N.Ya. Medvedev

l-многообразия без независимого базиса тождеств

Mathematica Slovaca, Vol. 32 (1982), No. 4, 417--425

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136308

Math. Slovaca 32, 1982, No. 4, 417—425

l-МНОГООБРАЗИЯ БЕЗ НЕЗАВИСИМОГО БАЗИСА ТОЖДЕСТВ

Н. Я. МЕДВЕДЕВ[1])

Вопрос о существовании независимого базиса тождеств многообразий алгебраических систем неоднократно рассматривался ранее. Так, например, в [12] построен пример многообразия группоидов, не имеющего независимого базиса тождеств, аналогичное утверждение справедливо для полугрупп [13], для групп ответ на этот вопрос неизвестен [6] (проблема 4.64). В этой статье доказано существование бесконечного числа l-многообразий, не имеющих независимого базиса тождеств.

§ 1. Определения и вспомогательные результаты

Хорошо известно, что класс $\mathscr{L}$ всех решёточно упорядоченных групп (l-групп) является многообразием в сигнатуре $\langle \cdot, {}^{1}, e, \vee, \wedge \rangle$ l-многообразием). Множество L всех l-многообразий является дуально брауэровой решёткой относительно естественно определённых операций объединения и пересечения [9]. Пусть $\bar{V}$, $V \in L$, тогда говорят, что $\bar{V}$ накрывает V в решётке L, если $\bar{V} \supseteq V$ и из $\bar{V} \supseteq U \supseteq V$ следует $\bar{V} = U$ или $V = U$. Все l-многообразия, в которых выполнено тождество $(x_1 \wedge x_2{}^{1} x_1{}^{1} x_2) \vee e = e$, будем называть o — аппроксимируемыми l-многообразиями. Пусть Σ — некоторое множество тождеств сигнатуры $\langle \cdot, {}^{1}, e, \vee, \wedge \rangle$. Через $V(\Sigma)$ обозначим l-многообразие, определяемое этой системой тождеств. Множество тождеств Σ называется независимым, если из $\Sigma_1 \subset \Sigma$ следует $V(\Sigma_1) \supset V(\Sigma)$ для любого собственного подмножества Σ_1 (см. [8]). Говорят, что l-многообразие $V(\Sigma^\wedge)$ обладает независимым базисом тождеств, если существует независимое множество тождеств Σ такое, что $V(\Sigma) = V(\Sigma^\wedge)$. На связь между существованием независимого базиса тождеств l-многообразия V и накрытиями V в решётке l-многообразий L указывает следующее, хорошо известное (см. [2]).

---

[1]) Работа выполнена автором при прохождении научной стажировки на кафедре математики Высшей технической школы в Кошице.

Предложение. Пусть $V \subset W \subset \mathcal{L}$ — l-многообразия и пусть W конечнобазируемо. Если V имеет бесконечный независимый базис тождеств, то существует бесконечное число l многообразий U_i ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$), накрывающих V в решётке L, причём $U_i \subset W$.

Всюду буква N обозначает множество натуральных чисел, R — аддитивную группу действительных чисел, $\mathcal{L}A$ — l-многообразие абелевых l-групп. Группу G, наделённую линейным порядком P, будем обозначать (G, P) Операции объединения и пересечения в решётке L обозначаем $\mathbb{V}$ и $\mathbb{A}$ соответственно. Как обычно $|x| = x \vee x^{-1}$, $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$. $|a| \gg |b|$ означает, что $|a| > |b|^n$ при $n \in N$. Основные факты по линейно и решеточно упорядоченным группам можно найти в [1] и [5], по теории групп – в [4] и [7].

Пусть $0 \neq A_\beta$ — подгруппа аддитивной группы действительных чисел R, $1 \neq \beta$ — положительное действительное число, такое, что из $a \in A_\beta$ следует βa, $\beta^{-1}a \in A_\beta$. Пусть $B_\beta = (\beta)$ — бесконечная циклическая подгруппа мультипликативной группы положительных действительных чисел, порождённая числом β. Рассмотрим множество

$$T_\beta = \{(r, a) | r \in B_\beta = (\beta), a \in A_\beta\}$$

с операцией умножения

$$(r, a) \cdot (r', a') = (rr', r'a + a')$$

Считаем $T_\beta \ni (r, a) \geqslant e$, если $r = \beta^p$ и $p > 0$, либо $p = 0$ и $a \geqslant 0$. Тогда T_β — линейно упорядоченная группа. Пусть P_β — этот линейный порядок группы T_β. Отметим, что множество элементов T_β вида $(1, a)$, где $a \in A_\beta$, образует выпуклую инвариантную подгруппу, изоморфную A_β и при этом

$$(r, c)^{-1}(1, a)(r, c) = (1, ra).$$

Обозначим эту подгруппу A'_β. Множество элементов T_β вида $(r, 0)$, где $r \in B_\beta = (\beta)$, образует подгруппу B'_β, изоморфную B_β. Так как для произвольного элемента (r, a) группы T_β справедливо

$$(r, a) = (r, 0)(1, a),$$

то группа T_β есть полупрямое произведение A'_β и бесконечной циклической группы B'_β (см. [7], стр.336).

Лемма 1 (см. [11], лемма 1) *Пусть (G, P) — неабелева линейно упорядоченная группа, обладающая архимедовой, инвариантной, выпуклой подгруппой A, такой, что фактор-группа G/A — бесконечная циклическая группа. Тогда (G, P) изомофна линейно упорядоченной группе (T_β, P_β) для некоторого положительного числа $\beta \neq 1$ и $0 \neq A_\beta \subset R$.*

Лемма 2. *Пусть $U_\beta = \mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)$ — l-многообразие, порождённое линейно упорядоченной группой (T_β, P_β). Тогда существует l-многообразие U'_β, обладающее свойствами:* 1) $U'_\beta \subset U_\beta$, 2) $U'_\beta \neq \mathcal{L}A$.

Доказательство. Пусть $\beta > 1$. Тогда существуют натуральные числа k и n такие, что $\beta < n < \beta^k$. Рассмотрим подгруппу $T'_\beta \subset T_\beta$, где $T'_\beta = \{(r, a) | t \in B'_\beta = (\beta^k), a \in A_\beta\}$, линейно упорядоченную относительно индуцированного порядка $P'_\beta = P_\beta \cap T'_\beta$. Теперь в качестве U'_β можно взять $\mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)$. Действительно, так как T'_β неабелена, то $U'_\beta = \mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta) \neq LA$ и, поскольку (T'_β, P'_β) — l-подгруппа (T_β, P_β), то $U'_\beta \subseteq U_\beta$. Последнее включение является строгим, ввиду того, что тождество

$$1) \qquad (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)^{-1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|) \wedge \\ \wedge |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n = |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n$$

выполняется на линейно упорядоченной группе (T'_β, P'_β) и нарушается на линейно упорядоченной группе (T_β, P_β) при $x_2 = x_3 = (\beta, 0)$, $x_1 = (1, a)$, где $a > 0$.

Пусть теперь $0 < \beta < 1$. Тогда существуют $k, n \in N$, такие, что $\beta^{-1} < n < \beta^{-k}$. Полагаем $T'_\beta = \{(r, a) | r \in B'_\beta = (\beta^k), a \in A_\beta\}$ и $P'_\beta = T'_\beta \cap P_\beta$. В качестве U'_β можно взять $\mathrm{var}_l(T'_\beta, P'_\beta)$. Доказательство аналогично предыдущему, с той лишь разницей, что вместо тождества 1) надо рассмотреть тождество

$$2) \qquad (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|) |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)^{-1} \wedge \\ \wedge |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n = |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n$$

Следствие. $(T_\beta, P_\beta) \in U_\beta \setminus U'_\beta$.

Лемма 3. (см. [11], лемма 4). *Пусть V_1, V_2, V_3 — l-многообразия, $V_1 = V_2 \veebar V_3$ и (G, P) — линейно упорядоченная группа. Если $(G, P) \in V_1$, то $(G, P) \in V_2$ или $(G, P) \in V_3$.*

§2. l-многообразия V_1, $V_{1\prime}$

Пусть $V_1 = V(\Sigma_1)$ — l-многообразие, определяемое следующей системой тождеств Σ_1:

$$\begin{cases} \text{a)} \quad (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)^{-1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|) \wedge \\ \qquad \wedge |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n = |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n \quad (n \in N, n \geqslant 3), \\ \text{b)} \quad (x_1 \wedge x_2^{-1} x_1^{-1} x_2) \vee e = e. \end{cases}$$

V_1 рассматривалось ранее в [10]. Рассмотрим группу $G = A \,\mathrm{wr}\, B$, где A и B — линейно упорядоченные группы. Тогда (см. [5], стр. 16) $A \cong A_b$, где $b \in B$, любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = a_{b_1} \dots a_{b_k} b$, где $a_{b_i} \in A_{b_i}$,

$b \in B$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ при линеином порядке B и $a_e^b = a_b$. Считаем $g = a_{b_1} \ldots a_{b_k} b \in P \setminus e$, если $b > e$ в линеино упорядоченнои группе B, либо $b = e$ и $a_{b_k} > e$ в A_{b_k}. Отметим, что при этом линеином порядке $|a_b| \gg |a \ |$, если $b_1 > b$ и a_{b_1}, $a_{b_2} \neq e$. Назовем такои порядок группы G порядком типа (А). Пусть теперь $A = (a_0)$, $B = (b_0)$ — линейно упорядоченные бесконечные циклические группы, $G_1 = (a_0) \mathrm{wr} (b_0)$ и P_1 — линеиный порядок типа (А) на группе G_1. Непосредственная проверка показывает, что $(G_1, P_1) \in V_1$. Пусть $(G_i, P) \in V$ построена. Тогда полагаем $G_{i+1} - (c_i) \mathrm{wr}\ G_i$, где (c) — линеино упорядоченная бесконечная циклическая группа и P_{i+1} — линейный порядок типа (А) на G_{i+1}. Тогда $(G_{i+1}, P_{i+1}) \in V_1$ (см. [10], лемма 1). Так как все группы $G_1, G_2, \ldots, G, \ldots$ неабелевы, то $V_1 \neq \mathscr{L}A$

Лемма 4. *Пусть* $1 < \beta$ *— произвольное деиствительное число,* $0 \neq A_\beta$. *Тогда справедливы соотношения:* 1) $(T_\beta, P_\beta) \notin V_1$, 2) $V_1 \not\supseteq U_\beta$ – $\mathrm{var}\,(T_\beta, P_\beta)$.

Доказательство. Существует $n \in N$, такое, что $n > \beta + 3$. Тогда тождество

$$(|x_1| \vee |x \ | \vee |x_3|)^{-1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x \ |]| (|x_1| \vee |x \ | \vee |x \ |) \wedge$$
$$\wedge |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n = |[|x_1|, |x \ | \vee |x \ |]|^n$$

из системы Σ_1 нарушается на (T_β, P_β) при $x_2 = x_3 - (\beta, 0)$, $x_1 = (1, a)$, где $a \in A_\beta > 0$. Следовательно $(T_\beta, P_\beta) \notin V_1$ и $V_1 \not\supseteq U_\beta = \mathrm{var}_l(T_\beta \ P_\beta)$.

Лемма 4′. *Пусть* U'_β *— l-многообразие, определённое в доказательстве леммы 2. Тогда* $V_1 \not\supseteq U'_\beta$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Пусть $V_1^\wedge = V(\Sigma_1^\wedge)$ — l-многообразие, определяемое системои тождеств $\Sigma_1^\wedge$:

$$\begin{cases} \text{a)}_1' & (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)^{-1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x \ | \vee |x \ | \vee |x_3|) \wedge \\ & \wedge |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^3 = |[|x \ |, |x_1| \vee |x_2|]|^3 \\ \text{b)} & (x_1 \wedge x_2^{-1} x^{-1} x_2) \vee e = e \end{cases}$$

По определению $V_1 \supset V_1$ и V_1 конечнобазируемо

Лемма 5. $V_1^\wedge \supset V_1$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $V_1 \neq V_1$. Рассмотрим линейно упорядоченную группу (T_β, P_β), где $A_\beta = R$ — аддитивная группа деиствительных чисел и $\beta = 4$. Тогда непосредственная проверка показывает, что $(T_4, P_4) \in V_1^\wedge$, а по лемме 4 $(T_4, P_4) \notin V_1$.

Лемма 6. *Не существует l-многообразия U такого, что U накрывает* V_1 *в решётке L и* $U \subset V_1^\wedge$.

Доказательство. Пусть, напротив, существует l многообразие U, накрывающее V_1 и $U \subseteq V_1^\wedge$. Поскольку U — σ-аппроксимируемое l-многообразие, то существует линейно упорядоченная группа $(G, P) \in U \setminus V_1$ и $(G, P) \in V_1^{\wedge}$. Ледовательно, существуют такие $x_1, x_2, x_3 \in G$, $n \in N (n > 3)$, что:

$$1) \qquad (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)^{-1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|) \wedge \\ \wedge |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n \neq |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n,$$

$$2) \qquad (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)^{-1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|) \wedge \\ \wedge |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^3 = |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^3.$$

Из 1) и 2) следует:

$$3) (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)^{-1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)) < |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n,$$

$$4) (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)^{-1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|) \geqslant |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^3.$$

Положим $|[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| = a$, $|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3| = b$. Тогда 3) и 4) перепишутся следующим образом:

$$5) \qquad a^3 \leqslant b^{-1} ab < a^n.$$

Из неравенств 5) следует, что элементы a, $b^{-1}ab$ — архимедово эквивалентны и $a \neq e$ в G. Следовательно, скачок $\bar{V}_a \supset V_a$ выпуклых подгрупп в (G, P), определяемый элементом a, инвариантен относительно сопряжения элементом b. Рассмотрим подгруппу K группы G, порождённую элементами a и b, линейно упорядоченную относительно индуцированного порядка $Q = K \cap P$. Пусть $\bar{V}_a \cap K = \bar{A}_a$, $V_a \cap K = A_a$. Тогда A_a инвариантна в K. Рассмотрим фактор-группу $\bar{K} = K / A_a$, естественно линейно упорядоченную, $\bar{K} \supseteq \bar{A} = \bar{A}_a / A_a$ — выпуклая, архимедова, инвариантная подгруппа в $\bar{K}$. Поскольку фактор-группа $\bar{K} / \bar{A}$ — бесконечная циклическая группа и, как следует из неравенств 5), $\bar{K}$ неабелева, то по лемме 1 линейно упорядоченная группа K изоморфна некоторой линейно упорядоченной группе (T_β, P_β) при $\beta \geqslant 3$, $0 \neq A_\beta \subseteq R$. Значит, l-многообразие U содержит l-многообразие $U_\beta = \mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)$. По лемме 2 существует l-многообразие U'_β, такое, что $U'_\beta \subset U_\beta$ и $U'_\beta \neq \mathscr{L}A$. По лемме 4 и лемме 4′ $U_\beta \nsubseteq V_1$, $U'_\beta \nsubseteq V_1$, а по лемме 4 и следствию из леммы 2 $(T_\beta, P_\beta) \notin U'_\beta, V_1$. Тогда $U \supseteq U_\beta \veebar V_1 \supset V_1$ и $U \supseteq U'_\beta \veebar V_1 \supset V_1$. Поскольку U накрывает V_1, то $U = U_\beta \veebar V_1 = U'_\beta \veebar V_1$. Но $(T_\beta, P_\beta) \in U = U'_\beta \veebar V_1$, значит, по лемме 3, либо $(T_\beta, P_\beta) \in U'_\beta$, либо $(T_\beta, P_\beta) \in V_1$. Оба случая невозможны.

Следствие. *l-многообразие V_1 не допускает конечной базы тождеств.*

Из предложения §1 и леммы 6 следует

Теорема 1. *l-многообразие V_1 не допускает независимой базы тождеств.*

Определяем следующую последовательность коммутаторов (см. [3]) от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, где $S_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ и если $S_i(x_1, \ldots, x_k)$ уже определён и включает k переменных, то S_{t+1} является словом от $2(k+1)$ переменных и

$$S_{t+}(x , \ldots, x_{2(k+1)}) = [|S_t(x_1, \ldots, x_k)| \wedge |x_{k+1}|, |S_t(x_{k+2}, \ldots, x_{2k+1})| \wedge |x_{2(k+1)}|].$$

Fсли теперь к системе тождеств Σ, определяющих l-многообразие V_1, добавить тождество

$$\text{c)}_t \qquad S_t(x_1, \ldots, x_k) = e \quad (t \geqslant 2),$$

То мы получим t-ступенно разрешимое l-многообразие V_{1t}. Очевидно, что $V_1 \quad V \quad \subseteq \ldots \subseteq \quad V_{1t} \subseteq \ldots V_1$. Поскольку $(G_1, P_1) \in V_{12} \backslash LA$, $(G , P_2) \in V_{13} \backslash V_{12}, \ldots, (G_t, P_t) \in V_{1(t+1)} \backslash V_{1t}, \ldots$, то все l-многообразия V_{1t} различны. Обозначим систему тождеств, определяющих l-многообразие V_{1t}, через Σ_1 $(t \geqslant 2)$.

Пусть $V\hat{}_{1t} = V(\Sigma\hat{}_1)$ — l-многообразие, определяемое следующей системой тождеств:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)}' & (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|)^{1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x_1| \vee |x_2| \vee |x_3|) \wedge \\
& \wedge |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^3 = |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^3, \\
\text{b)} & (x_1 \wedge x_2^{1} x_1^{1} x_2) \vee e = e, \\
\text{c)}_t & S_t(x_1, \ldots, x_k) = e
\end{array}$$

Очевидно, что $V\hat{}_{1t}$ конечнобазируемо и $V\hat{}_{1t} \supseteq V_{1t}$. Поскольку линейно упорядоченная группа (T_4, P_4), определённая в доказательстве леммы 5, принадлежит $V\hat{}_t \backslash V_{1t}$, то $V_{1t} \supset V_{1t}$.

Следvющие утверждения доказываются аналогично лемме 6 и теореме 1.

Лемма 7. *Не существует l-многообразия U такого, что U накрывает V_{1t} в решётке L и $U \subset V\hat{}_{1t}$.*

Следствие. *V_{1t} не допускает конечной базы тождеств.*

Теорема 2. *l-многообразие V_{1t} не допускает независимой базы тождеств.*

§3. l-многообразия W_1, W_{1t}

Пусть $W_1 - V(\Sigma_1^0)$ — l-многообразие, определяемое следующей системой тождеств Σ_1^0:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{a)}_2 & (|x_1| \vee |x_2|)^{1} |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]| (|x_1| \vee |x_2|) \wedge |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n = \\
& = |[|x_1|, |x_1| \vee |x_2|]|^n \quad (n \in N, n \geqslant 3), \\
\text{b)} & (x_1 \wedge x_2^{1} x_1^{1} x_2) \vee e = e.
\end{array}\right.$$

Очевидно, что $W_1 \supset V_1$.

Лемма 8. $W_1 \supset V_1$.

Доказательство. Рассмотрим линейно упорядоченную группу $\overleftarrow{(G_1, P_1)\times(c)}$, являющуюся лексикографическим произведением линейно упорядоченной группы (G_1, P_1) и линейно упорядоченной бесконечной циклической группы (c). $\overleftarrow{(G_1, P_1)\times(c)} \notin V_1$, поскольку тождества из Σ_1 нарушаются на $\overleftarrow{(G_1, P_1)\times(c)}$ при $x_1 = a_0$, $x_2 = b_0$, $x_3 = c$. Непосредственная проверка показывает, что все тождества системы Σ_1^0 на $\overleftarrow{(G_1, P_1)\times(c)}$ справедливы.

Пусть $W_1^{\wedge} = V(\Sigma_1^{0\wedge})$ — l-многообразие, определяемое системой тождеств $\Sigma_1^{0\wedge}$:

$$\begin{cases} \text{a)}'_2 & (|x_1|\vee|x_2|)\ {}^{1}|[|x_1|,\ |x_1|\vee|x_2|]|(|x_1|\vee|x_2|)\wedge \\ & \wedge|[|x_1|,\ |x_1|\vee|x_2|]|^3 = |[|x_1|,\ |x_1|\vee|x_2|]|^3, \\ \text{b)} & (x_1\wedge x_2\,{}^{1}x_1\,{}^{1}x_2)\vee e = e. \end{cases}$$

Поскольку $(T_4, P_4)\in W_1^{\wedge}\setminus W_1$, то $W_1^{\wedge}\supset W_1$. Следующие утверждения доказываются аналогично лемме 6 и теореме 1.

Лемма 9. *Не существует l-многообразия U, накрывающего W_1 в решётке L и $W_1^{\wedge}\supseteq U$.*

Следствие. *W_1 не допускает конечной базы тождеств.*

Теорема 3. *l-многообразие W_1 не допускает независимой базы тождеств.*

Если к системе тождеств Σ_1^0, определяющих l-многообразие W_1, добавить тождество с$)_t$ (см. § 2), то мы получим систему тождеств Σ_{1t}^0, определяющих t-ступенно разрешимое l-многообразие W_{1t} и, поскольку $(G_t, P_t)\in W_{1(t+1)}\setminus W_{1t}$, то $W_{12}\subset W_{13}\subset\ldots\subset W_{1t}\subset\ldots\subset W_1$. Отметим также, что $W_{1t}\supset V_{1t}$, так как $\overleftarrow{(G_t, P_t)\times(c)}\in W_{1t}\setminus V_{1t}$ и $W_{1t}\not\supseteq V_{1k}$ при $k>t$, поскольку $(G_t, P_t)\in V_{1(t+1)}\setminus W_{1t}$.

Теорема 4. *l-многообразие W_{1t} не допускает независимой базы тождеств.*

§ 4. l-многообразия V_2, V_{2t}, W_2, W_{2t}

Рассмотрим группу $G = A \operatorname{wr} B$, где A и B — линейно упорядоченные группы. Тогда любой элемент $g\in G$ однозначно представим в виде $g = a_{b_1}\ldots a_{b_k}b$, где $a_{b_i}\in A_{b_i}$, $b\in B$, $b_1<b_2<\ldots<b_k$ при линейном порядке B. Считаем $g = a_{b_1}\ldots a_{b_k}b\in Q\setminus e$, если $b>e$ в линейном порядке группы B, либо $b=e$ и $a_{b_1}>e$ в линейно упорядоченной группе A_{b_1}. Отметим, что при этом линейном порядке группы $G = A\operatorname{wr}B$ имеет место $|a_{b_1}|\ll|a_{b_2}|$, если $b_1>b_2$ и $a_{b_1}, a_{b_2}\neq e$.

Назовём такой порядок группы G порядком типа (Б) Пусть теперь $A=(a\ )$, $B=(b_0)$ — линейно упорядоченные бесконечные циклические группы, $G_1=(a_0)\operatorname{wr}(b_0)$ и Q_1 — линейный порядок типа (Б) на группе G_1.

Пусть: 1) $V_2=V(\Sigma_2)$ — l-многообразие, определяемое следующей системой тождеств Σ_2:

$$\begin{cases} \text{a})_3 & (|x_1|\vee|x_2|\vee|x_3|)|[|x_1|,\ |x_1|\vee|x_3|]|(|x_1|\vee|x_2|\vee|x_3|)^{-1}\wedge \\ & \wedge|[|x_1|,\ |x_1|\vee|x_2|]|^n=|[|x_1|,\ |x_1|\vee|x_2|]|^n \quad (n\in N,\ n\geqslant 3), \\ \text{b}) & (x_1\wedge x_2^{-1}x_1^{-1}x_2)\vee e=e; \end{cases}$$

2) $W_2=V(\Sigma_2^0)$ — l-многообразие, определяемое системой тождеств Σ^0:

$$\begin{cases} \text{a})_4 & (|x_1|\vee|x_2|)|[|x_1|,\ |x_1|\vee|x_2|]|(|x_1|\vee|x_2|)^{-1}\wedge \\ & \wedge|[|x_1|,\ |x_{11}|\vee|x_2|]|^n=|[|x_1|,\ |x_1|\vee|x_2|]|^n \quad (n\in N,\ n\geqslant 3), \\ \text{b}) & (x_1\wedge x_2^{-1}x_1^{-1}x_2)\vee e=e. \end{cases}$$

Очевидно, что $W_2\supseteq V_2$. Непосредственная проверка показывает, что: 1) $(G_1,\ Q_1)\in V_2$ и, поскольку G_1 — неабелева, то $V_2\neq LA$, 2) $\overleftarrow{(G_1,\ Q_1)\times(c)}\in W_2\setminus V_2$.

Если к системам тождеств Σ_2 и Σ_2^0, определяющих l-многообразия V_2 и W_2, добавить тождество c)$_t$ (см. § 2), то мы получим системы тождество Σ_{2t} и Σ_{2t}^0. Пусть $V_{2t}=V(\Sigma_{2t})$, $W_{2t}=V(\Sigma_{2t}^0)$ — l-многообразия, определяемые этими системами тождеств. Рассмотрим группу $(G_1,\ Q_1)\in V_2$. Пусть (c_1) — линейно упорядоченная бесконечная циклическая группа, $G_2=(c_1)\operatorname{wr}G_1$ и Q_2 — линейный порядок типа (Б) на группе G_2. Тогда $(G_2,\ Q_2)\in V_2$. Пусть $(G_t,\ Q\ )\in V_2$ уже построена. Тогда полагаем $G_{t+1}=(c_t)\operatorname{wr}G$, где (c_t) — линейно упорядоченная бесконечная циклическая группа и Q_{t+1} — линейный порядок типа (Б) на G_{t+1}. Непосредственная проверка показывает, что $(G_{t+1},\ Q_{t\ 1})\in V_2$. Отметим, что $(G_t,\ Q_t)\in V_{2(t+1)}\setminus V_{2t}$, $W_{2(t+1)}\setminus W_{2t}$. Так как $\overleftarrow{(G_1,\ Q_1)\times(c)}\in W_{2t}\setminus V_{2t}$, то $W_{2t}\supset V_{2t}$. Из $(G_t,\ Q_t)\in V_{2(t+1)}\setminus W_{2t}$ следует $W_{2t}\not\supseteq V_{2k}$ при $k>t$. Отсюда получаем, что все l-многообразия V_{2t}, W_{2t} различны.

Теорема 5. *l-многообразия V_2, V_{2t}, W_2, W_{2t} не допускают независимой базы тождеств.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 1—4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ФУКС, Л.: Частично упорядоченные алгебраические системы Москва, 1965

[2] ГОРБУНОВ, В А.: Покрытия в решётках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость. Алгебра и Логика, 16, 5 (1977), 507—548.

[3] GLASS, A., HOLLAND, C., McCLEARLY, S.: The structure of l-group varieties. Algebra universalis, 10 (1980), 1—20.

[4] КАРГАПОЛОВ, М. И., МЕРЗЛЯКОВ, Ю. И.: Основы теории групп. Москва, 1972.
[5] КОКОРИН, А. И., КОПЫТОВ, В. М.: Линейно упорядоченные группы. Москва, 1972.
[6] КОУРОВСКАЯ ТЕТРАДЬ (нерешённые задачи теории групп). Новосибирск, 1978.
[7] КУРОШ, А. Г.: Теория групп. Москва, 1967.
[8] МАЛЬЦЕВ, А. И.: Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей. Сиб. мат. журнал, 8, 5 (1967), 1005—1014.
[9] MARTINEZ, J.: Varieties of lattice-ordered groups. Matz. Z., 137, 4 (1974), 265—284.
[10] МЕДВЕДЕВ, Н. Я.: К теории многообразий решёточно упорядоченных групп. Czech. Math. J. (предложено к печати).
[11] МЕДВЕДЕВ, Н. Я.: О решётке o-аппроксимируемых l-многообразий. Czech. Math. J. (предложено к печати).
[12] TARSKI, A.: Equational logic and equational theories of algebras. Contributions to Mathematical Logic. North-Holland, Amsterdam—London, 1968, 275—288.
[13] ТРАХТМАН, А. Н.: Многообразия полугрупп без неприводимого базиса тождеств. Матем. заметки, 21, 6 (1977), 865–871.

Поступило 23. 6. 1981

Katedra matematiky
Strojníckej fakulty VŠT
Švermova 9
041 87 Košice