Tatyana S. Fofanova

Об инъективных полигонах над цепями

Mathematica Slovaca, Vol. 28 (1978), No. 1, 21--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136164

Math. Slovaca 28, 1978, No. 1, 21—32

ОБ ИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛИГОНАХ НАД ЦЕПЯМИ

Т. С. ФОФАНОВА

В заметке устанавливаются некоторые свойства инъективных полигонов и дается описание инъективных полигонов над трехэлементной цепью. § 1 содержит необходимые определения и вспомогательные результаты. В § 2 выводятся некоторые свойства инъективных полигонов (которые можно трактовать как условия, необходимые для инъективности полигона) над любой дистрибутивной структурой и специально над цепью. § 3 содержит основной результат – описание инъективных полигонов над трехэлементной цепью. Замечу, что свойства полигонов над дистрибутивными структурами изучались в работах [1], [2], [3], [4] и [5]. В [3] было получено описание инъективных полигонов над произвольной булевой алгеброй. Наличие достаточного набора инъективных объектов и, отсюда, существование инъективных оболочек в категории полигонов над произвольной дистрибутивной структурой было доказано В. С. Корниенко [1], исходя из конструкции тензорного произведения полигонов.

§ 1. Полуструктура $A = \langle A\,;\,+\rangle$ с нулём 0_A называется *левым полигоном над дистрибутивной структурой* $D = \langle D\,;\,+,\,\cdot\rangle$ с нулём 0_D и единицей 1_D (или, для краткости, *D – пслигоном*) если для любых $\lambda \in D$, $a \in A$ определено произведение $\lambda a \in A$, причем справедливы тождества:

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b\,,$$

$$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a\,,$$

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)\,, \quad (\lambda, \mu \in D\,;\; a, b \in A)$$

$$1_D a = a\,,$$

$$0_D a = 0_A = \lambda 0_A\,.$$

Гомоморфизм φ D – полигонов (D – гомоморфизм) A и B определяется, естественно, как такой гомоморфизм полуструктур φ: $A \to B$, что $(\lambda a)\varphi = \lambda(a\varphi)$ для всех $\lambda \in D$, $a \in A$. Под *идеалом D – полигона A* понимается идеал полуструктуры A, а под *единицей D – полигона A* – её наибольший элемент.

(Частичный порядок в A естественно индуцируется операцией: $a \leqslant \beta \Leftrightarrow a + b = b$). Далее $\sup \{a_i | a_i \in A, i \in I\}$ и $\inf \{a_i | a_i \in A, i \in I\}$ обозначаются, соответственно, через

$$\bigvee_{i \in I} a_i \quad \text{и} \quad \bigwedge_{i \in I} a_i$$

(разумеется, если эти элементы существуют). Полигон A называется *полным*, если полуструктура A является полной структурой, и ∞ – *дистрибутивным*, если

$$a + \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I} (a + b_i)$$

для всех a, $b_i \in A$. Если A является D – полигоном, то для любого $\lambda \in D$ множество элементов $\Phi_\lambda^A = \{a | a \in A, \lambda a = a\}$ называется ***фиксатором элемента λ в полигоне A***. Для любого D – полигона A двойственным называется D – полигон $A^* = \mathrm{Hom}(A, 2)$, где 2 – двухэлементная цепь, а операции в полигоне $\mathrm{Hom}(A, 2)$ определяются правилами $a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi$ и $a(\lambda\varphi) = (\lambda a)\varphi$. В дальнейшем почти всюду вместо 1_D, 0_D, 0_A и Φ_λ^A пишется, соответственно, 1, 0, 0 и Φ_λ. Обозначение суммы элементов знаком + как в структуре D, так и в полуструктуре A такое не вызвает недоразумений. Структура D всюду предполагается неодноэлементной (над одноэлементной структурой существует единственный одноэлементный полигон). Категория полигонов над двухэлементной структурой 2 изоморфна категории полуструктур с нулём, в которой морфизмами служат гомоморфизмы, сохраняющие нуль ([2], предл. 3).

Предложение 1. *Если $\varphi: A \to B$ является гомоморфизмом D – полигонов, то $\Phi_\lambda^A \varphi \subseteq \Phi_\lambda^B$ для всех $\lambda \in D$.*

В самом деле, если $a \in \Phi_\lambda^A$, то $a\varphi = (\lambda a)\varphi = \lambda(a\varphi)$, т.е. $a\varphi \in \Phi_\lambda^B$.

Предложение 2. *Если A – ретракт полного D – полигона B (т.е. существуют такие D – гомоморфизмы $\varphi: B \to A$ и $\psi: A \to B$, что $\psi\varphi$ – тождественный автоморфизм полигона A), то A является полным полигоном, причем*

$$\bigwedge_I b_i = \left[\bigwedge_I (b_i\psi\right] \varphi \quad \text{и} \quad \bigvee_I b_i = \left[\bigvee_I (b_i\psi)\right] \varphi$$

для любого подмножества элементов $b_i \in A$.

Доказательство: Очевидно, что отображение φ изотонно и, значит

$$\left[\bigwedge_I (b_i\psi)\right] \varphi \leqslant (b_i\psi)\varphi = b_i$$

для всех $i \in I$. Если же $m \in A$ и $m \leqslant b_i$ для всех $i \in I$, то $m\psi \leqslant b_i\psi$, так как ψ тоже изотонно, и значит,

$$m = (m\psi)\varphi \leqslant \left[\bigwedge_I (b_i\psi)\right]\varphi .$$

Таким образом,

$$\bigwedge_I b_i$$

в A существует и равно

$$\left[\bigwedge_I (b_i\psi)\right]\varphi .$$

Вторая часть предложения доказывается двойственно.

§2. Теорема 1. *Категория полигонов над произвольной дистрибутивной структурой D обладает инъективным кообразующим объектом D^*.*

Доказательство: Каждый D – полигон A можно вложить в инъективный полигон F^*, где F – некоторый свободный D – полигон ([1], теорема 5). Стандартными рассуждениями, вполне аналогичными доказательствам подобных фактов для модулей над кольцом, можно показать, что

$$F \simeq \bigoplus_{i \in I} D_i ,$$

где $D_i \simeq D$ для всех $i \in I$, и что

$$\left(\bigoplus_{i \in I} D_i\right)^* \simeq \prod_{i \in I} D_i^* .$$

(Здесь $\oplus$ – прямая сумма, Π – прямое произведение и $\simeq$ – изоморфизм). Следовательно, существует мономорфизм

$$A \to \prod_{i \in I} (D_i^*),$$

где $D_i^* \simeq D^*$, что и доказывает теорему.

В дальнейшем часто вместо

$$\prod_{i \in I} (D_i^*)$$

будем писать для краткости F^*.

Очевидно, что для любого $\lambda \in D$ отношение Θ_λ, определяемое на D – полигоне A условием $a\Theta_\lambda b \Leftrightarrow \lambda a = \lambda b$, является конгруенцией D – полигона A. В каждом классе конгруенции Θ_λ содержится один и только один элемент фиксатора Φ_λ, являющийся наименьшим элементом этого класса. Для любого $a \in \Phi_\lambda$ класс конгруенции Θ_λ, определяемый этим элементом, обозначим через $M_a(\lambda, A)$ или, если это не вызывает недоразумений, через M_a. Таким образом, $M_a(\lambda, A) = \{x \in A \mid \lambda x = a\}$. Если полигон A полон, то $\vee\{x \mid x \in M_a\}$ будем обозначать $m_a(\lambda, A)$, или просто m_a.

Теорема 2. *Каждый инъективный D – полигон A обладает следующим свойствами:*

(1) полуструктура A является полной, ∞ – дистрибутивной структурой;

(2) если D – цепь, то $\lambda 1_A = 1_A$ для всех $\lambda \in D$, $\lambda \neq 0$ и

$$\lambda \left(\bigwedge_I a_i\right) = \bigwedge_I \lambda a_i$$

всех $\lambda \in D$ и любого подмножества элементов $a_i \in A$, $i \in I$.

(3) если D – конечная цепь, то $M_a(\lambda, A) = [a, m_a)$ и $x + m_b = m_{a+b}$ для любых λ D, $a, b \in \Phi$, и любого $x \in M_a$.

Доказательство. (1) Из теоремы 1 следует, что всякий инъективный D – полигон A является ретрактом некоторого D – полигона

$$\prod_I (D_i^*),$$

г е $D_i^* \simeq D^*$. Ввиду предположения 4 работы [1], D^* как структура дуально и оморфна структуре $I(D)$ идеалов структуры D, которая, очевидно, полна. Кроме того в $I(D)$ справедливо тождество

$$a \wedge \left(\bigvee_I b_i\right) = \bigvee_I (a \wedge b_i)$$

(см , например, [1], лемма к теореме 7). Следовательно, D^*, а, значит, и

$$\prod_I (D_i^*)$$

ляется полной, ∞ – дистрибутивной структурой. Ввиду предложения 2 отсюда следует, что A является полной структурой, причем

$$a + \bigwedge_{\alpha \in J} b_\alpha = a\psi\varphi + \left[\bigwedge_{\alpha \in J} (b_\alpha \psi)\right]\varphi = \left[a\psi + \bigwedge_{\alpha \in J} (b_\alpha \psi)\right]\varphi =$$

$$= \left[\bigwedge_{\alpha \in J} (a\psi + b_\alpha \psi)\right]\varphi = \left[\bigwedge_{\alpha \in J} ((a + b_\alpha)\psi)\right]\varphi = \bigwedge_{\alpha \in J} (a + b_\alpha),$$

.е. структура A ∞ – дистрибутивна.

(2) Наибольшим элементом 1_{D^*} полигона D^* является гомоморфизм $D \to 2$, определяемый условиями: $0_D 1_{D^*} = 0_2$ и $\lambda_i 1_{D^*} = 1_2$ для всех $\lambda_i \in D$, $\lambda_i \neq 0$. Поэтом , для любого $\lambda \in D$, $\lambda \neq 0$ имеем $0_D(\lambda 1_{D^*}) = (\lambda 0_D)1_{D^*} = 0_2$. Кроме того, пос ольку D – цепь, то $\lambda\lambda_i \neq 0$ для всех $\lambda_i \neq 0$ и, значит, $\lambda_i(\lambda 1_{D^*}) = (\lambda\lambda_i)1_{D^*} = 1_2$.

Таким образом, $\lambda 1_{D^*} = 1_{D^*}$, откуда $\lambda 1_{F^*} = 1_{F^*}$ для любого $\lambda \in D$, $\lambda \neq 0$. Если D – полигон A инъективен, т.е. согласно теореме 1 является ретрактом полигона F^*, то

$$\lambda 1_A = \lambda(1_{F^*}\psi) = (\lambda 1_{F^*})\psi = 1_{F^*}\psi = 1_A .$$

Пусть теперь $I_\varphi = \{c \mid c \in D, c\varphi = 0\}$ для любого $\varphi \in D^*$, $\varphi \neq 0$. Покажем, что

$$\lambda\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \in I_\varphi \\ \varphi, & \text{если } \lambda \notin I_\varphi \end{cases}.$$

В самом деле, если $m \in D$, то $m(\lambda\varphi) = (\lambda m)\varphi$ и для случая $m \in I_\varphi$ мы имеем $\lambda m \in I_\varphi$. Значит, $m(\lambda\varphi) = 0_D$. Если же $m \in D \backslash I_\varphi$, то, поскольку D – цепь, для любого $\lambda \in I_\varphi$ имеем $\lambda m = \lambda$, и $m(\lambda\varphi) = 0_D$. Таким образом $\lambda\varphi = 0_{D^*}$, если $\lambda \in I_\varphi$. Пусть теперь $\lambda \in D \backslash I_\varphi$. Если $m \in I_\varphi$, то $\lambda > m$, откуда $\lambda m = m$ и $m(\lambda\varphi) = m\varphi$. Если же $m \in D \backslash I_\varphi$, то $\lambda m \in D \backslash I_\varphi$ и $m(\lambda\varphi) = 1 = m\varphi$. Значит, $\lambda\varphi = \varphi$ для всех $\lambda \in D \backslash I_\varphi$. Далее, пусть $\varphi_\alpha \in D^*$, $\alpha \in I$,

$$\varphi = \bigwedge_{\alpha \in I} \varphi_\alpha$$

и, для краткости, $I_{\varphi_\alpha} = I_\alpha$. По только что доказанному для каждого $\lambda \in D$ возможен один из вариантов: 1) $\lambda\varphi_{\alpha_0} = 0$ для некоторого α_0, после чего ясно, что

$$\lambda \left(\bigwedge_{\alpha \in I} \varphi_\alpha \right) \leqslant \lambda\varphi_{\alpha_0} = 0 = \bigwedge_{\alpha \in I} \lambda\varphi_\alpha .$$

2) $\lambda\varphi_\alpha = \varphi_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Ввиду доказанного выше это означает, что $\lambda \notin I_\alpha$ для всех α. Так как отображение $\varphi \to I_\varphi$ является дуальным изоморфизмом (см. [1], предл. 4), то

$$I_\varphi = \bigcup_{\alpha \in I} I_\alpha .$$

Но тогда $\lambda \notin I_\varphi$, откуда

$$\lambda \left(\bigwedge_I \varphi_\alpha \right) = \bigwedge_I \varphi_\alpha = \bigwedge_I (\lambda\varphi_\alpha).$$

Таким образом, мы получили, что тождество

$$\lambda \left(\bigwedge_{i \in I} a_i \right) = \bigwedge_{i \in I} (\lambda a_i)$$

выполняется в полигоне D^* и, значит, в полигоне $F^* = \Pi D^*$. Учитывая предложение 2, как и раньше, получаем, что

$$\lambda(\wedge a_i) = \lambda[(\wedge a_i\psi)\varphi] = [\lambda(\wedge a_i\psi)]\varphi = [\wedge(\lambda a_i)\psi]\varphi = \wedge \lambda a_i$$

для любого $\lambda \in D$ и любого подмножества $\{a_i | i \in I\}$ элементов инъективного полигона A.

(3) Если D – конечная цепь, то полигон D^* является также конечной цепью. Поэтому непосредственно из определения полигона вытекает, что

$$\lambda \left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) = \bigvee_{i \in I} \lambda a_i$$

для любых $\lambda \in D$, $a_i \in D^*$, $i \in I$. Отсюда, как и в конце доказательства пункта (2), вытекает, что это тождество выполняется в любом инъективном полигоне над конечной цепью. Значит,

$$m_a(\lambda, A) = \vee \{x | x \in M_a(\lambda, A)\} \in M_a$$

для любого $a \in \Phi_\lambda$. Покажем, что $M_a = [a, m_a]$. Действительно, если $x \in [a, m_a]$, т.е. $a \leqslant x \leqslant m_a$, то $a = \lambda a \leqslant \lambda x \leqslant \lambda m_a = a$, т.е. $\lambda x = a$ и $x \in M_a$.

Покажем теперь, что если $a, b \in \Phi_\lambda$ и $a < b$, то $x < m_b$. В самом деле, пусть $x \in M_a$.

i) $x > m_b$ невозможно, так как в этом случае имеем $a = \lambda x \geqslant \lambda m_b = b$.

ii) x несравнимо с m_b невозможно, поскольку D^* – цепь. Значит, для любого $x \in M_a$ (и, в частности, для m_a) справедливо неравенство $x \leqslant m_b$. Так как $M_a \cap M_b = \emptyset$, то равенство невозможно. Таким образом, $a < b$ влечет $x < m_b$. Аналогично, $a > b$ влечет $x > m_b$ и, значит, в полигоне D^* выполняется равенство $x + m_b = m_{a+b}$. Отметим, что если D – конечная цепь,

$$D = \{0_D < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < 1_D\}, \quad \text{то} \quad D^* = \{0_{D^*} < \varphi_n < \ldots < \varphi_1 < 1_{D^*}\},$$

где $I_{\varphi_j} = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_j\}$ и $a 0_{D^*} = 0_2$ для всех $a \in D$ и $0_D 1_{D^*} = 0_2$, $\lambda_i 1_{D^*} = 1_D 1_{D^*} = 1_2$. Далее,

$$\lambda_k(\lambda_i \varphi_j) = (\lambda_i \lambda_k)\varphi_j = \begin{cases} \lambda_i \varphi_j & \text{при } k \geqslant i \\ \lambda_k \varphi_j & \text{при } k < i \end{cases}$$

Значит, если $j < i$, то

$$\lambda_k(\lambda_i \varphi_j) = \begin{cases} 0_2 & \text{при } k \leqslant j \\ 1_2 & \text{при } k > j \end{cases},$$

т.е. $\lambda_i \varphi_j = \varphi_j$. Если же $j \geqslant i$, то $\lambda_k(\lambda_i \varphi_j) = 0_2$ для всех k, т.е. $\lambda_i \varphi_j = 0_{D^*} \neq \varphi_j$. Таким образом,

$$\Phi_{\lambda_i}^{D^*} = \{0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, 1\},$$

поскольку

$$1_{D^*} \in \Phi_{\lambda_i}^{D^*}$$

ввиду уже доказанного п. (2). Если мы рассмотрим прямое произведение F^* некоторого множества экземпляров полигона D^*, то

$$\Phi_{\lambda_i}^{F^*}$$

состоит из строк, компонентами которых являются элементы из

$$\Phi_{\lambda_i}^{D^*}. \quad \text{Пусть} \quad a = (\ldots, \alpha_\xi, \ldots) \in \Phi_{\lambda_i}^{F^*} \quad \text{и} \quad b = (\ldots, \beta_\xi, \ldots) \in \Phi_{\lambda_i}^{F^*}.$$

Подчеркнем, что умножение на λ_i определяется в полигоне D^* соотношениями $\lambda_i 1_{D^*} = 1_{D^*}$, $\lambda_i\varphi_1 = \varphi_1$, $\ldots$, $\lambda_i\varphi_{i-1} = \varphi_{i-1}$, $\lambda_i\varphi_i = 0_{D^*}$, $\ldots$, $\lambda_i\varphi_n = 0_{D^*}$. Рассмотрим элемент $c = (\ldots, A_\xi, \ldots) \in F^*$, где

$$A_\xi = \begin{cases} \alpha_\xi, & \text{если } \alpha_\xi \neq 0_{D^*} \\ \varphi_i & \text{если } \alpha_\xi = 0_{D^*} \end{cases}$$

Так как $\lambda_i c = (\ldots, \lambda_i A_\xi, \ldots) = (\ldots, \alpha_\xi, \ldots) = c$, то $c \in M_a(\lambda_i, F^*)$. Взяв $x = (\ldots\delta_\xi\ldots) \in M_a(\lambda_i, F^*)$, получим $\lambda_i\delta_\xi = \alpha_\xi$ для всех ξ. Если $\alpha_\xi = 0_{D^*}$, то $\lambda_i\delta_\xi = 0_{D^*}$, т.е. $\delta_\xi \leqslant \varphi_i$. Допустим теперь, что $\alpha_\xi \neq 0_{D^*}$. Если

$$\delta_\xi \notin \Phi_{\lambda_i}^{D^*},$$

то $\lambda_i\delta_\xi = 0_{D^*} \neq \alpha_\xi$, вопреки предположению $x \in M_a(\lambda_i, F^*)$. Если же

$$\delta_\xi \in \Phi_{\lambda_i}^{D^*},$$

но $\delta_\xi \neq \alpha_\xi$, то $\lambda_i\delta_\xi = \delta_\xi \neq \alpha_\xi$, что опять невозможно. Значит, $\delta_\xi = \alpha_\xi$, если $\alpha_\xi \neq 0_{D^*}$. Таким образом мы показали, что любой элемент $x \in M_a(\lambda_i, F^*)$ имеет вид $x = (\ldots\delta_\xi\ldots)$, где

$$\delta_\xi = \begin{cases} \alpha_\xi, & \text{если } \alpha_\xi \neq 0 \\ \delta_\xi \leqslant \varphi_i & \text{если } \alpha_\xi = 0. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что $x \leqslant c$, т.е. $c = m_a(\lambda_i, F^*)$. Аналогично, $m_b(\lambda_i, F^*) = (\ldots B_\xi\ldots)$ и $m_{a+b}(\lambda_i, F^*) = (\ldots C_\xi\ldots)$, где

$$B_\xi = \begin{cases} \beta_\xi, & \text{если } \beta_\xi \neq 0 \\ \varphi_i, & \text{если } \beta_\xi = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad C_\xi = \begin{cases} \alpha_\xi + \beta_\xi, & \text{если } \alpha_\xi + \beta_\xi \neq 0 \\ \varphi_i, & \text{если } \alpha_\xi + \beta_\xi = 0 \end{cases}$$

Далее рассмотрим следующие случая:

(i) $\alpha_\xi = 0$, $\beta_\xi = 0$. В этом случае $\alpha_\xi + \beta_\xi = 0$ и $\varphi_i = B_\xi \leqslant \delta_\xi + B_\xi \leqslant \varphi_i = C_\xi$, т.е. $\delta_\xi + B_\xi = C_\xi$.

(ii) $\alpha_\xi \neq 0$, $\beta_\xi = 0$. Здесь имеем $C_\xi = \alpha_\xi + \beta_\xi = \alpha_\xi$ и $\delta_\xi + B_\xi = \alpha_\xi + \beta_\xi = \alpha_\xi$, поскольку

$$\alpha_\xi \in \Phi_{\lambda_i}^{D^*}.$$

(iii) $\alpha_\xi = 0$, $\beta_\xi \neq 0$. В этом случае $\beta_\xi \leqslant \delta_\xi + B_\xi = \varphi_i + \beta_\xi = \beta_\xi$ и $C_\xi = \beta_\xi$, т.е. опять $C_\xi = \delta_\xi + B_\xi$.

(iv) $\alpha_\xi \neq 0$, $\beta_\xi \neq 0$. При этом $C_\xi = \alpha_\xi + \beta_\xi$ и $\delta_\xi + B_\xi = \alpha_\xi + \beta_\xi$. Таким образом доказано, что $C_\xi = \delta_\xi + B_\xi$ для всех ξ и, значит, $x + m_b = m_{a+b}$ для всех

$$a, b \in \Phi_{\lambda_\iota}^{F^*}$$

и любого $x \in M_a(\lambda_\iota, F^*)$.

Итак, условие (3) выполняется в полигоне F^*. Пусть теперь A – произвольный инъективный полигон, являющийся ретрактом некоторого полигона F^* и пусть φ и ψ имеют тот же смысл, что в предложении 2. Если $a \in \Phi_\lambda^A$, то по предложению 1

$$a\psi \in \Phi_\lambda^{F^*}$$

и мы можем говорить об элементе $m_{a\psi}(\lambda, F^*)$. Если далее $\lambda x = a$, то $\lambda(x\psi) = a\psi$, т.е. $x\psi \in M_{a\psi}(\lambda, F^*)$. Значит, ввиду предложения 2,

$$m_a(\lambda, A) = \vee\{x \mid x \in A, \lambda x - a\} = (\vee\{x\psi \mid x \in A, \lambda x = a\})\varphi \leqslant [m_{a\psi}(\lambda, F)]\varphi .$$

С другой стороны,

$$\lambda[(m_{a\psi})\varphi] = (\lambda m_{a\psi})\varphi = (a\psi)\varphi = a ,$$

т.е. $(m_{a\psi})\varphi \in M_a(\lambda, A)$ и, поскольку $m_a(\lambda, A)$ – наибольший элемент множества $M_a(\lambda, A)$, получаем, что $[m_{a\psi}(\lambda, F^*)]\varphi \leqslant m_a(\lambda, A)$. Таким образом, $[m_{a\psi}(\lambda, F^*)]\varphi = m_a(\lambda, A)$. Вспоминая, что для полигона F^* условие (3) уже доказано, получаем для всех a, $b \in \Phi_\lambda^A$ и любого $x \in M_a(\lambda, A)$

$$x + m_b = x\psi\varphi + (m_{b\psi})\varphi = (x\psi + m_{b\psi})\varphi = (m_{(\lambda x)\psi + b\psi})\varphi =$$

$$= [m_{\lambda x + b)\psi}]\varphi = m_{\lambda x + b} = m_{a+b} ,$$

т.е. теорема полностью доказана.

Заметим, что частным случаем условия (3) является равенство $m_a + m_b = m_{a+b}$.

Следствие. *Цепь самоинъктивна тогда и только тогда, когда она содержит не более двух элементов.*

В самом деле, инъективность одноэлементной цепи тривиальна, а инъективность двухэлементной следует из теоремы 2, [3]. Если же цепь C, состоящую более чем иж двух элементов, рассматривать как полигон над собой, то заведомо найдется элемент $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$, 1 и, значит, $\lambda 1 = \lambda \neq 1$. Ввиду теоремы 2, (2) такая цепь не может быть инъективной.

Замечание. Интересно, что любая конечная цепь C, состоящая более чем из двух элементов, изоморфна как структура (но не как C-полигон!) инъективной цепи C^*.

§3. Теорема 3. *Полигон A над трехэлементной цепью $D = \{0, \lambda, 1\}$ инъек-*

тивен тогда и только тогда, когда он полон, ∞-дистрибутивен и удовлетворяет условиям:

A) $$\lambda\left(\bigwedge_I a_i\right)=\bigwedge_I(\lambda a_i)$$

для любого подмножества элементов $\{a_i | a_i \in A,\ i \in I\}$; B) $\lambda 1_A = 1_A$; C) $x + m_b = m_{a+b}$ *для любых* a, $b \in \Phi_\lambda$ *и любого* $x \in M_a$.

Доказательство. Необходимость указанных условий для инъективности полигона установлена в теореме 2. Для доказательства достаточности рассмотрим D – полигон A, удовлетворяющий условиям теоремы, D – гомоморфизм φ: $M \to A$ и D – мономорфизм f: $M \to N$. Заметим, что полигон N всегда можно расширить до полигона $\bar{N}$, присоединив к N новый элемент $\tilde{1}$, и полагая $\tilde{1} > a$ для всех $a \in N$ и $0\tilde{1} = 0$, $\lambda\tilde{1} = 1\tilde{1} = \tilde{1}$. При этом $Mf \cup \tilde{1}$ оказывается подполигоном полигона $\bar{N}$. Так как $\lambda 1_A = 1_A$ по условию, то, определяя $(af)\psi = a\varphi$ для всех $a \in M$ и $\tilde{1}\psi = 1_A$, мы получим такой гомоморфизм ψ: $Mf \cup \tilde{1} \to A$, что $f\psi = \varphi$. Поэтому в дальнейшем всюду можно предполагать, что полигон N обладает единицей 1_N и что $1_N \in Mf$. Значит, $\{z | z \in M,\ zf \geqslant x\} \neq \emptyset$ для любого $x \in N$.

Лемма 1. *Если* $m_a \in Mf$ *для всех* $a \in \Phi_\lambda^N$, *то существует такой гомоморфизм* ψ: $n \to A$, *что* $f\psi = \varphi$.

Доказательство. Так как Mf является подполигоном в N, то $a = \lambda m_a \in Mf$ и, значит, $\lambda x \in Mf$ для любого $x \in N$. Поскольку f – мономорфизм, то $(\lambda x)f^{-1} \in \Phi_\lambda^M$, и мы будем для краткости обозначать $(\lambda x)f^{-1}$ через x', $(\lambda y)f^{-1}$ через y' и т.п. Определим

$$x\psi = m_{x'\varphi} \wedge (\wedge\{z\varphi | z \in M,\ zf \geqslant x\})$$

для всех $x \in N$. Если $k \in M$ и $x = kf$, то

$$x'\varphi = [(\lambda x)f^{-1}]\varphi = [(\lambda kf)f^{-1}]\varphi = (\lambda k)\varphi = \lambda(k\varphi),$$

откуда $m_{x'\varphi} \geqslant k\varphi$. Так как, очевидно, $\wedge\{z\varphi | zf \geqslant kf\} = k\varphi$, мы имеем $kf\psi = x\varphi = k\varphi$ для всех $k \in M$.

Далее, если x, $y \in N$, $x \geqslant y$, то $x' \geqslant y'$ и, поскольку $m_a \in M_a$, из условия C) вытекает, что $m_{x'\varphi} \geqslant m_{y'\varphi}$. Кроме того, в этом случае $zf \geqslant x$ влечет $zf \geqslant y$ и, значит, $\wedge\{z\varphi | zf \geqslant x\} \geqslant \wedge\{u\varphi | uf \geqslant y\}$. Таким образом, отображение ψ изотонно, откуда $(x+y)\psi \geqslant x\psi + y\psi$ для любых x, $y \in N$. Положим

$$T = m_{x'\varphi} + m_{y'\varphi}$$

$$U = \wedge\{m_{x'\varphi} + u\varphi | u \in M,\ uf \geqslant y\}$$

$$V = \wedge\{m_{y'\varphi} + z\varphi | z \in M,\ zf \geqslant x\}$$

$$W = \wedge\{(z+u)\varphi | z,\ u \in M,\ zf \geqslant x,\ uf \geqslant y\}$$

Учитывая ∞ – дистрибутивность полигона A, получаем

$$x\psi + y\psi = m_{x'\varphi} \wedge (\wedge\{z\varphi \mid z \in M,\ zf \geqslant x\}) +$$
$$+ m_{y'\varphi} \wedge (\wedge\{u\varphi \mid u \in M,\ uf \geqslant y\}) = T \wedge U \wedge V \wedge W.$$

Если теперь $z_0 = (m_{\lambda x})f^{-1}$, то

$$\lambda(z_0\varphi) = [\lambda(m_{\lambda x})f^{-1}]\varphi = [(\lambda m_{\lambda x})f^{-1}]\varphi = (\lambda x)f^{-1}\varphi = x'\varphi.$$

Значит, $z_0\varphi \leqslant m_{x'\varphi}$ и, кроме того, $z_0 f = m_{\lambda x} \geqslant x$, поскольку $x \in M_{\lambda x}$. Следовательно, $U \geqslant \wedge\{z_0\varphi + u\varphi \mid u \in M,\ uf \geqslant y\} \geqslant W$. Аналогично можно показать, что $V \geqslant W$, откуда вытекает, по свойству (B), что

$$x\psi + y\psi = T \wedge W =$$
$$= m_{(x'+y')\varphi} \wedge (\wedge\{(z+u)\varphi \mid z,\ u \in M,\ zf \geqslant x,\ uf \geqslant y\}) \geqslant$$
$$\geqslant m_{(x+y)'\varphi} \wedge (\wedge\{p\varphi \mid p \in M,\ pf \geqslant x+y\}) = (x+y)\psi.$$

Таким образом, ψ – гомоморфизм полуструктур. Далее, используя условие А) и вспоминая, что $\lambda x \in Mf$, получаем

$$\lambda(x\psi) = \lambda m_{x'\varphi} \wedge (\wedge\{(\lambda z)\varphi \mid z \in M,\ zf \geqslant x\}) =$$
$$= x'\varphi \wedge (\wedge\{(\lambda z)\varphi \mid z \in M,\ zf \geqslant x\}) \geqslant x'\varphi \wedge (\wedge\{u\varphi \mid u \in M,\ uf \geqslant \lambda x\}) =$$
$$= x'\varphi \wedge ((\lambda x)f^{-1})\varphi = x'\varphi \wedge x'\varphi = x'\varphi.$$

Заметив, что $(\lambda x)\psi = (\lambda x)f^{-1}\varphi = x'\varphi$, мы завершаем доказательство леммы.

Стандартными рассуждениями с использованием леммы Цорна можно убедиться в наличии D – полигона N_0, максимального среди таких D – полигонов X, что существует гомоморфизм χ: $X \to A$, удовлетворяющии условиям $f\chi = \varphi$ и $Mf \subseteq X \subseteq N$. Пусть ψ_0: $N_0 \to A$ и $f\psi_0 = \varphi$.

Лемма 2. $\Phi_\lambda^N \subseteq N_0$.

Доказательство. Пусть $a \in \Phi_\lambda^N$ и $a \notin N_0$. Рассмотрим полигон $N_1 = N_0 + Da$. Ясно, что $Mf \subseteq N_0 \subsetneqq N_0 + Da \subseteq N$. Определим

$$x\psi = \wedge\{z\psi_0 \mid z \in N_0,\ z \geqslant x\}$$

для всех $x \in N_1$. Отображение ψ: $N_1 \to A$, очевидно, изотонно, и, ввиду ∞ – дистрибутивности полигона A,

$$x\psi + y\psi = \wedge\{(z+u)\psi_0 \mid z,\ u \in N_0,\ z \geqslant x,\ u \geqslant y\} \geqslant$$
$$\geqslant \{p\psi_0 \mid p \in N_0,\ p \geqslant x+y\} = (x+y)\psi,$$

т.е. ψ является гомоморфизмом полуструктур. Если $x \in N_0$, то $x\psi = x\psi_0$ и поэтому $(\lambda x)\psi = \lambda(x\psi)$. Далее, $\lambda(a\psi) \leqslant a\psi = (\lambda a)\psi$ и, учитывая условие А),

$$\lambda(a\psi)=\lambda(\wedge\{z\psi_0|z\in N_0,\ z\geqslant a\})=$$
$$=\wedge\{(\lambda z)\psi_0|z\in N_0,\ z\geqslant a=\lambda a\}\geqslant\wedge\{u\psi_0|u\in N_0,\ u\geqslant\lambda a\}=(\lambda a)\psi\,.$$

Значит, $\lambda(a\psi)=(\lambda a)\psi$ и для любого $x\in N_1$, $x\notin N_0$ мы получаем, что $x=a+n$, $n\in N_0$ и

$$\lambda(x\psi)=\lambda[(a+n)\psi]=\lambda(a\psi+n\psi)=$$
$$=\lambda(a\psi)+\lambda(n\psi)=(\lambda a)\psi+(\lambda n)\psi=$$
$$=(\lambda a+\lambda n)\psi=[\lambda(a+n)]\psi=(\lambda x)\psi\,.$$

Таким образом, построенное отображение является гомоморфизмом полигонов (причем $f\psi=\varphi$), что противоречит максимальности полигона N_0.

Доказательство теоремы. Если $N_0=N$, то доказательство закончено. В противном случае рассмотрим множество $N_1=N\cup\{\tilde m_a|a\in\Phi_\lambda^N\}$, получаемое внешним присоединением к N совокупности элементов $\{\tilde m_a|a\in\Phi_\lambda^N\}$. Положим $\tilde m_a+\tilde m_b=\tilde m_{a+b}$, $\lambda\tilde m_a=a$ и, если $x\in N$, то $\tilde m_a+x=x+\tilde m_a=\tilde m_{\lambda x+a}$. Нетрудно убедиться, что N_1 таким образом превращается в D – полигон, причем $N_0\subset N\subset N_1$. Ввиду леммы 2, подмножество $\tilde N=N_0\cup\{\tilde m_a|a\in\Phi_\lambda^N\}$ является подполигоном полигона N_1. Полагая $x\tilde\psi=x\psi_0$ для всех $x\in N_0$ и $\tilde m_a\tilde\psi=m_{a\psi_0}$, получаем, ввиду условия C), гомоморфизм $\tilde\psi$: $\tilde N\to A$, причем, очевидно, $f\tilde\psi=\varphi$. После этого, ввиду леммы 1, мы можем построить и гомоморфизм ψ:

$$\begin{tikzcd}
 & & N \arrow[rd] & \\
M \arrow[rru, "f"] \arrow[r] \arrow[ddd, "\varphi"'] & N_0 \arrow[ru] \arrow[rd] \arrow[lddd, "\psi_0"] & & N_1 \arrow[llldd, "\psi"] \\
 & & \tilde N_0 \arrow[ru] \arrow[lldd, "\tilde\psi_0"'] & \\
 & & & \\
A & & &
\end{tikzcd}$$

$N_1\to A$, $f\psi=\varphi$ так как $\tilde m_a=m_a(\lambda, N_1)$. (см. стр. 3). Ограничение этого гомоморфизма на полигон N противоречит максимальности N_0. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] КОРНИЕНКО, В. С.: О плоских полигонах над дистрибутивными структурами В сб.: Упорядоченные множества и решетки. Вып. 3. Издательство Саратовского университета (в печати).

[2] ФОФАНОВА, Т. С.: Полигоны над дистрибутивными структурами. – Сибирский математический журнал., т. №11, №5, 1971, 1195–1199.

[3] ФОФАНОВА, Т. С.: Инъективность полигонов над булевыми алгебрами. Сибирский математический сборник, т. XIII, №2, 1972, 452–458.
[4] ФОФАНОВА, Т. С.: Свободные расширения частичных полигонов. Сборник: Упорядоченные множества и решетки, вып. 2. Издательство Саратовского университета, 1974, 99–108.
[5] ФОФАНОВА, Т. С.: О проективности полигонов над дистрибутивными структурами. (В печати.) В сб.: Упорядоченные множества и решетки. вып. 3. Издательство Саратовского университета.
[6] MITCHELL, B.: Theory of Categories, Academic Press, New York and London (1965).

Поступило 6. 10. 1975

Московский институт хемического машиностроения
Площадь Маркса
Москва
СССР