Sergej Ševec

О невписуемости некоторых семейств полиэдров

Mathematica Slovaca, Vol. 32 (1982), No. 1, 23--34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136282

Math. Slovaca 32, 1982, No 1, 23—34

О НЕВПИСУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ПОЛИЭДРОВ

SERGEJ ŠEVEC

1. Введение

Пуст P — выпуклый трехмерный полиэдр (ниже просто полиэдр), $V(P)$ обозначает множество его вершин и $v(P) = \operatorname{card} V(P)$ их число. Основные свойства полиэдров описаны, например, в книге Б. Грюнбаума [1]. Обозначим через $s(P)$ наибольшее целое число $s \leq v(P)$, для которого существуют полиэдр P', изоморфный полиэдру P, и сфера S, окружающая P', такие, что s вершин полиэдра P' лежит на S. Если достигается равенство $s(P) = v(P)$, говорим, что полиэдр P вписуемый в сферу, в противном случае, что он невписуемый. В работе Б. Грюнбаума и Э. Юцовича [2] введен показатель $\varrho(\mathcal{G})$ степени невписуемости в сферу для (бесконечного) семейства $\mathcal{G}$ полиэдров:

$$\varrho(\mathcal{G}) = \liminf \frac{\log s(P)}{\log v(P)},$$

где P проходит неизоморфные полиэдры из семейства $\mathcal{G}$. Там же и доказано:

$$\varrho(M) \leq \frac{\log 2}{\log 3},$$

где M семейство всех полиэдров. Обозначим через $M(=i, j)$ семейство всех полиэдров, степени граней которых равны i и степени вершин которых не превышают j. Семейство $M(i, =j)$ определяется аналогично. Результаты настоящей статьи можно выразить в следующих шести утверждениях (пользуемся обозначением $\varrho(=i, j)$, $\varrho(i, =j)$ вместо сложного $\varrho(M(=i, j))$, $\varrho(M(i, =j)))$:

1. $\varrho(=5,5) \leq \log 2/\log 3$,
2. $\varrho(6,=4) \leq \log 2/\log 3$,
3. $\varrho(5,=5) \leq \log 2/\log 3$,
4. $\varrho(8,=3) \leq \log 2/\log 3$,
5. $\varrho(=4,6) \leq \log 2/\log 3$,
6. $\varrho(=3,9) \leq \log 2/\log 3$.

2. Предварительные рассуждения

Доказательства утверждений заключаются в построении бесконечных последовательностей неизоморфных полиэдров P_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, принадлежащих соответсвующему семейству $\mathcal{G}$, для которых:

$$s(P_n)\leqslant c_1+c_2\cdot 2^n, \quad v(P_n)=c_3+c_4\cdot 3^n,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 некоторые целые числа. Эти построения основаны на лемме 2, которая является расширением леммы 1. Последняя далее сразу вытекает из теоремы Э. Юцовича [3], которая является модификацией теоремы Э. Штеиница [5] о невписуемости полиэдра в сферу.

Лемма 1. *Пусть множество $V(P)$ верчин полиэдра P состоит из восьми вершин, которые можно разбить на два множества $W=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $T=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ таким образом, что в графе $G(P)$ полиэдра P с вершиной v_i, $1\leqslant i\leqslant 4$, смежны только вершины из $U_i=W-\{u_i\}$.*
Пусть S сфера, окружающая P.

Тогда, если P не является изоморфным кубу, то на S лежат не все четыре вершины из T.

Прежде чем сформулировать лемму 2, отметим некоторые свойства полиэдров. Пусть Q-полиэдр, $U(v)\subset V(Q)$ множество вершин, смежных в $G(Q)$ с вершиной $v\in V(Q)$. Символом $Z(v, Q)$ обозначим выпуклую оболочку объединения полупрямых $\overrightarrow{vu}$, $u\in U(v)$. Но вершина $v\in V(Q)$ инцидентна по крайней мере трем граням полиэдра Q и $Z(v, Q)$ является одновременно пересечением набора замкнутых полупространств $K(\alpha)\supset Q$, определенных плоскостями α граней полиэдра Q, инцидентных вершине v, и какой-нибудь внутренней точкой полиэдра Q. Если бы все вершины из $U(v)\subset V(Q)$ лежали вместе с вершиной $v\in V(Q)$ на одной плоскости, то на этой плоскости лежал бы весь $Z(v, Q)$ и, следовательно, тоже $Q\subset Z(v, Q)$, что противоречит трехразмерности Q. Отсюда получаем, что если множество $V\subset V(Q)$ замыкает в $G(Q)$ некоторую вершину $v\in V(Q)$ (то есть $V\supset\{v\}\cup U(v)$), то выпуклая оболочка множества V: $Q'=\operatorname{conv} V$ является полиэдром, $Q'\subset Q$ и $V(Q')=V$. Пусть множество $V\subset V(Q)$ таково. Плоскость α грани полиэдра Q, инцидентной вершине $v\in V(Q)$, содержит еще две других вершины, инцидентных этой грани и смежных с вершиной v. Если $\{v\}\cup U(v)\subset V$, то α содержит три различных вершины из $V(Q')=V$ и полупространство $K(\alpha)\supset Q$ содержит $Q'\subset Q$, значит, α является тоже плоскостью грани полиэдра Q'. Следовательно, $Z(v, Q)\supset Z(v, Q')$. Плоскости α двух граней полиэдра Q, инцидентных ребру $h=\operatorname{conv}\{v, u\}$, $u\in U(v)$, $\{v\}\cup U(v)\subset V$, являются плоскостями граней полиэдра Q', следовательно, отрезок $\operatorname{conv}\{v, u\}$, соединяющий вершины v, $u\in V(Q')=V$, лежит в двух гранях $Q'\cap\alpha$ полиэдра Q', значит, h является тоже ребром полиэдра Q'. Итак, для вершины $v\in V(Q)$, замкнутой в $G(Q)$ множеством V, имеем

$Z(v, Q) \subset Z(v, Q')$ и $Z(v, Q) = Z(v, Q')$. Отсюда ясно, что наборы ребер, или же плоскостей граней, инцидентных такой вершине v, для полиэдров Q и $Q' = \mathrm{conv}\ V$ совпадают.

Лемма 2. *Пусть множество $V(Q)$ вершин полиэдра Q является объединением пяти непустых непересекающихся множеств:*

$$V(Q) = W \cup \bigcup_i V_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 4,$$

где W состоит из четырех вершин u_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, и с вершинами из $V_i \subset V(Q)$ смежны в графе Γ(Ъ) только вершины из $U_i \cup V_i$, где $U_i = W - \{u_i\}$.

Пусть S-сфера, окружающая Q.

Тогда, если Q не является изоморфным кубу, то на S лежат вершины не из всех четырех множеств V_i.

Доказательство леммы 2. Пусть выполнены условия леммы 2 и пусть каждое из множеств $V_i \subset V(Q)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, содержит вершину v_i, лежащую на S. Из четырех этих вершин $v_i \in V_i$ составим множество T.

Покажем сначала, что если заменить одно из множеств V_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$, множеством $\{v_j\}$, $v_j \in V_j$, то соответствующее множество

$$V = W \cup \{v_j\} \cup \bigcup_i V_i, \qquad i \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant 4,$$

удовлетворяет предположению леммы 2 о множестве $V(Q)$. Поскольку с вершинами из V_j смежны в $G(Q)$ только вершины из $U_j \cup V_j$, то дополнительные вершины, принадлежащие множеству $V(Q) - (U_j \cup V_j) \neq \emptyset$, смежны в $G(Q)$ только с вершинами из $V(Q) - V_j \subset V$. Значит, $V \subset V(Q)$ замыкает в графе $G(Q)$ каждую вершину из $V(Q) - (U_j \cup V_j)$. Из рассуждений, приведенных перед леммой 2, следует во-первых, что $Q' = \mathrm{conv}\ V$ является полиэдром, $Q' \subset Q$ и $V(Q') = V$, во-вторых, что со всякой вершиной из $V_i \subset V(Q')$, $i \neq j$, соединены ребром в графе $G(Q')$ те же самые вершины, как в $G(Q)$, и с вершиной v_j смежны в $G(Q')$ только вершины из $U_j \subset V(Q')$. Более того, если Q' изоморфен кубу, то вершина v_j трехвалентна, откуда следует, что в $G(Q')$ с нею будут смежными все три вершины из $U_j \subset V(Q')$,и всякая грань полиэдра Q' будет инцидентной по крайней мере одной вершине из $V(Q') - (U_j \cup \{v_j\}) = V(Q) - (U_j \cup V_j)$. Из приведенных до леммы 2 рассуждений следует, что плоскости всех граней такого полиэдра Q' являются плоскостями граней полиэдра Q. Но полиэдр является пересечением набора замкнутых полупространства, определенных плоскостями его граней и какой-нибудь его внутренней точкой. Так как Q и $Q' \subset Q$ имеют общую внутренню точку, то в рассматриваемом случае есть $Q' \supset Q$ и $Q' = Q$.

По прежнему ясно, что $P = \mathrm{conv}\,(W \cup T)$ является полиэдром, множество его вершин $V(P) = W \cup T$ удовлетворяет предположению леммы 1 и если P изоморфен кубу, то $P = Q$. Следовательно, если Q не является изоморфным кубу, то в силу леммы 1 на S, окружающей $P \subset Q$, лежат не все четыре вершины из T, и так мы приходим к противоречию с построением множества T. Лемма 2 доказана.

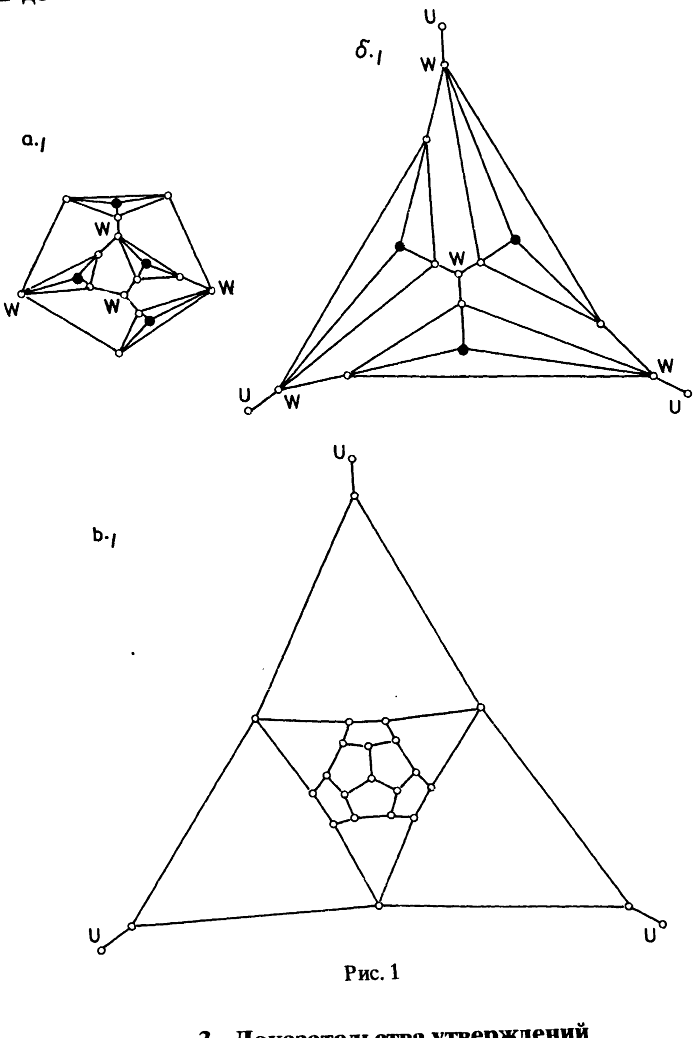

Рис. 1

3. Доказательства утверждений

Эти доказательства проводятся по одинаковой схеме, которую проиллюстрируем на доказательстве первого утверждения.

Доказательство утверждения 1. Требуемые последовательности полиэдров P_n, Q_{n+1}, $n = 0, 1, 2, \ldots$, получим следующим образом: 1. P_0 — какой-либо полиэдр, множество вершин которого удовлетворяет предположению леммы 2 по отношению к какой-то четверке $W \subset V(P_0)$; граф $G(P_0)$ изображен на рисунке 1. а, вершины из W указаны буквой W. Четыре трехвалентных вершины v_i, принадлежащих соответствующим множествам $V_i \subset V(P_0)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, (на рис. 1. а указаны полными колечками), образуют в графе $G(P_0)$ *независимое* множество $T_0 \subset V(P_0)$ (то есть $T_0 \neq \emptyset$ и различным вершинам из T_0 инцидентны различные ребра графа $G(P_0)$); 2. P_{n+1} (или Q_{n+1}) получим из P_n в результате постепенного отсечения всех вершин из независимого множества $T_n \subset V(P_n)$, причем так, что вершина $v \in T_n$ вместе с тройкой инцидентных ребер заменится непустым множеством $V(v)$ новых вершин и новыми ребрами, соединяющими вершины из $V(v)$ с вершинами из $U(v) \cup V(v)$, где $U(v)$ есть тройка вершин из $V(P_n) - T_n$ смежных в $G(P_n)$ с $v \in T_n$; граф $H(v)$ (или $\bar{H}(v)$), состоящий из этих ребер, изображен на рис. 1. б (или 1. в), вершины из $U(v)$ указаны буквой U. Из этого построения видно: во-первых, что $V(P_{n+1})$ (или $V(Q_{n+1})$) является объединением множества $V(P_n) - T_n$ и непустых непересекающихся множеств $V(v)$, $v \in T_n$, вершин, не принадлежащих $V(P_n) - T_n$; во-вторых, что наборы ребер, инцидентных вершине из $V(v) \subset V(P_{n+1})$ (или $V(v) \subset V(Q_{n+1})$) для графов $H(v)$ (или $\bar{H}(v)$) и $G(P_{n+1})$ (или $G(Q_{n+1})$) совпадают. В графе $H(v)$ найдется четверка $W(v) \subset U(v) \cup V(v)$ вершин (они указаны на рис. 1. б буквой W), определяющая три непустых непересекающихся множества $V_i(v) \subset V(v) - W(v)$, $1 \leqslant i \leqq 3$, вершин, смежных в $H(v)$ только с вершинами из соответствующих отдельных надмножеств $U_i(v) \cup V_i(v)$, где $U_i(v) = W(v) - \{u_i\}$, $u_i \in W(v)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$; четвертая вершина $u_4 \in W(v)$ принадлежит множеству $V(v)$ и смежна в $H(v)$ только с вершинами

$$W(v) \cup \bigcup_i V_i(v), \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

Очевидно, что $V(P_{n+1})$ удовлетворяет предположению леммы 2 по отношению к множествам $W(v)$, $V_i(v)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, и дополнительному множеству

$$V_4(v) = V(P_{n+1}) - (W(v) \cup \bigcup_i V_i(v)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

Множество $T_{n+1} \subset V(P_{n+1})$ составляем из троек трехвалентных вершин $v_i \in V_i(v)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$; на рис. 1. б они указаны полными колечками.

Для этой конструкции определяем числа $t(P_n)$ и $w(P_n)$.

Определение. *Пусть Q-полиэдр и пусть Q не является изоморфным кубу. Пусть $G(Q)$ получен из $G(P_n)$ заменой каждой вершины $v \in T_n$ вместе с тройкой инцидентных ей ребер некоторыми непустыми непересекающимися множествами $V(v)$ вершин, не принадлежащих $V(P_n) - T_n$, и некоторыми ребрами, соединяющими вершины из $V(v)$ с вершинами из $U(v) \cup V(v)$.*

Пусть Q'-полиэдр, изоморфный Q.

Обозначим через $t(P_n)$ наибольшее целое число $t \leqslant \operatorname{card} T_n$, для которого существуют такие полиэдры Q, Q' и сфера S, окружающая Q', и t множеств $V(v) \subset V(Q)$, $v \in T_n$, содержащих вершину, которой отвечает (в данном изоморфизме полиэдров Q и Q') вершина, лежащая на S. Через $w(P_n)$ обозначим наибольше возможное число тех вершин из $V(P_n) - T_n$, которым отвечают вершины такого полиэдра Q', лежащие на (одной) сфере, окружающей Q'.

Из построения полиэдров P_{n+1}, Q_{n+1} вытекают во-первых соотношения (1) для вычисления $v(Q_{n+1})$:

$$\begin{aligned}&\operatorname{card} T_{n+1} = 3 \cdot \operatorname{card} T_n,\\ (1)\quad &\operatorname{card}(V(P_{n+1}) - T_{n+1}) = \operatorname{card}(V(P_n) - T_n) + (v(H) - 3) \cdot \operatorname{card} T_n,\\ &v(Q_{n+1}) = \operatorname{card}(V(P_n) - T_n) + v(\bar{H}) \cdot \operatorname{card} T_n;\end{aligned}$$

во-вторых соотношения (2) для вычисления оценки числа $s(Q_{n+1})$:

$$\begin{aligned}&t(P_{n+1}) \leqslant 2 \cdot t(P_n),\\ (2)\quad &w(P_{n+1}) \leqslant w(P_n) + w(H) \cdot t(P_n),\\ &s(Q_{n+1}) \leqslant w(P_n) + v(\bar{H}) \cdot t(P_n),\end{aligned}$$

где $v(H)=13$, $v(\bar{H})=22$ — числа вершин графов $H(v)$, $\bar{H}(v)$ соответственно, отличных от трех вершин из $U(v)$, и $w(H)=8$ есть число

$$\max_i ((v(H) - 3) - \operatorname{card}(V_i(v) - T_{n+1})), \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

Соотношения (1) очевидны. Чтобы проверить справедливость первых двух неравенств в (2), рассмотрим полиэдр Q, удовлетворяющий условиям определения чисел $w(P_{n+1})$, $t(P_{n+1})$ по отношению к множеству $V(P_{n+1}) - T_{n+1}$ и некоторым множествам $V(v_i) \subset V(Q)$, где $v_i \in V_i(v) \subset V(v) \subset V(P_{n+1})$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $v \in T_n$, проходит вершины из T_{n+1}. Из этих условий и явного факта, что $G(P_{n+1})$ удовлетворяет предположению из определения чисел $w(P_n)$, $t(P_n)$ по отношению к множеству $V(P_n) - T_n$ и множествам $V(v) \subset V(P_{n+1})$ вершин, возникших при отсечении вершин $v \in T_n$, следует, что Q удовлетворяет условиям определения чисел $w(P_n)$, $t(P_n)$ по отношению к множеству $V(P_n) - T_n$ и сложным множествам

$$V'(v) = (V(v) - T_{n+1}) \cup \bigcup_i V(v_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3,$$

полученным из $V(v)$ заменой трех вершин $v_i \in T_{n+1}$, принадлежащих множеству $V(v)$, соответствующими множествами $V(v_i)$. С другой стороны из того, что P_{n+1} удовлетворяет условиям леммы 2 по отношению к множеству $W(v)$ и множествам $V_j(v)$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, следует, что Q удовлетворяет этим условиям по отношению к множеству $W(v)$ и сложным множествам

$$V_j'(v) = (V_j(v) - T_{n+1}) \cup \bigcup_{v_i} V(v_i),$$

полученным из множеств $V_j(v)$ заменой вершин $v_i \in T_{n+1}$, принадлежащих $V_j(v)$, соответствующими им множествами $V(v_i)$. Следовательно, условиям леммы 2 удовлетворяет тоже изоморфный полиэдр Q' по отношению к множествам вершин, отвечающим множествам $W(v)$, $V_j'(v)$, $1 \leq j \leq 4$. Пусть сфера S окружает Q'. Как следует из определения чисел $w(P_n)$ и $t(P_n)$, тех вершин полиэдра Q', которые лежат на S и отвечают вершинам из $V(P_n) - T_n \subset V(P_{n+1}) - T_{n+1}$, не больше $w(P_n)$, а множеств $V'(v) \subset V(Q)$, $v \in T_n$, содержащих хоть одну вершину, которой отвечает вершина на S, не больше $t(P_n)$. Но если для каждой вершины $v \in T_n$ хоть одной вершине из $V_4'(v) \subset V(Q)$ отвечает вершина на S, то в силу леммы 2 наибольше $w(H) = 8$ вершинам из $v(H) - 3 = 10$ вершин из $V'(v) \subset V(Q)$, принадлежащих множеству $V(P_{n+1}) - T_{n+1}$, отвечают вершины на S и наибольше два из трех множеств $V(v_i) \subset V'(v)$, $1 \leq i \leq 3$, содержат вершины, которым отвечают вершины на S. Поэтому $w(P_{n+1}) \leq w(P_n) + w(H) \cdot t(P_n)$ и $t(P_{n+1}) \leq 2 \cdot t(P_n)$, или

$$w(P_{n+1}) \leq \operatorname{card} (W(v) \cup \bigcup_i (V_i(v) - T_{n+1})) = 10, \qquad 1 \leq i \leq 3,$$

и $t(P_{n+1}) \leq 3$. Так как $t(P_0)$ оцениваем (в силу леммы 2) числом 3, то при вычислении оценки чисел $t(P_{n+1})$ и $w(P_{n+1})$ будут использоваться только первые из этих неравенств. Поскольку Q_{n+1} удовлетворяет условиям определения чисел $w(P_n)$, $t(P_n)$, ясно, что и третье неравенство в (2) имеет место. Итоговая оценка числа $s(Q_{n+1})$ есть:

$$s(Q_{n+1}) \leq w(P_0) - w(H) \cdot t(P_0) + (w(H) + v(\bar{H})) \cdot t(P_0) \cdot 2^n.$$

По отношениям (1) вычисляем:

$$v(Q_{n+1}) = \operatorname{card} (V(P_0) - T_0) - \frac{v(H) - 3}{2} \cdot \operatorname{card} T_0 + \\ + \left(\frac{v(H) - 3}{2} + v(\bar{H})\right) \cdot \operatorname{card} T_0 \cdot 3^n.$$

Проверим еще, если $Q_{n+1} \in M(=5{,}5)$. Отсекая вершину $v \in T_n$ при построении полиэдров P_{n+1} или Q_{n+1} (см. рис. 1. б или 1. в):

(i) от грани, инцидентной вершине v, остается часть, инцидентна вместо вершине v $k = 3$ новым вершинам, из которых ни одна не принадлежит T_{n+1},

(ii) грань, неинцидентна вершине v, сохраняется и инцидентна тем же вершинам,

(iii) новые грани инцидентны только вершинам из $U(v) \cup V(v)$.

Из этого следует, что новая грань является гранью (с неизмененной степенью) полиэдра P_{n+1} или Q_{n+1}; степень грани f_n полиэдра P_n на $(k-1)\cdot r(f_n)$ меньше степени грани $f_{n+1}\subset f_n$ полиэдра P_{n+1} или Q_{n+1}, где $r(f_n)$ обозначает число вершин из $T_n\subset V(P_n)$, инцидентных грани f_n, и $r(f_{n+1})=0$. С другой стороны (см. рис. 1) ясно, что степени тех граней f_n, которые являются гранями полиэдра P_0 для $n=0$ и новыми гранями при построении полиэдра P_n (или Q_n) для $n>0$, *равны* именно числу $5-(k-1)\cdot r(f_n)$ (или 5). Поэтому степени тех граней полиэдра P_n, которые не инцидентны вершинам из T_n, и степени всех граней полиэдра Q_{n+1} *равны* числу *5*. Из построения полиэдра P_{n+1} (или Q_{n+1}) вытекает, что $V(P_n)-T_n$ является множеством всех вершин из $V(P_{n+1})$ (или $V(Q_{n+1})$), принадлежащих $V(P_n)$. Далее (см. рис. 1) ясно, что, отсекая вершину $v\in T_n$, степени остальных вершин полиэдра не изменяются, а степени новых вершин, возникающих при построении полиэдров P_{n+1} (или Q_{n+1}) и принадлежащих $V(P_{n+1})-T_{n+1}$ (или $V(Q_{n+1})$), так же, как и всех вершин полиэдра P_0, принадлежащих $V(P_0)-T_0$, *не превышают 5*. Поэтому степени тех вершин полиэдра P_n, которые принадлежат $V(P_n)-T_n$, и степени всех вершин полиэдра Q_{n+1} *не превышают 5*. Итак, $Q_{n+1}\in M(=5{,}5)$.

Следовательно:

$$\varrho(=5{,}5)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\log s(Q_{n+1})}{\log v(Q_{n+1})}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\log(-13+90\cdot 2^n)}{\log(-7+108\cdot 3^n)}=\frac{\log 2}{\log 3}.$$

Доказательства утверждений 2, 3. Требуемые последовательности полиэдров P_n и Q_{n+1}, $n=0,1,2,\ldots$, получим с помощью конструкции, схема которой описана в доказательстве утверждения 1; начальные полиэдры и отсечения вершин изображены для утверждения 2 на рис. 2 и для утверждения 3 на рис. 3, где вершины из T_n указаны полними колечками. Ясно, что полиэдр Q_{n+1} не изоморфен кубу. Как следует из схемы конструкции, для данных последовательностей имеют место соотношения (1), (2). Следовательно, имеет место и оценка:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log s(Q_{n+1})}{\log v(Q_{n+1})}\leqslant\frac{\log 2}{\log 3}.$$

Вычисление степеней граней аналогично вычислению, приведенному в доказательстве утвердения 1; надо положить $k=2$ и заменить слово «равны» словами «не превышают», а в случае утверждения 2 надо еще цифру «5» заменить цифрой «6». В случае утверждения 3 тоже вычисление степеней вершин аналогично вычислению, приведенному в доказательстве утверждения 1; надо заменить слова «не превышеют» словом «равны».

Вычисление степеней вершин требует в случае утверждения 2 более подробный анализ. Прежде всего обязательно отсечь при построении P_{n+1}, Q_{n+1} каждую вершину $v \in T_n$ таким образом, чтобы та вершина $u \in U(v)$, которая в графе $G(P_n)$ соединена с вершиной v указанным ребром (на рис. 2 обозначено цифрой 2), стала смежной с $k=2$ новыми вершинами из $V(v)$. Из

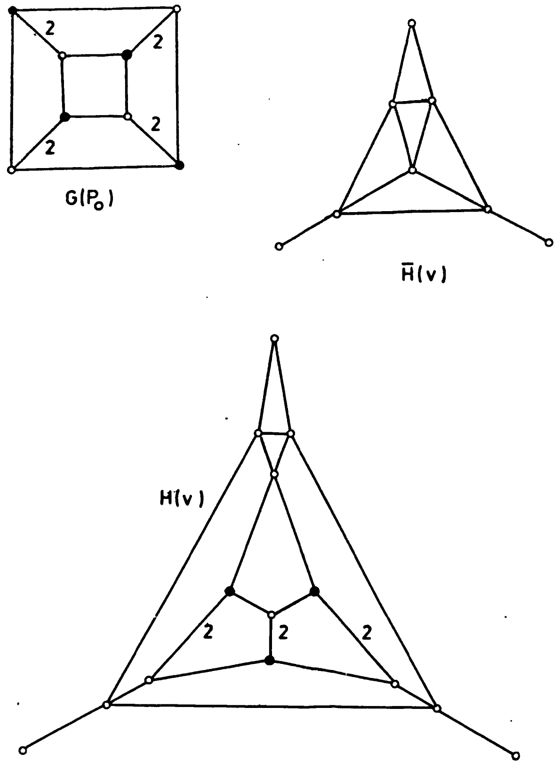

Рис. 2

построения P_{n+1}, Q_{n+1} вытекает, что $V(P_n)-T_n$ является множеством всех вершин из $V(P_{n+1})$ (или $V(Q_{n+1})$), принадлежащих $V(P_n)$. Далее, (см. рис. 2) ясно, что степень вершины $u \in V(P_n)-T_n$ является в $G(P_n)$ на

$$\sum_k (k-1)\cdot r_k^n(u), \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2,$$

меньше, чем в графах $G(P_{n+1})$, $G(Q_{n+1})$, где $r_2^n(u)$ (или $r_1^n(u)$) обозначает число вершин из T_n, соединенных в $G(P_n)$ с вершиной u указанным (или неуказанным) ребром, $u \in V(P_{n+1})-T_{n+1}$ и $r_2^{n+1}(u) = r_1^{n+1}(u)=0$. С другой стороны ясно (см. рис. 2), что степени всех вершин из $V(P_n)-T_n$ для $n=0$ и новых вершин, принадлежащих $V(P_n)-T_n$ (или $V(Q_n)$) для $n>0$, равны именно числу $4-r_2^n(u)$ (или 4). Итак, степени всех вершин u полиэдра P_n, которые принадлежат $V(P_n)-T_n$, равны тоже числу $4-r_2^n(u)$, а степени всех вершин полиэдра Q_{n+1} равны числу 4.

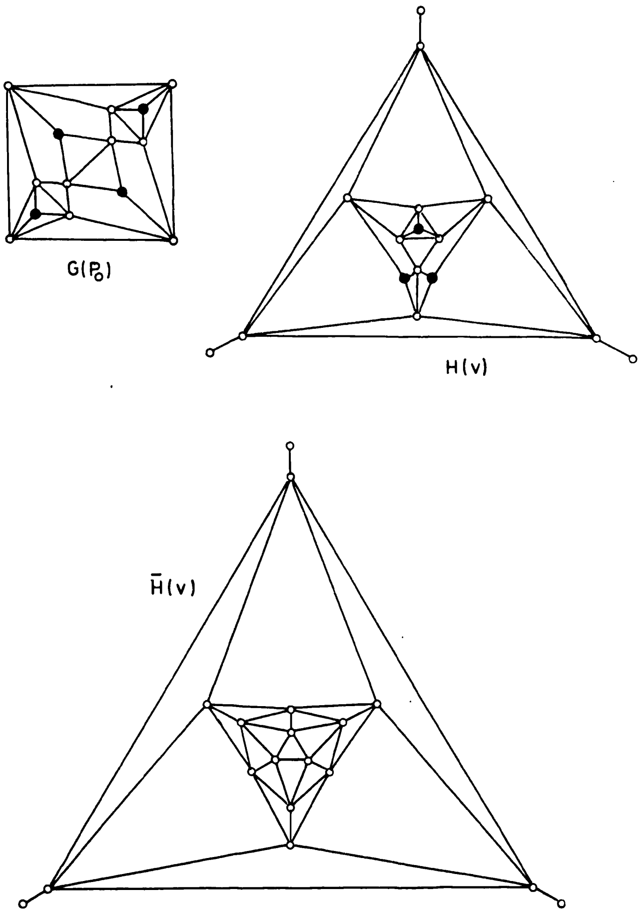

Рис. 3

Доказательства утверждений 4, 5, 6. Для доказательств этих утверждений достаточно конструировать только последовательности полиэдров P_n, $n=0, 1, 2, \ldots$. Схема конструкции этих полиэдров описана в доказательстве утверждения 1; начальные полиэдры и отсечения вершин для утверждений 4, 5, 6 изображены соответственно на рис. 4, 5, 6, вершины из T_n указаны полными колечками. Полиэдры P_n, $n>0$, не изоморфны кубу и из определения чисел $s(P_n)$, $w(P_n)$, $t(P_n)$ следует, что $s(P_n) \leqslant w(P_n) + t(P_n)$. Из этого неравенства и соотношений (2) вытекает:

$$s(P_n) \leqslant w(P_0) - w(H) \cdot t(P_0) + (w(H)+1) \cdot t(P_0) \cdot 2^n, \qquad n > 0,$$

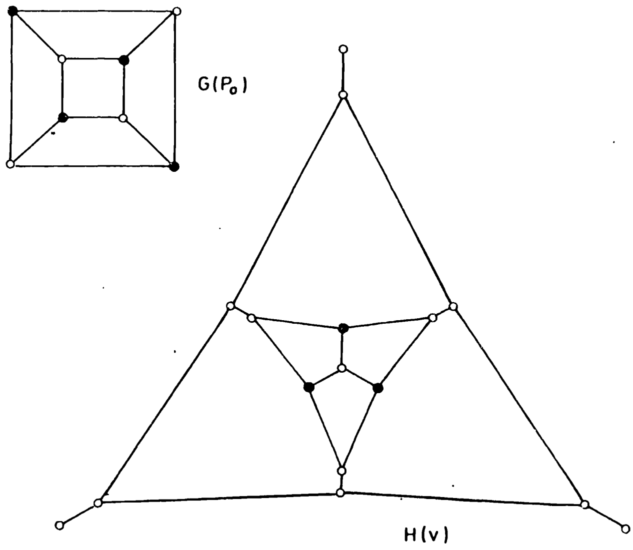

Рис. 4

Поскольку $v(P_n) = \mathrm{card}\,(V(P_n) - T_n) + \mathrm{card}\,T_n$, то имеет место равенство:

$$v(P_n) = \mathrm{card}\,(V(P_0) - T_0) - \frac{v(H)-3}{2} \cdot \mathrm{card}\,T_0 + \left(\frac{v(H)-3}{2} + 1\right) \cdot \mathrm{card}\,T_0 \cdot 3^n.$$

Следовательно, имеет место и оценка:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log s(P_n)}{\log v(P_n)} \leqslant \frac{\log 2}{\log 3}.$$

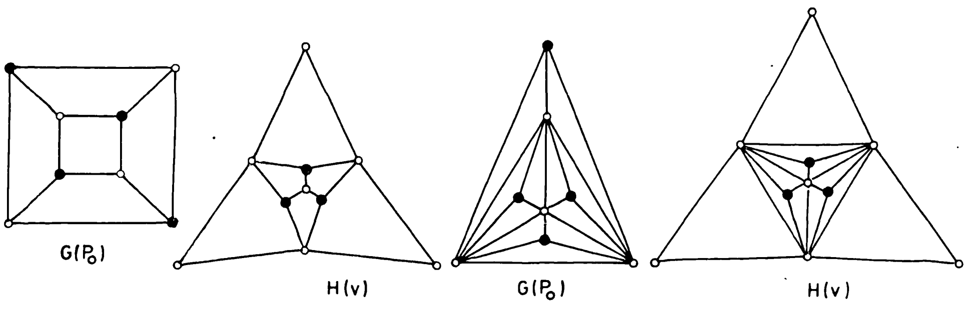

Рис. 5

Вычисление степеней граней и вершин аналогично соответствующим вычислениям в доказательствах утверждений 1 и 2.

4. Замечания

В работе Э. Юцовича [4] введен показатель $\sigma(\mathscr{G})$ степени невписуемости полиэдров в шаровой слой для (бесконечных) семейств $\mathscr{G}$ полиэдров и доказано, что $\sigma(M) \leqslant \log 6/\log 9$. На основании леммы 2 и ее дуальной формы можно показать (найдя подходящие последовательности полиэдров), что та же самая оценка имеет место и для семейств $M(=3,9)$, $M(=4,6)$, $M(=5,5)$ и соответствующих семейств дуальных полиэдров так же, как и для семейства автодуальных полиэдров. Понятно, что требуемые построения более сложны.

Хочу выразить большую благодарность проф. Э. Юцовичу за побудение меня к написанию этой статьи и советы в ее подготовке.

ЛИТЕРАТУРА

[1] GRÜNBAUM, B.: Convex Polytopes (Interscience, New York, 1967).

[2] GRÜNBAUM, B.—JUCOVIČ, E., On non-inscribable polytopes, Czechoslovak Math. J. 24 (99), 1974, 424—429.

[3] JUCOVIČ, E.: Bemerkung zu einem Satz von E. Steinitz, Elemente d. Math. 22, 1967, 39.

[4] JUCOVIČ, E.: On polyhedral surfaces which are not inscribable in spherical shells, Problémes combinatoires et théorie des graphes, Paris, 1978, 251—253.

[5] STEINITZ, E.: Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern, J. reine angew. Math. 159, 1928, 133—143.

Поступило 26. 10. 1979

Katedra matematiky
Prírodovedeckej fakulty UPJŠ
nám. Februárového víťazstva 9
041 54 Košice