Martin Gavalec; Danica Jakubíková-Studenovská

О ширине категории моноунарных алгебр

Mathematica Slovaca, Vol. 28 (1978), No. 3, 263--276

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136182

Math. Slovaca 28, 1978, No. 3, 263—276

О ШИРИНЕ КАТЕГОРИИ МОНОУНАРНЫХ АЛГЕБР[1])

МАРТИН ГАВАЛЕЦ, ДАНИЦА ЯКУБИКОВА

§1. Введение и обзор результатов

В работе исследуются системы моноунарных алгебр, удовлетворяющие некоторым условиям, касающимся гомоморфизмов.

Пусть M — множество моноунарных алгебр. Рассмотрим следующие свойства для M:

(α) Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in M$, $\mathcal{A}\neq\mathcal{B}$, тогда не существует изоморфизм $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

(α') Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in M$, $\mathcal{A}\neq\mathcal{B}$тогда не существует гомоморфизм $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

(β) Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in M$, $\mathcal{A}\neq\mathcal{B}$, тогда не существует гомоморфизм $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$..

Легко доказывается следующее утверждение (это утверждение вытекает также из теоремы, которую доказали Комер и Летурно [2]; ср. также Йонсон [5], Теорема 2.3.5):

(A) Для каждого кардинального числа ξ существует множество M связных моноунарных алгебр такое, что M *имеет свойство* (α) и $\operatorname{card} M=\xi$.

В §2 и §3 доказываются следующие утверждения:

(A′) Для каждого кардинального числа ξ существует множество M связных моноунарных алгебр такое, что M имеет свойство (α') и $\operatorname{card} M=\xi$.

Теорема 1. *Пусть M — множество связных моноунарных алгебр, обладающее свойством (β). Тогда* $\operatorname{card} M\leqq c$ *где c — мощность континуума.*

Теорема 2. *Существует множество M связных моноунарньщх алгебр такое, что M имеет свойство (β),* $\operatorname{card} M=c$ *и каждая алгебра $\mathcal{A}\in M$ счетна.*

Теорема 3. *Существует множество M' моноунарных алгебр такое, что M' имеет свойство (β) и* $\operatorname{card} M'=2^c$.

Из теорем 1 и 2 вытекают аналогичные утверждения для некоторого класса связных ориентированных графов (Теоремы 1′ и 2′).

Определим понятие ширины $\mathfrak{b}(\mathcal{C})$ для любой категории $\mathcal{C}$ с классом объектов C и с класом морфизмов H. Для $A_1, A_2\in C$ положим $A_1\leqq A_2$, если существует $h\in H$, такое, что h будет морфизм из A_1 в A_2. Тогда отношение $\leqq$

[1]) Некоторые результаты этой работы прочитала Д. Якубикова в своем докладе на Струденческой математической конференции (Братислава, июнь 1976).

Для каждого ординального числа α положим $\alpha < \infty$.

Лемма 1. *Пусть (A, f) — связная унарная алгебра, обладающая свойством (1), $C(A) = \emptyset$. Пусть (B, g) — связная унарная алгебра, $C(B) = \emptyset$. Тогда существует гомоморфизм алгебры (B, g) в алгебры (A, f).*

Доказательство. Имеет место $\operatorname{card} C(A) = 0 = \operatorname{card} C(B)$. Далее, существует $x_0' \in A$ такое, что $s(x_0') = \infty$. Пусть x_0 — любой элемент из B. Если $n \in N_0$, то

$$s(g^n(x_0)) \leqq \infty = s(f^n(x_0'))$$

(по определению A_∞). Теперь достаточно воспользоваться утверждением (T).

Лемма 2. *Пусть (A, f) — связная унарная алгебра и пусть $x_0 \in C(A)$. Пусть (B, g) — связная унарная алгебра, удовлетворяющая одному из следующих условий:*

(a) $C(B) = \emptyset$;

(б) *существует $y_0 \in C(B)$ такое, что $n(y_0)$ делится на $n(x_0)$.*

Тогда существует гомоморфизм алгебры (B, g) в алгебру (A, f).

Доказательство. В сулу (T1) имеет место $\operatorname{card} C(A) = n(x_0) \neq 0$. Если выполнено условие (a), то $\operatorname{card} C(B) = 0$ и $\operatorname{card} C(B)$ делится на $\operatorname{card} C(A)$ Если выполнено условие (б), тогда $\operatorname{card} C(B) = n(y_0)$ делится на $\operatorname{card} C(A) = n(x_0)$. В обоих случаях из (T) вытекает утверждение леммы.

Пусть теперь M — множество связных моноунарных алгебр, обладающих свойством (2). Пусть x_A — любой элемент из A такой, что $f^{-1}(x_A) = \emptyset$. Для каждого $n \in N_0$ обозначим $d_n^A = s(f^n(x_A))$. Рассмотрим следующее условие:

(γ) Пусть $(A, f), (B, g) \in M$, $(A, f) \neq (B, g)$, $m \in N_0$. Тогда существует $i \in N_0$ такое, что $d_i^A > d_{i+m}^B$.

Лемма 3. *Предположим, что (A, f) имеет свойство (2) для каждого $(A, f) \in M$. Множество M удовлетворяет условию (β) тогда и только тогда, когда M удовлетворяет условию (γ).*

Доказательство. Пусть (A, f), $(B, g) \in M$, $(A, f) \neq (B, g)$. Значит, $A_\infty = B_\infty = \emptyset$ откуда $\operatorname{card} C(A) = 0 = \operatorname{card} C(B)$. В силу (T) гомоморфизм алгебры (A, f) в (B, g) не существует именно тогда, когда для любых $x \in A$, $y \in B$ существует $n_0 \in N_0$ такое, что $s(f^{n_0}(x)) > s(g^{n_0}(y))$. Для того, чтобы имело место утверждение леммы, надо доказать:

Для любых $x \in A$, $y \in B$ существует $n_0 \in N_0$ такое, что $s(f^{n_0}(x) > s(g^{n_0}(y))$ тогда и только тогда, когда для любого $m \in N_0$ существует $i \in N_0$ такое, что $d_i^A > d_{i+m}^B$.

Пусть существует $m \in N_0$ такое, что для каждого $i \in N_0$ будет $d_i^A \leqq d_{i+m}^B$. Тогда для x_A, $g^m(x_B)$ и для любого $i \in N_0$ имеем

$$s(f^i(x_A)) = d_i^A \leqq d_{i+m}^B = s(g^i(g^m(x_B))) ,$$

что неверно.

Теперь предположим, что существуют $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ такие, что для каждого $n \in N_0$ имеет место $s(f^n(x_0)) \leqq s(g^n(y_0))$. Алгебры (A, b), (B, g) связны, следовательно, существуют m_1, n_1, m_2, $n_2 \in N_0$ такие, что $f^{m_1}(x_0) = f^{n_1}(x_A)$, $g^{m_2}(y_0) = g^{n_2}(x_B)$. Положим $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$. Тогда получается

$$f^{m_3}(x_0) = f^{n_1+(m_3-m_1)}(x_A) ,$$

$$g^{m_3}(y_0) = g^{n_2+(m_3-m_2)}(x_B) .$$

Если $m = n_2 + (m_3 - m_2)$, то для каждого $i \in N_0$ имеем

$$d_i^A \leqq d_{i+n_1+(m_3-m_1)}^A = s(f^{i+n_1+(m_3-m_1)}(x_A)) =$$

$$= s(f^{i+m_3}(x_0)) \leqq s(g^{i+m_3}(y_0)) = s(g^{i+n_2+(m_3-m_2)}(x_B)) = d_{i+m)}^B ,$$

что неверно.

Из теоремы, которую доказал Эрдеь и Радо [3], вытекает утверждение:

(ER) Пусть D — множество, card $D > c$. Обозначим через $[D]^2$ множество всех неупорядоченных пар $\{x, y\}$, где $x, y \in D$, $x \neq y$. Пусть $[D]^2 = \bigcup_{i \in I} S_i$, где $S_i \cap S_j = \emptyset$ для $i, j \in I$, $i = j$, причем card $I \leqq \aleph_0$. Тогда существуют несчетное множество $E \subseteq D$ и элемент $i \in I$ такие, что $\{x, y\} \in S_i$ для всех элементов $x, y \in E$, $x \neq y$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что M — множество связных моноунарных алгебр, обладаыщее свойством (β).

Из леммы 1 и леммы 2 вытекает, что если в M существует алгебра, имеющая свойство (1), то все остальные алгебры множества M должны содержать циклические элементы, периоды которыцх несравнимми относительно делимости, и в этом случае card $M \leqq \aleph_0$.

Пусть теперь каждая алгебра множества M обладает свойством (2). Так как M имеет свойство (β), то из леммы 3 вытекает, что M имеет свойство (γ). Предположим, что card $M > c$.

Пусть (A, f), $(B, g) \in M$, $(A, f) \neq (B, g)$. Обозначим через $k_1 = k_1(A, B)$ наименьшее натуральное число k_1 для которого будет $\alpha_{k_1}^A > \alpha_{k_1}^B$. По предположению множество M удовлетворяет условию (γ) и тогда такое число k_1 существует.

Пусть I — система всех множеств вида $\{k, l\}$, где k, $l \in N$, $k \neq l$. Для $i = \{k, l\} \in I$ обозначим через S_i систему всех неупорядоченных пар алгебр (A, f), $(B, g) \in M$ $(A, f) \neq (B, g)$ для которых имеет место $k_1(A, B) \in i$, $k_1(B, A) \in i$.

Таким образом мы получаем разбиение $\{S_i\}_{i \in I}$ множества $[M]^2$, причем card $I \leqq \aleph_0$. Тогда по теореме (ER) существуют элемент $i = \{k, l\} \in I$ и алгебры $(A^{(n)}, f_n) \in M$ для каждого $n \in N$, такие, что пара $((A^{(n)}, f_n), (A^{(m)}, f_m))$ принадлежит множеству S_i для каждого $n, m \in N$, $n \neq m$.

Мы можем предполагать, что $k < l$. Тогда k является наименьшим индексом, для которого $\alpha_k^{A^{(m)}} \neq \alpha_k^{A^{(n)}}$ для всех $m, n \in N$, $m \neq n$. Далее мы можем предполагать, что числа $\alpha_k^{A^{(n)}}$ $(n \in N)$ образуют возрастающую последовательность. Тогда последовательность $\{\alpha_l^{A^{(n)}}\}_{n \in N}$ должна быть убывающей, что невозможно, так как элементы этой последовательности являются ординальными числами. Следовательно, card $M \leqq c$.

Доказательство утверждения (A′). Обозначим через Ord класс всех ординальных чисел. При помощи трансфинитной индукции можно доказать, что для каждого $\alpha \in Ord$ существует унарная алгебра $(A^{(\alpha)}, f_\alpha)$, обладающся свойством (2) и содержащая элемент x_α такой, что $s(x_\alpha) = \alpha$.

Пусть $\lambda \in Ord$. При помощи индукции мы построим множество

$$M = \{(B^{(\alpha)}, g_\alpha) : \alpha < \lambda\}$$

связных моноунарных алгебр такое что $(B^{(\alpha)}, g_\alpha) \neq (B^{(\beta)}, g_\beta)$ для $\alpha, \beta \in Ord$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta < \lambda$, и что M обладает свойством (α'). Алгебры $(B^{(\alpha)}, g_\alpha)$ для $\alpha \in Ord$, $\alpha < \lambda$ определены следующим образом:

Положим $(B^{(0)}, g_0) = (A^{(0)}, f_0)$. Пусть $\alpha \in Ord$, $\alpha > 0$ и предположим, что мы уже построили алгебру $(B^{(\beta)}, g_\beta)$ для каждого $\beta \in Ord$, $\beta < \alpha$. Существует ординальное число γ такое, что для каждого $\beta < \alpha$ имеет место $s(x) < \gamma$ для каждого $x \in B^{(\beta)}$.[2])

Далее существует множество Y такое, что

$$Y \cap A^{(\gamma)} = \emptyset, \quad \text{card } Y > \text{card } B^{(\beta)}$$

для каждого $\beta < \alpha$. Обозначим $B^{(\alpha)} = A^{(\gamma)} \cup Y$ и на множестве $B^{(\alpha)}$ определим унарную операцию g_α следующим образом: для каждого $x \in A^{(\gamma)}$ положим $g_\alpha(x) = f_\gamma(x)$; далее положим $g_\alpha(y) = x_\gamma$ для каждого $y \in Y$.

Из этой конструкции вытекает, что для $\alpha, \beta \in Ord$ $\alpha < \beta < \lambda$ имеет место:

(а) card $B^{(\alpha)} <$ card $B^{(\beta)}$;

(б) существует элемент $x'_\beta \in B^{(\beta)}$ такой, что $s(x'_\beta) > s(z)$ для каждого $z \in B^{(\alpha)}$.

Из условия (а) мы получаем, что не существует отображение множества $B^{(\alpha)}$ на $B^{(\beta)}$. Далее, из (T2) и из условия (б) вытекает, что не существует гомоморфизм алгебры $(B^{(\beta)}, g_\beta)$ в алгебру $(B^{(\alpha)}, g_\alpha)$. Следовательно, множество M обладает свойством (α').

---

[2]) Существование такого γ вытекает из [9], лемма 3.8.

§ 3. Нижняя оценка для $\mathrm{b}(\mathscr{U})$ и для $\mathrm{b}(\mathscr{U}')$

Обозначим через R_1 множество всех действительных чисел бóльших чем 1. Пусть $r \in R_1$. Положим

$$[r] = \max\{n \in N : n \geqq r\} .$$

Для каждого $r \in R_1$ мы определим последовательность $\{\alpha_n(r)\}_{n \in N}$ натуральных чисел следующим образом: положим $\alpha_1(r) = 1$ и для каждого $n \in N$ положим

$$\alpha_{n+1}(r) = \alpha_n(r), \quad \text{если} \quad r \,.\, \alpha_n(r) \geqq n+1$$

и

$$\alpha_{n+1}(r) = [r \,.\, (n+1)], \quad \text{если} \quad r \,.\, \alpha_{n'}(r) < n+1 .$$

Лемма 4. *Пусть $r \in R_1, n \in N$. Тогда $\alpha_{n+1}(r) \geqq \alpha_n(r)$. Неравенство $>$ в предыдущем соотношении имеет место тогда и только тогда, если $r \,.\, \alpha_n(r) < n+1$.*

Доказательство. Если $r \,.\, \alpha_n(r) \geqq n+1$ то имеем $\alpha_{n+1}(r) = \alpha_n(r)$. Пусть $r \,.\, \alpha_n(r) < n+1$. Тогда имеет место

$$\alpha_n(r) < \frac{n+1}{r} < n+1 = [n+1] \leqq [r(n+1)] = \alpha_{n+1}(r) .$$

Лемма 5. *Для каждого $r \in R_1$ и каждого $n_1 \in N$ существует $n \in N$, $n > n_1$, такое, что $r \,.\, \alpha_{n-1}(r) < n$.*

Доказательство. Предположим, что существуют $r \in R_1$, $n_1 \in N$ такие, что имеет место $r \,.\, \alpha_{n-1}(r) \geqq n$ для каждого $n > n_1$. Тогда по определению $\alpha_n(r)$ будет $\alpha_n(r) = \alpha_{n-1}(r)$ для каждого $n > n_1$. Если мы обозначим $\alpha_n(r) = \alpha$ для $n > n_1$, то для каждого $n > n_1$ будет $r \,.\, \alpha \geqq n$, что невозможно.

Лемма 6. *Пусть $r \in R_1$. Последовательность $\{\alpha_n(r)\}_{n \in N}$ является не ограниченной.*

Доказательство. При помощи индукции мы докажем, что для каждого $p \in N$ существует $n \in N$ такое, что $\alpha_n(r) \geqq p$.

Для $p = 1$ имеет место $\alpha_1(r) \geqq 1$. Пусть $p > 1$ и предположим, что утверждение выполнено для каждого $p_1 \in N$, $p_1 < p$. Следовательно, существует $n_1 \in N$ такое, что $\alpha_{n_1}(r) \geqq p-1$. Из леммы 5 вытекает, что существует $n \in N$ такое, что $n > n_1$, $n > r \,.\, \alpha_{n-1}(r)$. Так как $r \,.\, \alpha_{n-1}(r) < n$, по лемме 4 имеем

$$\alpha_n(r) > \alpha_{n'-1}(r) \geqq \alpha_{n_1}(r) \geqq p-1 ,$$

следовательно, $\alpha_n(r) \geqq p$.

Лемма 7. *Пусть* $r \in R_1$. *Тогда* $[k \,.\, r] \geqq \alpha_k(r) \geqq \frac{k}{r}$ *для каждого* $k \in N$.

Доказательство. Пусть $k \in N$. Предположим, что $\alpha_k(r) < \frac{k}{r}$. Из леммы 4 вытекает $\alpha_{k-1}(r) \leqq \alpha_k(r)$; из этого и из определения $\alpha_n(r)$ получается

$$k > \frac{k}{r} > \alpha_k(r) = [k \,.\, r] \geqq k \;,$$

что невозможно.

Для доказательства неравенства $[k \,.\, r] \geqq \alpha_k(r)$ мы воспользуемся индукцией относительно числа k. Имеет место $[1 \,.\, r] = [r] \geqq 1 = \alpha_1(r)$. Пусть $k > 1$. Предположим, что для каждого $k_1 \in N$, $k_1 < k$ будет $[k_1 \,.\, r] \geqq \alpha_{k_1}(r)$. Тогда $[(k-1) \,.\, r] \geqq \alpha_{k-1}(r)$; следовательно, имеет место или $\alpha_k(r) = [k \,.\, r]$, или $\alpha_k(r) = \alpha_{k-1}(r) \leqq [(k-1) \,.\, r] \leqq [k \,.\, r]$.

Лемма 8. *Пусть* $r,\, r' \in R_1$, $r \neq r'$, $m \in N_0$. *Тогда существует* $i \in N$ *такое, что* $\alpha_{i+m}(r') + m < \alpha_i(r)$.

Доказательство. Сначала предположим, что $r > r'$. Выберем $i \in N$ такое, что

$$i > \frac{m \,.\, r' + m + 1}{r - r'},\; r \,.\, \alpha_{i-1}(r) < i.$$

Тогда будет

$$i \,.\, r - (i+m) \,.\, r' - m > 1 \;,$$

$$[i \,.\, r] > [(i+m) \,.\, r' + m] \,.$$

Следовательно, из определения $\alpha_n(r)$ и из леммы 7 получается

$$\alpha_{i+m}(r') + m \leqq [(i+m) \,.\, r'] + m =$$

$$= [(i+m) \,.\, r' + m] < [i \,.\, r] = \alpha_i(r) \,.$$

Теперь предположим, что $r < r'$. Возьмем $i \in N$,

$$i > \frac{(m+1) \,.\, r + m \,.\, r \,.\, r'}{r' - r}$$

с тем свойством, что $r' \,.\, \alpha_{i+m}(r') < i + m + 1$. Тогда имеем

$$\frac{i+m+1}{r'} + m < \frac{i}{r}$$

и из леммы 7 получается

$$\alpha_{i+m}(r') + m < \frac{i+m+1}{r'} + m < \frac{i}{r} \leqq \alpha_i(r) \,.$$

Доказательство леммы 8 окончено.

Пусть $\beta \in N_0$. Обозначим через $(A^{(\beta)}, f_\beta)$ моноунарную алгебру такую, что $A^{(\beta)} = \{x_n^\beta : n = 0, 1, \ldots, \beta\}, f_\beta(x_n^\beta) = x_{n+1}^\beta$ для $n = 0, 1, \ldots, \beta - 1$ и $f_\beta(x_\beta^\beta) = x_\beta^\beta$.

Лемма 9. *Пусть $\{\beta_n\}_{n \in N_0}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $\beta_0 = 0$. Существуют связная моноунарная алгебра (A, f) и элемент $x_A \in A$ такой, что $f^{-1}(x_A) = \emptyset$ и что $\alpha_n^A = \beta_n$ для каждого $n \in N_0$ (символ α_n^A имеет то самое значение как в §2).*

Доказательство. Пусть для каждого β_n, $n \in N_0$ унарная алгебра $(A^{(\beta_n)}, f_{\beta_n})$ определена таким же образом, как в предыдущем замечании, причем предполагается, что $A^{(\beta_n)} \cap A^{(\beta_m)} = \emptyset$ для всех $m, n \in N_0$, $m \neq n$.

Обозначим теперь $A = \bigcup_{n \in N_0} A^{(\beta_n)}$. Если $x \in A$, $x \neq x_{\beta n}^{\beta n}$ для каждого $n \in N_0$, то мы положим $f(x) = f_{\beta_n}(x)$; далее, положим

$$f(x_{\beta_n}^{\beta_n}) = x_{\beta_{n+1}}^{\beta_{n+1}}$$

для каждого $n \in N_0$.

Обозначим $x_A = x_{\beta_0}^{\beta_0}$. Имеет место $f^{-1}(x_A) = \emptyset$. Из конструкции очевидно, что унарная алгебра (A, f) удовлетворяет условию $\alpha_n^A = \beta_n$ для каждого $n \in N_0$.

Для каждого $r \in R_1$ и каждого $n \in N$ обозначим теперь $\beta_n(r) = \alpha_n(r) + n$, $\beta_0(r) = 0$. Последовательность $\{\beta_n(r)\}_{n \in N_0}$ удовлетворяет предположениям леммы 9; соответствующую связную моноунарную алгебру обозначим теперь $(A^{(r)}, f_r)$. Соответствующий элемент $x_A(r) \in A^{(r)}$ определяет последовательность ординальных чисел

$$\alpha_n^{A^{(r)}} = \beta_n(r), \quad n \in N_0.$$

Обозначим $M = \{(A^{(r)}, f_r) : r \in R_1\}$.

Доказательство теоремы 2. Докажем, что множество M обладает свойством (γ) (очевидно, что каждая алгебра, принадлежащая множеству M, имеет свойство (2)). Пусть $r, r' \in R_1$, $r \neq r'$. Из леммы 8 вытекает, что для каждого $m \in N_0$ существует $i \in N$ такое, что $\alpha_i(r) > \alpha_{i+m}(r') + m$, следовательно, имеет место

$$\beta_i(r) = \alpha_i(r) + i > \alpha_{i+m}(r') + m + i = \beta_{i+m}(r').$$

Этим доказано, что M обладает свойством (γ). Тогда по лемме 3 множество M имеет свойство (β).

Доказательство теоремы 3. В теореме 2 было доказано, что существует множество M связных моноунарных алгебр, удовлетворяющее условию (β) и такое, что $\operatorname{card} M = c$; положим $M = \{(B_r, g_r) : r \in R\}$, $\operatorname{card} R = c$. Мы можем предполагать, что для любых $r, s \in R$, $r \neq s$ будет $B_r \cap B_s = \emptyset$. Существуют такие множества M_1, M_2, что $M_1 \cup M_2 = M$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $\operatorname{card} M_1 = \operatorname{card} M_2 = c$. Пусть ψ — взаимно однозначное отображение множества M_1

на M_2. Для каждого множества $X \subseteq M_1$ положим $\tau(X) = X \cup (M_2 - \psi(X))$. Тогда для любых взаимно разных $X, Y \subseteq M_1$ имеет место $\tau(X) \nsubseteq \tau(Y)$ и $\tau(Y) \nsubseteq \tau(X)$ (т. е. множества $\tau(X)$ и $\tau(Y)$ несравнимы относительно включения, что мы обозначим $\tau(X) \| \tau(Y)$). Пусть теперь $P = \{\tau(X)\colon X \subseteq M_1\}$; значит, card $P = 2^c$. Для каждого $p = \tau(X) \in P$ положим

(**) $A_p = \bigcup_{r \in p} B_r$, $f_p(x) = x$ для каждого $x \in B_r$. Далее, обозначим $M' = \{(A_p, f_p)\colon p \in P\}$. Тогда M' — множество несвязных моноунарных алгебр. card $M' = 2^c$. Докажем, что множество M' *удовлетворяет условию* (β).

Пусть $p = \tau(X)$, $q = \tau(Y)$, $X, Y \subseteq M$, $X \neq Y$. Тогда $\tau(X) \| \tau(Y)$; существует $r \in \tau(X)$, $r \notin \tau(Y)$. Если s — любой элемент $\tau(Y)$, то не существует гомоморфизм (B_r, g_r) в (B_s, g_s) так как множество M удовлетворяет условию (б). Предположим, что существует гомоморфизм $H\colon (A_p, f_o) \to (A_q, f_q)$. В этом случае $H(B_r)$ — связная подалгебра алгебры (A_q, f_q). Каждая связная подалгебра алгебры (A_q, f_q) является подалгеброй некоторой из алгебр $(B_s, f_s) = (B_s, g_s)$, где $s \in \tau(Y)$. Следовательно, отображение H определяет гомоморфизм алгебры (B_r, g_r) в (B_s, g_s), что невозможно. Из этого вытекает, что множество M' удовлетворяет условию (β).

Примечание 1. В §1 мы определили квазиупрядочение $\leqq$ на классе всех моноунарных алгебр. Пусть M_1 имеет то самое значение, как и в доказательстве теоремы 3, и пусть (A_p, f_p) определено как в (**), причем теперь p — любое подмножество множества M_1. Из метода доказательства теоремы 3 вытекает, что для $p, q \subseteq M_1$ имеет место $(A_p, f_p) \leqq (A_q, f_q)$ тогда и только тогда, когда $p \subseteq q$. Пусть $\mathcal{M}_1$ — множество всех алгебр (A_p, f_p) где $p \subseteq M_1$. Из предыдущего получается, что квазиупорядоченное множество $(\mathcal{M}_1, \leqq)$ изоморфно системе всех подмножеств множества M_1 (частично упорядоченной относительно включения).

Примечание 2. Открытым остается следующий вопрос (поставленный П. Горалчиком): Для каких частично упорядоченных множеств S существует система $(\mathcal{M}, \leqq)$ связных моноунарных алгебр такая, что S и $(\mathcal{M}, \leqq)$ изоморфы?

§4. Гомоморфизмы k-графов

Частично упорядоченное множество L называется корнем, если L направлено вверх и если для каждого $x \in L$ множество $\{y \in L\colon y \geqq x\}$ является цепью.

Пусть $\mathcal{G} = (V, H)$ — ориентированный граф без петлей с множеством вершин V и с множеством ребер H. Для $v, v' \in V$ положим $v \leqq v'$, если или $v = v'$, или существуют элементы $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ такие, что $v_0 = v$, $v_n = v'$ и $(v_i, v_{i+1}) \in H$ для $i = 0, 1, \ldots, n = 1$.

Граф $\mathcal{G}=(V, H)$ будем называть k-графом, если множество V с отношением $\leqq$ является корнем без наибольшего элемента.

Пусть $\mathcal{G}=(V, H)$ *является k-графом, Тогда для каждого* $v \in V$ существует в точности один элемент $v' \in V$ такой, что $(v, v') \in H$. Определим на множестве V унарную операцию f так, что $f(v)=v'$ для каждого $v \in V$. Обозначим $(V, f)=u(\mathcal{G})$.

Наоборот, пусть $\mathcal{B}=(B, g)$ — унарная алгебра, обладающая свойством (2). Положим $V_1=B$ и пусть H_1 — множество всех упорядоченных пар $(v_1, g(v_1))$, причем $v_1 \in V_1$. Тогда $(V_1, H_1) = \mathcal{G}(\mathcal{B})$ является k-графом.

Следующие два утверждения вытекают непосредственно из предыдущих определений.

4.1. Пусть $\mathcal{G}_i=(V_i, H_i)$ $(i=1, 2)$ – k-графы и пусть h — отображение множества V_1 в множество V_2. Потом h будет гомоморфизмом графа $\mathcal{G}_1$ в $\mathcal{G}_2$ тогда и только тогда, когда h является гомоморфизмом алгебры $u(\mathcal{G}_1)$ в алгебру $u(\mathcal{G}_2)$.

4.2. Пусть $\mathcal{B}_i=(B_i, g_i)$ $(i=1,2)$ — моноунарные алгебры, обладающие свойством (2), и пусть h — отображение множества B_1 в B_2. Отображение h будет гомоморфизмом алгебры $\mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_2$ тогда и только тогда, когда h является гомоморфизмом графа $\mathcal{G}(\mathcal{B}_1)$ и $\mathcal{G}(\mathcal{B}_2)$.

Из 4.1 и теоремы 1 вытекает:

Теорема 1′, *Пусть M — множество* k*-графов. Предположим, что для любых двух графов $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2 \in M$, $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$ не существует гомоморфизм $\mathcal{G}_1$* в *$\mathcal{G}_2$. Потом* card $M \leqq c$.

Припомним, что все унарные алгебры, использованные в доказательстве теоремы 2, обладали свойством (2). Следовательно, из 4.2 и теоремы 2 получается:

Теорема 2′. *Существует множество M* k*-графов такое, что имеет место:*
(а) *если $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2 \in M$, $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$, то не существует гомоморфизм графа $\mathcal{G}_1$* в *$\mathcal{G}_2$;*
(б) *множество вершин каждого графа $\mathcal{G} \in M$ счетно;*
(в) card $M=c$.

§5. Представление частично упорядоченных множеств при помощи унарных операций

В работе [10] было доказано, что каждое счетное частично упорядоченное множество L, в котором никакое бесконечное подмножество не обладает нижней гранью, можно представить при помощи множества унарных операций. В работе [4] было доказано аналогичное утверждение для каждого счетного частично упорядоченного множества L.

Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — непустая система непустых множеств и пусть F — непустое множество. Предположим, что множества A_i взаимно дизъюнктны. Далее предположим, что для каждого $f \in F$ и каждого $i \in I$ будет f унарной операцией на множестве A_i. Рассмотрим систему $\mathscr{S}$ унарных алгебр (A_i, F).

Мы положим $f_1 \leqq f_2$ для $f_1, f_2 \in F$, если имеет место следующее условие:

Если $i, j \in I$ и если H — отображение множества A_i в A_j, которое является гомоморфизмом относительно операции f_2, тогда H будет гомоморфизмом тоже относительно операции f_1.

Очевидно, что отношение $\leqq$ является квазиупорядочением на множестве F. Обозначим $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = (F, \leqq)$.

Пусть L — частично упорядоченное множество. Будем говорить, что L представимо при помощи унарных операций, если существует система $\mathscr{S} = \{(A_i, F) : i \in I\}$ унарных алгебр такая, что $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ является частично упорядоченным множеством изоморфным с L.

Докажем следующее утверждение:

Лемма 10. *Пусть m — кардинальное число. Предположим, что существует множество M моноунарных алгебр, удовлетворяющее условию (β) и такое, что* $\operatorname{card} M = m$. *Тогда каждое частично упорядоченное множество $(L, \leqq)$, для которого* $\operatorname{card} L \leqq m$, *представимо при помощи унарных операций.*

Нам нужны некоторое вспомогательние рассуждения. Пусть $M = \{(A_p, f_p) : p \in P\}$, $\operatorname{card} P = m$ и пусть M удовлетворяет условию (β). Мы можем предполагать, что для $p, q \in P$, $p \neq q$ будет $A_p \cap A_q = \emptyset$. Тогда мы можем все операции f_p обозначать тем же символом f_1. Для каждого $p \in P$ и каждого $x \in A_p$ положим $f_0(x) = x$.

Обозначим $A = \bigcup_{p \in P} A_p$. Для каждого $T \subseteq P$ определим унарную операцию f_T на множестве F следующим образом:

$$f_T(x) = f_1(x) \quad \text{для} \quad x \in A_p,\ p \in T,$$

$$f_T(x) = f_0(x) \quad \text{для} \quad x \in A_p,\ p \in P - T.$$

Положим $F = \{f_T : T \subseteq P\}$, $\mathscr{S} = \{(A_p, F) : p \in P\}$. Рассмотрим квазиупорядоченное множество $\mathscr{F}(\mathscr{S})$.

Лемма 11. *Пусть $G \subseteq T \subseteq P$. Тогда $f_G \leqq f_T$.*

Доказательство. Пусть s, $r \in P$ и пусть $H: A_s \to A_r$ является гомоморфизмом относительно операции f_T. Надо проверить, что H является тоже гомоморфизмом относительно f_G.

Рассмотрим сначала случай $r = s$. Если $r \in G$, то $f_G(x) = f_T(x)$ для каждого $x \in A_r$ и H будет тоже гомоморфизмом относительно f_G. Если $r \in P - G$, тогда $f_G(x) = x$, $f_G(H(x)) = H(x)$ для каждого $x \in A_r$ и, следовательно, H является гомоморфизмом относительно f_G.

Пусть далее $r \neq s$ и предположим, что $s \in T$. Значит $r \in P - T$, так как в противном случае f_T на множестве A_s равно f_s, f_T на A_r совпадает с f_r и отображение H — гомоморфизм моноунарной алгебры (A_s, f_s) в (A_r, f_r), что противоречит предположению и том, что множество M удовлетворяет условию (β). Если $s \in T - G$, $r \in P - T$, то для каждого $x \in A_s$ имеет место $f_G(x) = x$ и $f_G(H(x)) = H(x)$ и тогда H является гомоморфизмом относительно f_G. Если $s \in G$, то на множестве A_r и A_s операция f_G совпадает с f_T, и утверждение очедно.

Пусть тепер $r \neq s$, $s \in P - T$. Если $x \in A_s$. то $f_T(x) = x$, и так как H — гомоморфизм относительно f_T, то для $y = H(x)$ имеем $f_T(y) = y$. Предположим, что $r \in T$, и рассмотрим отображение H_1 множества A_s в A_r, полагая $H_1(z) = y$ для каждого $z \in A_s$. Отображение H_1 является гомоморфизмом алгебры (A_s, f_s) в алгебру (A_r, f_r), потому что $H_1(f_s(z)) = y = f_T(y) = f_r(y) = f_r(H_1(z))$ для каждого $z \in A_s$. Но это невозможно, так как множество M удовлетворяет условию (β), и потому должно быть $r \in P - T$. В этом случае операции f_T и f_G на A_s совпадают и утверждение очевидно. Мы доказали, что $f_T \geqq f_G$.

Лемма 12. *Пусть $T, G \subseteq P$, $G \nsubseteq T$. Тогда $f_G \nleqq f_T$.*

Доказательство. Так как $G \nsubseteq T$, *то существует* $p \in G$, $p \notin T$. Пусть x — любой элемент множества A_p. Положим $H(z) = x$ для каждого $z \in A_p$. Докажем, что отображение H: $A_p \to A_p$ является гомоморфизмом относительно операции f_T, но не являетса гомоморфизмом относительно f_G.

Предположим, что $f_G(x) = x$. Тогда $x = f_G(x) = f_p(x)$. Пусть $q \dot{\in} P, q \neq p$. Положим $H_1(z) = x$ для каждого $z \in A_q$. Отображение H_1 является гомоморфизмом моноунарной алгебры (A_q, f_q) в (A_p, b_p), что невозможно. Следовательно, $f_G(x) \neq x$. Тогда для $z \in A_p$ имеет место:

$$H(f_T(z)) = H(z) = x = f_T(x) = f_T(H(z)) ,$$

$$H(f_G(x)) = x \neq f_G(x) = f_G(H(x)) .$$

Мы доказали, что $f_G \nleqq f_T$.

Лемма 13. *Если $T, G \subseteq P$*, то *$G \subseteq T$ тогда и только тогда, когда $f_G \leqq f_T$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 11 и 12.

Доказательство леммы 10. Пусть L — частично упорядоченное множество, card $L = M$. Пусть φ — взаимно однозначное отображение множества P на множество L. Для каждого $x \in L$ положим

$$Q(x) = \{u \in L \colon u \leqq x\} ,$$

$$T(x) = \{p \in P \colon \varphi(p) \leqq x\} .$$

Далее, положим $F=\{f_{T(x)}: x\in L\}$, $\mathscr{S}=\{(A_p, F): p\in P\}$. Если мы обозначим символом $\sim$ изоморфизм квазиупорядоченных множеств, то из леммы 12 получается

$$L\sim\{Q(x): x\in L\}\sim\{T(x): x\in L\}\sim\{f_{T(x)}: x\in L\}=F,$$

причем множества $\{Q(x): x\in L\}$ и $\{T(x): x\in L\}$ квазиупорядочены относительно включения. Мы доказали, что F является частично упорядоченным множеством изоморфным с L.

Из теоремы 3 и леммы 10 вытекает:

Теорема 4. *Пусть L — частично упорядоченное множество,* $\operatorname{card} L\leqq 2^c$. *Тогда L предстасвимо при помощи унарных операций.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] BARTOL, W.: Algebraic Complexity of Machines. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math., Astr. Phys., 22, 1974, 851—856.

[2] COMER, S. D.—LeTOURNEAU, J. J.: Isomorphism type of infinite algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 21, 1969, 635—639.

[3] ERDÖS, P.—RADO, R.: A partition calculus in set theory. Bull. Amer. Math. Soc., 62, 1956, 427—489.

[4] ЯКУБИКОВА, Д.: Гомоморфизмы унарных алгебр. Mathematica Slovaca, 26, 1976, 317—322.

[5] JÓNSSON, B.: Topics in Universal Algebra. Berlin 1972.

[6] KOPEČEK, O.—NOVOTNÝ, M.: On some invariants of unary algebras. Czech. Math. J., 24 (99), 1974, 219—246.

[7] NOVOTNÝ, M.: O jednom problému z teorie zobrazení. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk 344, 1953, 53—64.

[8] NOVOTNÝ, M.: Über Abbildungen von Mengen. Pac. J. Math., 13, 1953, 1359—1369.

[9] NOVOTNÝ, M.: Konstrukce všech homomorfismů unárních algeber. Katedra matematiky pedagogické fakulty UJEP, Seminář o nových směrech ve vyučování matematice, Brno 1973.

[10] ЖЕМБЕРЫ, И.: Характеризация операций в алгебрах при помощи частично упорядоченных множеств. Mat. Čas., 24, 1974, 277—282.

Поступило 16. 11. 1976

I. katedra matematiky
Prírodovedeckej fakulty Univerzity PJŠ
Komenského 14
040 01 Košice