Mathematica Slovaca

Danica Jakubíková-Studenovská

Гомоморфизмы унарных алгебрь

Mathematica Slovaca, Vol. 26 (1976), No. 4, 317--322

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136126

Math. Slov., 26, 1976, No. 4, 317—322

ГОМОМОРФИЗМЫ УНАРНЫХ АЛГЕБРЬ

ДАНИЦА ЯКУБИКОВА

Целью настоящей работы является обобщение теоремы о представлении частично упорядоченных множеств при помощи алгебраических операций, доказанной в работе [2].

Для универсальных алгебрь мы будем пользоваться терминологией как в [1]. Пусть (A, F) алгебра типа

$$\tau = (n_0, n_1, \ldots, n_\gamma, \ldots) \qquad (\gamma < \alpha)\,,$$

где α — порядковое число, A — носитель алгебры (A, F), $F = \{f_\gamma : \gamma < \alpha\}$ — множество основных операций алгебры (A, F) (для каждого $\gamma < \alpha$, операция f_γ *ябляется* n_γ-арной).

Если даны две алгебры (A, F) и (B, F') одного и того же типа τ, то основные операции $f_\gamma \in F$ и $f'_\gamma \in F'$ для каждого $\gamma < \alpha$ обозначим в каждой из рассматриваемых алгебр одинаково, т. е. мы будем писать f_γ бместо f'_γ аналогично, вместо F' мы будем писать F.

Алгебра (A, F) типа τ называется унарной, если $n_\gamma = 1$ для каждого $\gamma < \alpha$.

Пусть теперь $\mathscr{A}$ — класс алгебрь (A, F) одинакового типа τ. На множестве F определим отношение $\leqq$ следующим образом. Для f, $g \in F$ положим $f \leqq g$ тогда и только тогда, если выполняется условие: если (A, F), $(B, F) \in \mathscr{A}$ и если H — отображение множества A в $Б$, которое является гомоморфизмом относительно операции g, потом H является гомоморфизмом тоже относительно операции f. Отношение $\leqq$ будет квазиупорядочением на множестве F. Соответствующее частично упорядоченное множество обозначим $F_0 = F_0(\mathscr{A})$. Возникает вопрос, обладает ли это частично упорядоченное множество какими-то специальными свойствами, или будет ли каждое частично упорядоченное множество изоморфно какому-то частично упорядоченному множеству $F_0(\mathscr{A})$ для подходящего класса алгебр $\mathscr{A}$.

Жемберы [2] доказал теоремы:

Теорема 1. *Пусть L-счетное частично упорядоченное множество, для которого выполняется условие*

(1) *если* L_1 — *бесконечное подмножество множества* L, *потом* L_1 *не имеет нижнюю грань.*

Потом существует тип τ *и класс* $\mathscr{A}$ *алгебр типа* τ *так, что частично упорядоченные множества* L *и* $F_0(\mathscr{A})$ *изоморфны и алгебры* $(A, F) \in \mathscr{A}$ *унарны.*

Ниже будет доказана следующая

Теорема 2. *Для каждого счетного частично упорядоченного множества* L *существует класс алгебр* $\mathscr{A}$ *такой, что имеет место:*

(i) *класс* $\mathscr{A}$ *имеет в точности один элемент* (A, F);

(ii) *класс* $\mathscr{A}$ *имеет в точности один элемент* (A, F);

(ii) $F_0(\mathscr{A}) = F$;

(iii) *все операции* $f \in F$ *унарны;*

(iv) *частично упорядоченные множества* L *и* $F_0(\mathscr{A})$ *изоморфны.*

Пусть теперь $\mathscr{A}$ и $(A\ \ F)$ имеют то самое значение как выше. Пусть $F \subseteq F$. На множестве $F_1 = F - F'$ мы определим квазиупорядочение $\leqq$ как следует. Для (A, F), $(B, F) \in \mathscr{A}$ пусть $H_1(A, B)$ — множество всех отображений множества A и B, которые являются гомоморфизмами относительно каждой операции $f' \in F'$. Для $F, g \in F_1$ положим $f = g$ тогда и только тогда, если выполняется условие:

Если (A, F), $B, F) \in \mathscr{A}$ и если $H \in H_1(A, B)$ такое отображение, которое ывляется гомоморфизмом относительно операции g, потом H будет гомоморфизмом тоже относительно операции f.

Отношение $\leqq$ будет квазиупорядочением на множестве F_1. Соответствующее частично ипорядоченное множество обозначим $F_0(F') = F_0(\mathscr{A}, F')$.

Теорема 3. *Пусть* L — *любое частично упорядоченное множество. Потом существует одноэлементный класс алгебр* $\mathscr{A} = (A, F)$ *и множество* $F' \subseteq F$, $\emptyset \neq F'$ *так, что* (A, F) — *унарная алгебра и что частично упорядоченные множества* L *и* $F_0(\mathscr{A}, F')$ *изоморфны.*

§ 1

Лемма 1. *Пусть* f*-унарная операция на множестве* Z *и п сть существует* $z \in Z$ *так, что* $f(z) = z$. *Предположим, что* H*-отображение множества* Z *в* Z, *которое является гомоморфизмом относительно операции* f. *Обозначим* $H(z) = z'$. *Тогда* $f(z') = z'$.

Доказательство. Так как H является гомоморфизмом относительно операции f, имеем:

$$f(z') = f(H(z)) = H(f(z)) = H(z) = z$$

Обозначим P множество всех простых чисел отличных от 2. Для каждого $p \in R$ пусть A_r — множество всех пар (i, p), где i — класс целых чисел по модулю p. Множество всех классов целых чисел mod p будем обозначать Z_p. Определим теперь на A_p две унарные операции f_0, f_1 следующим образом: $f_0((i, p)) = (i, p)$, $f_1((i, p)) = (i+1, p)$для каждого $i \in Z_p$. Будем писать $f_0((i, p)) = f_0(i, p)$ и аналогично для f_1 и для H.

Положим $A = \cup_{p \in P} A_p$. Для каждого $T \subseteq P$ определим унарную операцию f_T на множестве A как следует: $f_T(i, p) = f_1(i, p)$ для каждого $p \in T$ и каждого $i \in Z_p$; $f_T(i, p) = f_0(i, p)$ для каждого $p \in P - T$ и каждого $i \in Z_p$.

Обозначим $C_T = \{(i, p) : P \in P - T\}$ для $T \subseteq P$.

Лемма 2. *Пусть отображение H множества A в себя является гомоморфизмом относительно операции f_T. Тогда имеет место:*

(i) *Если $(i, p) \in C_T$, то $H(i, p) \in C_T$.*

(ii) *Пусть $p \in T$ и пусть существует такое $i \in Z_p$, что $H(i, p) = (i', p') \in C_T$. Потом для каждого $i_1 \in Z_p$ будет $H(i_1, p) = (i', p')$.*

(iii) *Пусть $p \in T$ и пусть существует такое $i \in Z_p$, что $H(i, p) = (i', p') \notin C_T$. Потом $p = p'$ и для каждого $i_1 \in Z_p$ имеет место $H(i_1, p) = (i_1', p)$, причем $i_1 - i_1' \equiv i - i'$* (mod p).

Доказательство. (i) Утверждение вытекает непосредственно из Леммы 1.

(ii) Пусть $p \in T$ и пусть существует такое $i \in Z_p$, что $H(i, p) = (i', p') \in C_T$. Отображение H — гомоморфизм относительно операции f_T, потому $H(f_T(i, p)) = f_T(H(i, p))$, откуда $H(i+1, p) = f_T(i', p')$. Из $(i', p') \in C_T$ вытекает: $H(i+1, p) = (i', p')$. Индукцией можно доказать, что для каждого $i_1 \in Z_p$ будет $H(i_1, p) = (i', p')$.

(iii) Пусть $p \in T$ и пусть существует $i \in Z_p$ такое, что $H(i, p) = (i', p') \notin C_T$. Потом $H(i+1, p) = f_T(i', p') = (i'+1, p')$ и при помощи индукции мы получим $H(i+s, p) = (i'+s, p')$ для каждого натурального числа s. Тогда $(i', p') = H(i, p) = H(i+p, p) = (i'+p, p')$. Из этого вытекает, что p делится на p'. Так как $p, p \in P$, то $p' = p$. Пусть $H(i_1, p)$, где $i_1 \in Z_p$. Можно предполагать, что существует целое число $s \geqq 0$ такое, что $i_1 \equiv i + s$ (mod p). Потом $H(i_1, p) = H(i+s, p) = (i'+s, p) = (i_1', p)$, откуда $i_1' \equiv i' + s$ (mod p). Из этого вытекает, что $i_1 - i_1' \equiv i - i'$ (mod p).

Лемма 3. *Пусть $T \subseteq P$ и для отображения $H: A \to A$ выполнены условия* (i)—(iii) *из Леммы 2. Потом отображение H является гомоморфизмом относительно операции f_T.*

Доказательство. Легко проверяется, что в каждом из случаев (i)—(iii) будет $H(f_T(i, p) = f_T(H(i, p))$.

Пусть $F = \{f_T : T \subseteq P\}$. Пусть $\mathscr{A} = \{(A, F)\}$ — одноэлементный класс алгебр.

Лемм 4. *Пусть T, $G \subseteq P$, $G \subseteq T$. Потом $f_G \leqq f_T$.*

Доказательство. Надо показать, что каждое отображение $H \cdot A \to A$, орое я ляется гомоморфизмом относительно операции f , будет гомомор- м лом тоже относительно операции f_G.

Пусть $H \cdot A \to A$ такое отображение, что $H(f_T(i, p)) = f_T(H(i, p))$ для каждого $(i\ p) \in A$

1 Пус ь $p \in (P - T) \cup G$, $H(i, p) = (i', p')$. Потом тоже $p' \in (P - T) \cup G$ (согласно Лемме 2), и таким образом $H(f_G(i, p)) = H(f_T(i, p)) = f_T(H(i, p)) = f_T(i', p') = f_G(i', p') = f_G(H(i, p))$.

. Г у ть $p \in T - G$. Потом $f_T(i, p) = f_1(i, p)$, $f_G(i, p) = f_0(i, p)$, Та как H я омоморфизмом относительно операции f_T, то будет $H(i, p) = (i'$ $)$ где $p' \in P - g$ (в силу Леммы 2), откуда $H(f_G(i, p)) = H(i, p) = (i', p') - f$ $p') = f_G(H(i, p))$.

Ле ма 5. *Пусть T, $G \subseteq P$, $G \nsubseteq T$. Потом $f_G \nleqq f_T$.*

До азательство. Так как $G \nsubseteq T$, то существует элемент p $\in G$ такой что $_0$ Г Н то показать, что существует отображение H $A \to A$, которо я яется гомоморфизмом относительно операции f_T, но не будет гомоморфизмо . относительно f_G Определим H так, что $H(i, p) = (i, p)$ для $p \neq p_0$, и п $(i\ p_0)$ будут отображаться следующим образом: если $i_0 = 0$ (mod p_0), положим $H(i_0, p_0) = (i_0, p_0)$; для каждого $i \not\equiv i$ mod p) положим $H(i, p) = (i_0 + 2, p_0)$. Так как $f_T(i, p_0) = f(i, p_0)$ и тоже $f(H(i, p_0)) = (H(i, p_0)$, то из Леммы 3 вытекает, что H ябляется гомоморфизмом от носительно операции f_T. Предположим, что H является гомоморфи мо т тельно операции f_G. Потом $f_G(H(i_0, p_0)) = H(f_G(i, p))$. Име т место $(H(i_0, p_0)) =$ $_G(i_0,$ $p_0) = (i_0 + 1, p_0)$; $H(f_G(i_0, p)) = H(i + 1, p)$, 2 $) - i$. 1, p), что неверно Таким образом $f_G \nleqq f$.

ледствие 1. *Пусть T, $G \subseteq P$. Потом $f_G \leqq f_T$ тогда и только тогда, когда T.*

Т L-счетное частично упорядоченное мı ожест о. Для каждого $x \in L$ обозначим $Q(x) = \{u \in L : U \leqq x\}$. Пусть φ взаимно однозначное отображени множеств P на множество L. Для каждого $x \in L$ положим $T(x) -$ P φ $p) \leqq x\}$.

Д азательство Теоремы 2. Знаком $\sim$ обозначим отношение изоморфизма кв зи упорядоченных множеств. Обозначим $\{f_{T(x)} . x \in L\}$ F. П то з Сл ствия 1 вы екает

$$L \sim \{Q(x) . x \in L\} \sim \{T(x) : x \in L\} \sim \{f_{T(x)} : x \in L\} = F$$

Так как L-частично упорядоченное множество, то в силу (2) е з упорядоченное множество F будет частично упорядоченным множе т о т ким образ $F = r_0(\mathscr{A})$.

§ 2.

Пусть L — любое частично упорядоченное множество. Пусть теперь P будет такое множество, что существует взаимно однозначное отображение φ множества P на множество L. Обозначим $A=\{x_p: p\in P\}\cup\{y_p: p\in P\}\cup\{s\}$, где множества $\{x_p: p\in P\}$, $\{y_p: p\in P\}$, $\{s\}$ попарно дизъюнктны и $x_{p_1}\neq x_{p_2}$, $y_{p_1}\neq y_{p_2}$ для любых p_1, $p_2\in P$, $p_1\neq p_2$. Далее положим $A_p=\{x_p, y_p\}$ для $p\in P$.

Пусть $T\subseteq P$. На множестве A определим унарные операции f_i для каждого $i\in P$ следующим образом: $f_i(x_i)=y_i$, $f_i(y_i)=s$, $f_i(s)=s$; $f_i(x_p)=x_p$, $f_i(y_p)$ для каждого $p\in P$, $p\neq i$. Далее на A определим унарную операцию f_T как следует: для каждого $p\in T$ будет $f_T(x_p)=x_p$, $f_T(y_p)=s$, $f_T(s)=s$; для каждого $p\in P-T$ будет $f_T(x_p)=y_p$, $f_T(y_p)=s$.

Лемма 6. *Отображение $H\colon A\to A$ является гомоморфизмом относительно операции f_i для каждого $i\in P$ тогда и только тогда, если $H(s)=s$ для каждого $p\in P$ выполняется одно из следующих условий:*

(i) $H(x_p)=x_p$, $H(y_p)=y_p$,

(ii) $H(x_p)=y_p$, $H(y_p)=s$,

(iii) $H(x_p)=H(y_p)=s$.

Доказательство. 1. Пусть $H\colon A\to A$, $H(s)=s$ и пусть для каждого $p\in P$ выполняется одно из условий (i)—(iii). Надо доказать, что $H(f_i(a))=f_i(H(a))$ для каждого $i\in P$ и каждого $a\in A$. Имеет место $f_i(x_p)=x_p$, $f_i(y_p)=y_p$ для $p\neq i$. Тогда очевидно $H(f_i(x_p))=f_i(H(x_p)$, $H(f_i(y_p))=f_i(H(y_p))$ для каждого из случаев (i)—(iii). В случае (i) имеем $f_i(H(x_i))=f_i(x_i)=y_i=H(y_i)=H(f_i(x_i))$, $f_i(H(y_i))=f_i(y_i)=s=H(s)=H(f_i(y_i))$. Аналогично разбираются случаи (ii), (iii).

2. Пусть $H\colon A\to A$ является гомоморфизмом относительно операции f_i для каждого $i\in P$. Предположим, что $H(s)=x_i$ или y_i для какого-то $i\in P$. Но $f_i(x_i)\neq x_i$, $f_i(y_i)\neq y_i$, что, как вытекает из Леммы 1, неверно. Потому $H(s)=s$.

Пусть $p\in P$. Предположим, что $H(x_p)\in A_i$, $i\in P$, $i\neq p$. Отображение H является гомоморфизмом относительно f_p, потому $s\neq H(x_p)=f_p(H(x_p))=$-$H(f_p(x_p))=H(y_p)=f_p(H(y_p))=H(f_p(y_p))=H(s)$, что неверно. Значит, $H(x_p)\in A_p\cup\{s\}$. Аналогично доказывается, что $H(y_p)\in A_p\cup\{s\}$.

(i) Пусть $H(x_p)=x_p$. Потом $H(y_p)=H(f_p(x_p))=f_p(H(x_p))=f_p(x_p)=y_p$.

Совсем аналогично, если $H(x_p)=y_p$, то $H(y_p)=s$ и если $H(x_p)=s$, то $H(y_p)=s$.

Обозначим $F=\{f_T\colon T\subseteq P\}\cup F'$, где $F'=\{f_i\colon I\in P\}$. Пусть $\mathscr{A}$ — одноэлементный класс алгебр, $\mathscr{A}=\{(a, F)\}$.

Лемма 7. *Пусть T, $G\subseteq P$. Если $G\subseteq T$, потом $f_G\leqq f_T$.*

Доказательство. Пусть $H\colon A\to A$ является гомоморфизмом относительно f_i для каждого $i\in P$, и тоже относительно f_T. Надо показать, что потом H

является гомоморфизмом относительно операции f_G. Очевидно, $H(f_G(s)) = f_G(H(s))$.

1. Пусть $p \in (P-T) \cup G$, $a_p \in A_p$. Потом $H(a_p) \in A_p \cup \{s\}$ (в силу Леммы 6), и следовательно $H(f_G(a_p)) = f_T(a_p)) = f_T(H(a_p)) = f_G(H(a_p))$.

2. Пусть $p \in T-G$, $a_p \in A_p$. Так как для $p \in T-G$ имеет место $p \in T-G$, $a_p \in A_p$. Так как для $p \in T-g$ имеет место $f_G(a_p) = f_p(a_p)$ и H является гомоморфизмом тоже относительно f_p, то $H(f_G(a_p)) = f_G(H(a_p))$.

Таким образом H является гомоморфизмом тоже относительно операции f_G.

Лемма 8. *Пусть T, $G \subseteq P$ и пусть $G \nsubseteq T$. Потом $f_G \nleqq f_T$.*

Доказательство. Так как $G \nsubseteq T$, то существует элемент $p_0 \in G$ такой, что $p_0 \notin T$. Надо найти отображение $H: A \to A$, которое будет гомоморфизмом относительно операции f_T и относительно всех операций f_i, $i \in P$, но не будет гомоморфизмом относительно операции f_G.

Определим H следующим образом: $H(s) = s$; $H(a_p) = a_p$ для каждого $a_p \in A_p$ и каждого $p \in P$, $p \neq p_0$; $H(x_{p_0}, H(y_{p_0}) = s$. Очевидно, H является гомоморфизмом относительно операции f_T и относительно операции f_i для каждого $i \in P$. Предложим, что H является гомоморфизмом тоже относительно операции f_G. Тогда имеет место: $s = f_G(y_{p_0}) = f_G(H(x_{p_0})) = H(f_G(x_{p_0})) = H(x_{p_0}) = y_{p_0} \neq s$, что неверно.

Следствие 2. *Пусть T, $G \subseteq P$. Потом $f_G \leqq f_T$ тогда и только тогда, если $G \subseteq T$.*

Из Следствия 2 вытекает доказательство Теоремы 3 тем же методом, которым мы использовались в доказательстве Теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] МАЛЬЦЕВ А. И.: Алгебраические системы. Москва 1970.

[2] ЖЕМБЕРЫ И.: Характеризация операций в алгебрах при помощи частично упорядоченных множеств. Mat. Čas. 24, 1974, 277—282.

Поступило 5. 12. 1974

Katedra matematiky
Prírodovedeckej fakulty UPJŠ
nám. Februárového víťazstva 9
040 01 Košice