Очевидно, что K_α, $\bar{K}_\alpha$ нормальны в K. Тогда в линейно упорядоченной фактор-группе $\bar{K}=K/K_\alpha$ подгруппа $\bar{A}=\bar{K}_\alpha/$ $/K_\alpha$ является выпуклой, инвариантной, архимедовой. Ввиду неравенства 1) группа $\bar{K}$ неабелева. Фактор-группа $\bar{K}/\bar{A}$ — бесконечная циклическая группа. Значит, по лемме 1 из [1] линейно упорядоченная группа $\bar{K}$ порядково изоморфна линейно упорядоченной группе (T_β, P_β) для некоторого $3\leqslant\beta\leqslant k$. Тогда $\mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)\supset\mathrm{var}_l(T_{\beta^2}, P_{\beta^2})$, где $(T_{\beta^2}, P_{\beta^2})$ — подгруппа линейно упорядоченной группы (T_β, P_β), порожденная множеством $\{(\beta^2, 0), A'_\beta\}$. Действительно, существует такое натуральное число p, что $\beta<p<\beta^2$. Тогда непосредственная проверка показывает, что тождество

$$(|x|\vee|y|)^{-1}|[x, y]|(|x|\vee|y|)\wedge|[x, y]|^p=|[x, y]|^p$$

справедливо на $(T_{\beta^2}, P_{\beta^2})$ и нарушается на (T_β, P_β) при $x=(\beta, 0)$, $y=(1, a)$, где $a\neq 0$. По лемме, $(T_\beta, P_\beta)\bar{\in} V_{m/n}$, $(T_{\beta^2}, P_{\beta^2})\bar{\in} V_{m/n}$, значит,

$$V=V_{m/n}\vee\mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)=V_{m/n}\vee\mathrm{var}_l(T_{\beta^2}, P_{\beta^2}).$$

Но хорошо известно (см. [1]), что если линейно упорядоченная группа $(T_\beta, P_\beta)\in V=V_{m/n}\vee\mathrm{var}_l(T_{\beta^2}, P_{\beta^2})$, то $(T_\beta, P_\beta)\in V_{m/n}$ или $(T_\beta, P_\beta)\in\mathrm{var}_l(T_{\beta^2}, P_{\beta^2})$. Оба включения невозможны. Значит $V_{m/n}$ не имеет накрытий, лежащих внутри $W_{m/n}$ и, следовательно, по предложению из [1], не имеет независимого базиса тождеств.

Если к системе тождеств $\Sigma_{m/n}$, определяющей l-многообразие $V_{m/n}$, добавить тождество (см. [1], §2)

$$(*)\qquad [|[x, y]|\wedge|t|, |[x_1, y_1]|\wedge|t_1|]=e,$$

то мы получим разрешимые ступени 2 l-многообразия $u_{m/n}$. Поскольку на линейно упорядоченных группах $(T_{m/n}, P_{m/n})$ $\left(0<\dfrac{m}{n}<1\right)$ и (T_β, P_β) ($\beta>1$, β — действительное число) это тождество выполнено очевидным образом, то все l-многообразия $u_{m/n}$ различны.

Теорема 2. *Двуступенно разрешимое l-многообразие* $\mathcal{U}_{m/n}$ *не имеет независимой базы тождеств.*

Доказательство. Обозначим через $W'_{m/n}$ — l-многообразие, определяемое тождествами l-многообразия $W_{m/n}$ и тождеством $(*)$. Дословное повторение доказательства теоремы 1 показывает, что l-многообразие $\mathcal{U}_{m/n}$ не имеет накрытий внутри l-многообразия $W'_{m/n}$ и, следовательно, не имеет независимого базиса тождеств.

ЛИТЕРАТУРА

[1] МЕДВЕДЕВ, Н. Я.: l-многообразия без независимого базиса тождеств. Math. Slovaca, 32, 1982, 417—425.

Поступило 23. 6. 1983

Алтайский Государственный университет
Кафедра алгебры и математической логики
пр. Социалистический 68
656 099, Барнаул – 99
СССР