Mathematica Slovaca

N.G. Kazakova; Drumi Dimitrov Bajnov

Краевая задача для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа

Mathematica Slovaca, Vol. 30 (1980), No. 2, 105--112

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136232`

Math. Slovaca 30, 1980, No. 2, 105—112

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Н. Г. КАЗАКОВА–Д. Д. БАЙНОВ

В последние годы в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом большое внимание уделяется функционально-дифференциальным уравнениям нейтрального типа. Трудности, возникающие при исследовании уравнений нейтрального типа традиционными методами связаны с тем, что рассматриваемые здесь операторы как правило не вполне непрерывны. Применение теории уплотняющих операторов [1] разрешает ряд вопросов, поставленных для таких уравнений [2]–[7].

В работе рассматривается краевая задача для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с линейным краевым условием. При естественных ограничениях доказано, что если у рассматриваемой задачи существует решение, то и у возмущенной задачи при малых значениях параметра существует тоже решение. При доказательстве используются понятия: мера некомпактности [1], вращение уплотняющих операторов [1], принцип неподвижной точки для уплотняющих операторов [1], и основная методика из [2].

Рассмотрим задачу о существовании решений краевой задачи

$$\begin{gathered} \dot{x}(t)=f(\mu, t, x_t, \dot{x}_t), \quad t\in[0, T] \\ x(t)=\varphi(t), \quad t\in[-h, 0] \\ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t_i)=0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mu\in[0, 1]$, оператор f действует из $[0, 1] \times [0, T] \times C([-h, 0], R^n) \times C([-h, 0], R^n)$ в R^n, $C([a, b], R^n)$ – пространство непрерывных функций с нормой

$$\|x\|_C=\max_{t\in[a, b]}|x(t)|;$$

под x_t понимается функция $x_t(s)=x(t+s)$, $s\in[-h, 0]$; аналогичный смысл имеет $\dot{x}_t$; α_i – действительные постоянные, $\alpha_1\neq 0$, $0=t_1<t_2<\ldots<t_N=T$ – фиксированные точки; $\varphi(0)=0$, $\varphi\in C^1([-h, 0], R^n)$, $C^1([a, b), R^n)$ – про-

странство непрерывно дифференцируемых функций x: $[a, b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_{C^1} = \|x\|_C + \|\dot{x}\|_C$.

Предположим, что выполнены следующие условия (А):

1. Оператор f непрерывен.
2. $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i t_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i = 0$.
3. $\dot{\varphi}_-(0) = f(\mu, 0, \varphi, \dot{\varphi})$ для любого $\mu \in [0, 1]$.

Пусть C_α^1 пространство непрерывно дифференцируемых функций x: $[0, T]\to R^n$ с нормой $\|x\|_{C_\alpha^1} = \|x\|_C + \|\dot{x}\|_C$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t_i) = 0; \quad C_{\alpha_0}^1 = \{x \in C_\alpha^1 : x(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{\varphi}(0)\}.$$

Для любых $\mu \in [0, 1]$, $x \in C_{\alpha_0}^1$ определим функцию $J(\mu, x)$: $R^1 \to R^n$ следующим образом:

$$J(\mu, x)(t) = \int_0^t f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s -$$

$$-\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i t_i} t + \frac{1}{\alpha_1}\right)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases}\varphi(t), & t \in [-h, 0]\\ x(t), & t \in [0, T]\end{cases}, \quad \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{cases}\dot{\varphi}(t), & t \in [-h, 0]\\ \dot{x}(t), & t \in [0, T]\end{cases}$$

и рассмотрим операторное уравнение

$$x = J(\mu, x), \quad x \in C_{\alpha_0}^1. \tag{3}$$

Лемма 1. *При выполнении условия* (А) *оператор* $J(\mu, x)$ *действует из* $[0, 1]\times C_{\alpha_0}^1$ *в* C_α^1 *и непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\mu \in [0, 1]$, $x \in C_{\alpha_0}^1$. Очевидно, $f(\mu, t, \tilde{x}_t, \dot{\tilde{x}}_t)$ непрерывно зависит от t. Следовательно, правая часть соотношения (2) имеет смысл и является непрерывно дифференцируемой функцией, причем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J(\mu, x)](t) = f(\mu, t, \tilde{x}_t, \dot{\tilde{x}}_t) -$$

$$-\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i t_i}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(u, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s. \tag{4}$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i J(\mu, x)(t_i) = 0.$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i J(\mu, x)(t_i)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s -$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_j t_j}\,t_i+\frac{1}{\alpha_1}\right)\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s-\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i t_i}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i t_i}+\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i}{\alpha_1}\right]\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s=0$$

в силу предположения

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=0.$$

Итак, $J\colon [0, 1]\times C^1_{\alpha_0}\to C^1_\alpha$.

Докажем непрерывность оператора $J(\mu, x)$. Для этой цели достаточно проверить, что из

$$\|x_k-x\|_{C^1_\alpha}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,\quad \mu_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\mu$$

следует

$$\|J(\mu_k, x_k)(0)-J(\mu, x)(0)\|\to 0,$$

$$\max_{t\in[0, T]}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J(\mu_k, x_k)](t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J(\mu, x)](t)\right\|\to 0.$$

В силу (4) это будет доказано, если установим, что при

$$\|x_k-x\|_{C_\alpha^1}\to 0,\quad \mu_k\to\mu$$

выполнено

$$\max_{t\in[0, T]}\|f(\mu_k, t, (\tilde{x}_k)_t, (\dot{\tilde{x}}_k)_t)-f(\mu, t, \tilde{x}_t, \dot{\tilde{x}}_t)\|\to 0.$$

Допустим, что это не так. Тогда найдутся $\varepsilon>0$, $x\in C^1_\alpha$, $\mu\in R^n$ и последовательности

$$\{t_k\in[0, T]\}_{k=1}^{\infty},\quad \{x_k\in C^1_\alpha\}_{k=1}^{\infty},\quad \{\mu_k\in R^n\}_{k=1}^{\infty}$$

такие, что

$$\|x_k-x\|_{C^1_\alpha}\to 0,\quad \mu_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\mu$$

и

$$|f(\mu_k, t_k, (\tilde{x}_k)_{t_k}, (\dot{\tilde{x}}_k)_{t_k})-f(\mu, t_k, \tilde{x}_{t_k}, \dot{\tilde{x}}_{t_k})|\geqslant\varepsilon>0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $t_k \to t_0$, $t_0 \in [0, T]$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последнем неравенстве, получаем противоречие

$$0 = |f(\mu, t_0, \tilde{x}_{t_0}, \dot{\tilde{x}}_{t_0}) - f(\mu, t_0, \tilde{x}_{t_0}, \dot{\tilde{x}}_{t_0})| \geqslant \varepsilon > 0.$$

Здесь имеется в виду, что f непрерывный оператор и еще что из сходимости $\|x_k - x\|_{C^1_\alpha} \to 0$ следуют сходимости

$$\max_{t \in [0, T]} \|\tilde{x}_k)_t - \tilde{x}_t\|_C \to 0, \quad \max_{t \in [0, T]} \|(\dot{\tilde{x}}_k)_t - \dot{\tilde{x}}_t\|_C \to 0.$$

Лемма 2. *При выполнении условия* (A) *функция* $x\colon [0, T] \to R^n$ *является решением краевой задачи* (1) *тогда и только токда, когда* $x \in C^1_{\alpha_0}$, $x = J(\mu, x)$.

Доказательство. Пусть x удовлетворяет (1). Очевидно,

$$x(t) = \int_0^t f(\mu, x, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\, \mathrm{d}s$$

и

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i x(t_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\, \mathrm{d}s = 0.$$

Следовательно,

$$x(t) = \int_0^t f(\mu, \delta, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\, \mathrm{d}s - \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^N \alpha_i t_i} t + \frac{1}{\alpha_1}\right] \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\, \mathrm{d}s,$$

т. е. $x \in C^1_{\alpha_0}$, $x = I(\mu_0 x)$.

Пусть теперь $x \in C^1_{\alpha_0}$, $x = I(\mu, x)$.

Тогда

$$x(t) = \int_0^t f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\, \mathrm{d}s - \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^N \alpha_i t_i} t + \frac{1}{\alpha_1}\right] \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^{t_i} (\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\, \mathrm{d}s$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=2}^N \alpha_i x(t_i) = \sum_{i=2}^N \alpha_i \int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\, \mathrm{d}s -$$

$$- \left[\sum_{i=2}^N \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^N \alpha_i t_j} t_i + \frac{1}{\alpha_2}\right)\right] \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^{t_i} (\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\, \mathrm{d}s =$$

$$= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_x)\, \mathrm{d}s -$$

$$-\left[\frac{\sum_{i=2}^{N}\alpha_i t_i}{\sum_{j=1}^{N}}+\frac{\sum_{i=2}^{N}\alpha_i}{\alpha_1}\right]\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s=$$

$$=\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i t_i}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_j t_j}-\frac{(-\alpha_1)}{\alpha_1}\right]\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^{t_i} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s=\sum_{i=2}^{N}\alpha_i x(t_i)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t_i)=0.$$

Итак,

$$x(t)=\int_0^{t} f(\mu, s, \tilde{x}_s, \dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s, \quad \sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t_i)=0.$$

Другими словами, x является решением задачи (1).

Определим функцию $\psi(\Omega)=\chi(\Omega')$ на множестве всех ограниченных подмножество Ω пространства $C([0, T], R^n)$, где $\Omega'=\{\dot{x}\colon x\in\Omega\}$, а χ – мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве $C([0, T], R^n)$. В [1] доказано, что ψ есть мера некомпактности.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (A). *Пусть оператор f непрерывен и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $k<1$ по последнему аргументу. Пусть кроме того множество $M\subset C^1_{\alpha_0}$ ограничено.*

Тогда оператор J: $[0, 1]\times M\to C^1_\alpha$ ψ – уплотняет.

Доказательство. Пусть $\Omega\subset M$. Множество $J([0, 1]\times M)$ ограничено в C^1_α. Действительно, в силу (2) нам достаточно доказать ограниченность множества

$$\{f(\mu, t, \tilde{x}_t, \dot{\tilde{x}}_t)\colon \mu\in[0, 1], t\in[0, T], x\in\Omega\}.$$

Так как оператор f непрерывен на $[0, 1]\times R^1\times C([-h, 0], R^n)\times C([-h, 0], R^n)$, а множество $\{(\mu, t, \tilde{x}_t)\colon \mu\in[0, 1], t\in[0, T], x\in\Omega\}$ относительно компактно в $[0, 1]\times R^1\times C([-h, 0], R^n)$, то существует постоянная N_Ω такая, что $\|f(\mu, t, \tilde{x}_t, 0)\| \leqslant N_\Omega(\mu\in[0, 1], t\in[0, T], x\in\Omega)$.

Поэтому

$$\|f(\mu, t, \tilde{x}_t, \dot{\tilde{x}}_t)\|\leqslant\|f(\mu, t, \tilde{x}_t, \dot{\tilde{x}}_t)-f(\mu, t, \tilde{x}_t, 0)\|+$$
$$+\|f(\mu, t, \tilde{x}_t, 0)\|\leqslant kM_\Omega+N_\Omega,$$

где M_Ω мажоранта элементов $x\in\Omega$ в C^2_α.

Пусть множество $\bar{\Omega}$ не компактно в C^1_α. Нам нужно доказать, что

$$\psi\{J([0,1]\times\Omega\}<\psi\{\Omega\},$$

т.е.

$$\chi\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J([0,1]\times\Omega)]\right\}<\chi\{\Omega'\}.$$

Рассмотрим оператор

$$[F(\mu,u,y)](t)=f(\mu,t,u+(Iy)_t,y_t),$$

где

$$(Iy)(t)=\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s-tP(y),$$

$$P(y)=\frac{1}{T}\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s,\quad u=y(0).$$

Оператор F χ-уплотняет [1], [2].

Положим

$$\Omega_\theta=\{x(0):x\in\Omega\},$$

$$Q=\left\{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^N\alpha_i t_i}\sum_{j=1}^N\alpha_j\int_0^{t_j}f(\mu,s,\tilde{x}_s,\dot{\tilde{x}}_s)\,\mathrm{d}s:x\in\Omega,\mu\in[0,1]\right\}.$$

Из (4) нетрудно видеть, что

$$[I([0,1]\times\Omega)]'\subseteq F([0,1]\times\Omega_0\times\Omega')-Q.$$

Поэтому в силу свойства уплотнения оператора F, вполне ограниченности множества Q и того, что множество Ω' не вполне ограничено, получаем

$$\chi\{[J([0,1]\times\Omega)]'\}\leqslant\chi\{F([0,1]\times\Omega_0\times\Omega')\}+\chi(Q)<\chi\{\Omega'\}.$$

Этим лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (A). *Пусть оператор f непрерывен по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по последней переменной с постоянной $k<1$.*

Пусть, кроме того, задача

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=f(0,t,x_t,\dot{x}_t),\quad t\in[0,T]\\ x(t)=\varphi(t),\quad t\in[-h,0]\\ \sum_{i=1}^N\alpha_i x(t_i)=0\end{gathered}$$

имеет решение x и при некотором $R>0$ оператор $J(0,\cdot)$ не имеет на границе

$\partial B(x, R)$ *сферы* $B(x, R)$ *неподвижных точек, причем вращение* $\gamma(I - J(0,\cdot)$, $\partial B(x, R)) \neq 0$.

Тогда при достаточно малых μ *задача* (1) *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Докажем сначала, что при условиях теоремы 1 оператор $J(\mu,\cdot)$ не имеет на $\partial B(x, R)$ неподвижных точек при малом μ. Допустим, что это не так. Тогда существуют последовательности $\{x_n\}$ и $\{\mu_n\}$, $x_n \in \partial B(x, R)$, $x_n = J(\mu_n, x_n)$ и $\mu_n \to 0$. В силу уплотнения оператора $J(\mu,\cdot)$ имеем оценку

$$\chi(\{x_n\}) = \chi(\{J(\mu_n, x_n)\}) \leqslant \chi(\{J([0, 1] \times \{x_n\})\}) < \chi(\{x_n\}).$$

Следовательно, множество $\{x_n\}$ компактно и без ограничения общности можно считать, что $x_n \to x_0$, $x_0 \in \partial B(x, R)$.

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $x_n = J(\mu_n, x_n)$. Тогда получаем, что $x_0 = J(0, x_0)$, в чем противоречие.

Итак, векторное поле $J(\mu,\cdot)$ при малых μ не имеет на границе сферы радиусом R неподвижных точек, причем в силу леммы 3 оно является ψ – уплотняющим. Следовательно при малых $\mu \geqslant 0$ существует вращение $\gamma(I - J(\mu,\cdot)$, $\partial B(x, R))$ (см. [1]) и

$$\gamma(I - J(0,\cdot), \partial B(x, R)) = \gamma(I - J(\mu,\cdot), \partial B(x, R)).$$

С другой стороны в силу условия теоремы $\gamma(I - J(0,\cdot), \partial B(x, R)) \neq 0$. Следовательно, оператор $J(\mu,\cdot)$ имеет (см. [1]) в $B(x, R)$ неподвижную точку, которая в силу леммы 2 является решением задачи (1).

Теорема доказана.

Рассмотрим оператор

$$f(\mu, t, x_t, \dot{x}_t) = \mathfrak{N}(t, x_t, \dot{x}_t) + \mu\mathfrak{M}(t, x_t, \dot{x}_t),$$

где оператор $\mathfrak{N}$ действует из $[0, T] \times C([-h, 0], R^n) \times C([-h, 0], R^n)$ в R^n, оператор $\mathfrak{M}$ действует из $[0, T] \times C([-h, 0], R^n) \times C([-h, 0], R^n)$ в R^n, μ – параметр.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Оператор* $\mathfrak{N}$ *непрерывен, аддитивен и однороден по второму и третьему аргументам.*
2. *Оператор* $\mathfrak{M}$ *непрерывен и удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу.*
3. $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i t_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0$.
4. $\|\mathfrak{N}(t, u, v)\| \leqslant q\|u\|_C + k\|v\|_C (k < 1)$ *для любого* u, $v \in C([-h, 0], R^n)$.
5. *Линейная краевая задача*

$$\dot{x}(t) = \mathfrak{N}(t, x_t, \dot{x}_t), \quad t \in [0, T]$$

$$x(t)=\varphi(t), \quad t\in[-h, 0]$$
$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t_i)=0$$

имеет решение x и при некотором $R>0$ оператор $J(0,\cdot)$ не имеет на границе $\partial B(x, R)$ сферы $B(x, R)$ неподвижных точек, причем вращение $\gamma(I-J(0,\cdot)$, $\partial B(x, R))\neq 0$.

Тогда при достаточно малых μ возмущенная задача

$$\dot{x}(t)=\mathfrak{N}(t, x_t, \dot{x}_t)+\mu\mathfrak{M}(t, x_t, \dot{x}_t), \quad t\in[0, T]$$
$$x(t)=\varphi(t), \quad t\in[-h, 0]$$
$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t_i)=0$$

имеет хотя одно решение.

Авторы выражают благодарность М. И. Каменскому и Р. Р. Ахмерову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] САДОВСКИЙ, Б. Н.: Предельно компактные и уплотняющие операторы, УМН, 27, I (163), 1972, 81–146.

[2] САДОВСКИЙ, Б. Н.: Применение топологических методов в теории периодических решений нелинейных дифференциально-операторных уравнений нейтрального типа, ДАН СССР, 200, 5, 1971, 1037–1040.

[3] САДОВСКИЙ, Б. Н.: Локальные теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, Пробл. мат. ан. сложн. сист., вып. 1, Воронж 1967, 70–74.

[4] САДОВСКИЙ, Б. Н.: О локальной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Пробл. мат. ан. сложн. сист., вып. 3, Воронеж 1968, 232–243.

[5] АВЕРИНА, Л. М.–САДОВСКИЙ, Б. Н.: О локальной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Пробл. мат. ан. сложн. сист., вып. 3, Воронеж 1971, 1–12.

[6] КАМЕНСКИЙ, Г. А.: Существование, единственность и непрерывная зависимост о начальных условий решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, Мат. сб., 55 (97), 4, 1961, 363–378.

[7] АХМЕРОВ, Р. Р.: К принципу усреднения для функциональнодифференциальных уравнений нейтрального типа, УМЖ, т. XXV, вып. 5, 1973, 579–588.

Поступило 11. 7. 1977

Оборище 23
София – 4
Болгария