N.Ya. Medvedev

О решетке радикалов конечнопорожденных l-групп

Mathematica Slovaca, Vol. 33 (1983), No. 2, 185--188

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136329

Math. Slovaca 33, 1983, No. 2, 185—188

О РЕШЕТКЕ РАДИКАЛОВ КОНЕЧНОПОРОЖДЁННЫХ l-ГРУПП

Н. Я. МЕДВЕДЕВ

В работе Я. Якубика [1] поставлен следующий вопрос: «Пусть G-конечнопорождённая решёточно упорядоченная группа. Может ли длина решётки радикалов G быть бесконечной?» В этой заметке доказано слуществование конечнопорождённых решёточно упорядоченных групп (l-групп) с бесконечной длиной решётки радикалов, что даёт положительный ответ на отмеченный выше вопрос.

Основные факты и определения по линейно и решёточно упорядоченным группам можно найти в [2] и [3], по теории групп – в [4] и [5].

Пусть $\emptyset \neq T$ – класс l-групп, обладающий следующими свойствами:

1) T замкнут относительно изоморфизмов;

2) если $H \in T$ и K-выпуклая l-подгруппа H, то $K \in T$;

3) если $G - l$-группа и если $\{H_i\}$ – семейство выпуклых l-подгрупп G, таких, что каждая H_i принадлежит T, тогда $\vee H_i$ также принадлежит T.

Тогда T называется радикальным классом [1]. Пусть T-радикальный класс, тогда единственным образом определяется радикальное отображение $\varrho(T)$ (детали в [1]), сопоставляющее каждой l-grиppe G наибольшую выпуклую l-подгруппы $\varrho(T)(G) \in T$, которая называется T-радикалом l-группы G. Отметим, что если H – выпуклая l – подгруппа G, тогда $\varrho(T)(H) = H \wedge \varrho(T)$ G) для любого радикального класса T. Примерами радикальных классов являются l-многообразия [6].

Пусть G и C – нетривиальные группы. Полное сплетение групп G и C ([5], стр. 482) определяется следующим образом. Возьмём

$$\overline{\prod_{c \in C}} G_c$$

Работа выполнена автором при прохождении научной стажировки на кафедре математики Высшей технической школы в Кошице.

– декартову степень группы G, состоящую из всех функций $\varphi\colon C \to G$, перемножаемых покомпонентно. Далее для каждого $c \in C$ определяем отображение

$$\overline{\prod_{c\in C}} G_C$$

в себя следующим образом $\beta\colon \varphi \to \varphi^C$ по правилу: $\varphi^C(y) = \varphi(yc)$ для всех $y \in C$. Тогда β является автоморфизмом группы

$$\overline{\prod_{c\in C}} G_C$$

и множество всех таких автоморфизмов есть группа, изоморфная C. Пусть P – расщепляемое расширение

$$\overline{\prod_{c\in C}} G_C$$

при помощи этой группы автоморфизмов. Умножение в группе P определяется по формуле

$$(c_1, \varphi) \cdot (c_2, \psi) = (c_1 c_2, \varphi^{c_2}\psi), \quad c_1, c_2 \in C; \quad \varphi, \psi \in \overline{\prod_{c\in C}} G_C$$

Тогда P называется полным сплетением групп G и C и обозначается $GWrC$. Пусть теперь G – l-группа, а C-линейно упорядочена. Определяем на $GWrC$ частичный порядок по следующему правилу: $(c, \varphi) \in GWrC \geqslant e$, если $c > e$ при линейном порядке C, либо $c = e$ и $\varphi(c) \geqslant e$ для каждого $c \in C$. Непосредственная проверка показывает, что относительно этого порядка $GWrC$ является l-группой. Через G_{C_0}, где $c_0 \in C$, обозначим множество всех $(e, \varphi) \in GWrC$, удовлетворяющих условию $\varphi(c) = e$, если $c \neq c_0$. Очевидно, что G_{C_0} – выпуклая l-подгруппа $GWrC$.

Лемма. *Любую счётную l-группу G можно изоморфно вложить в l-группу H с двумя порождающими, причём образ G при этом вложении – выпуклая l-подгруппа l-погруппа l-группы H.*

Доказательство. Пусть $C = (c)$, $B = (b)$ – бесконечные циклические группы. По теореме Неймана ([2], стр. 62) группа G изоморфно вложима в группу H_1 с двумя порождающими a, b, являющуюся подгруппой $(GWrC)WrB$, причём образ G при этом вложении совпадает с G_e в $(GWrC)_e$. Пусть теперь C и B линейно упорядочены, тогда $(GWrC)WrB$ – l-группа относительно порядка, определённого ранее, причём $(GWrC)_e$ – выпуклая l-подгруппа в $(GWrC)WrB$, а G_e – выпуклая l-подгруппа в $(GWrC)_e$. Поэтому G_e – выпуклая l-подгруппа в $(GWrC)WrB$. По теореме Неймана G_e содержится в подгруппе $H_1 \subseteq (GWrC)WrB$, для некоторого элемента

$a \in (GWrC)WrB$. Тогда тем более G_e содержится в l-подгруппе $H \subseteq (GWrC)(WrB$, порождённой элементами a и b. Но G_e – выпуклая l-подгруппа в $(GWrC)WrB$, поэтому G_e – выпуклая l-подгруппа в H.

Теорема. *Существует l-группа H с двумя порождающими, длина решётки радикалов которой бесконечна.*

Доказательство. Покажем, вначале, что существуют счётные l-группы с бесконечной длиной решётки радикалов. Действительно, как показано в [7], [8] существует счётая, бесконечная, строго убывающая цепь l-многообразий

$$V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset V_{n+1} \supset \ldots \quad (n \in N)$$

Поскольку $V_n \supset V_{n+1}$, то существуют конечнопорождённые l-группы G_n, такие, что $G_n \in V_n \setminus V_{n+1}$. Рассмотрим теперь l-группу

$$L = \prod_{n \in N} G_n,$$

являющуюся l-прямым произведением l-групп G_n. По отмеченному ранее каждое V_i $(i \in N)$ является радикальным классом. Очевидно, что $\varrho(V_i)(G_n) \supseteq \varrho(V_{i+1})(G_n)$ для каждых i, $n \in N$. Далее, по выбору G_n, $\varrho(V_n)(G_n) \neq \neq \varrho(V_{n+1})(G_n)$ для каждого $n \in N$. Используя брауэровость решётки l-идеалов и свойство радикала, отмеченное ранее, получаем

$$\varrho(V_i)(L) = \varrho(V_i)(L) \wedge \Big(\bigvee_{n \in N} G_n\Big) = \bigvee_{n \in N} (\varrho(V_i)(L) \wedge G_n) = \bigvee_{n \in N} \varrho(V_i)(G_n) =$$
$$= \prod_{n \in N} \varrho(V_i)(G_n)$$

Аналогично

$$\varrho(V_{i+1})(L) = \prod_{n \in N} \varrho(V_{i+1})(G_n)$$

Из установленных выше включений следует, что $\varrho(V_i)(L) \supset \varrho(V_{i+1})(L)$. Следовательно длина решётки радикалов l-группы L бесконечна. По лемме l-группа L изоморфно вложима в l-группу H с двумя порождающими, причём образ L при этом вложении является выпуклой l-подгруппой в H. Поскольку длина решётки радикалов выпуклой l-подгруппы меньше либо равна длины решётки радикалов l-группы, то H – искомая l-группа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] JAKUBÍK, J.: Radical mappings and radical classes of lattice ordered groups. Symposia Math. 21, 1977, 451—477.

[2] КОКОРИН, А. И., КОПЫТОВ, В. М.: Линейно упорядоченные группы. Москва, 1972.

[3] ФУКС, Л.: Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.

[4] КАПРАПОЛОВ, М. И., МЕРЗЛЯКОВ, Ю. И.: Основы теории групп. Москва 1972.
[5] КУРОШ, А. Г.: Теория групп. Москва, 1967.
[6] HOLLAND, C.: Each variety of l-groups is a torsian class. Czech. Math. J. 29 (1979), 11—12.
[7] КОПЫТОВ, В. М., МЕДВЕДЕВ, Н. Я.: О многообразиях решёточно упорядоченных групп. Алгебра и логика, 16 (1977), 417_423.
[8] МЕДВЕДЕВ, Н. Я.: К теории многообразий решёточно упорядоченных групп. Czech. Math. J. (в хечати).

Поступило 12. 3. 1981

Katedra matematiky Strojníckej fakulty
Vysoká škola technická
Švermova 9
040 01 Košice

Алтайский Государственный университет
Кафедра алгебры и математической логики
пр. Социалистический 68
656 099, Варнаул – 99
СССР