Czechoslovak Mathematical Journal

Edgar Müller; Otto Mutzbauer

Schichtengleiche Gewichte und Butlergruppen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 47 (1997), No. 2, 193–204

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127351

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1997

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Czechoslovak Mathematical Journal, 47 (122) 1997, Praha

SCHICHTENGLEICHE GEWICHTE UND BUTLERGRUPPEN

EDGAR MÜLLER und OTTO MUTZBAUER, Würzburg

(Eingegangen am 21. April 1993)

Das Gewicht einer torsionsfreien abelschen Gruppe A ist eine Abbildung φ, die jedem Unterraum W der divisiblen Hülle $V = \mathbb{Q}A$ den Summentyp $ST(W \cap A)$ zuordnet. Aus diesem lassen sich sämtliche Typeninvarianten ablesen. Schichtengleichheit von Gewichten ist eine Äquivalenzrelation. Gruppen mit schichtengleichen Gewichten besitzen denselben Richman-Typ. Weiter ist eine Gruppe, deren Gewicht schichtengleich dem einer Butlergruppe ist, selbst eine Butlergruppe.

Die folgenden Begriffe werden von [6] übernommen. Eine aufsteigende Reihe reiner Untergruppen $0 = A_0 \subset_* A_1 \subset_* \ldots \subset_* A_n = A$ einer torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges mit um 1 ansteigenden Rängen heißt eine *Kompositionsreihe*. Die Reihe $\{t_1, \ldots, t_n\}$ der zugehörigen Typen $t_i = t(A_i/A_{i-1})$ heißt eine *Typenreihe* von A. Die Quotienten A_i/A_{i-1} heißen *Hauptfaktoren* und die zugehörigen Typen *Haupttypen*. Die Summe der Haupttypen einer Typenreihe $ST(A) = \sum_{i=1}^{n} t_i$ ist eine Invariante ([6,3.1]), d.h. unabhängig von der Wahl der Kompositionsreihe in A, und wird als der *Summentyp* von A bezeichnet.

Sei V ein rationaler Vektorraum endlicher Dimension. Sei $\mathscr{V} = \mathscr{V}(V)$ der Verband aller Unterräume von V. Sei $\mathscr{M}$ der Verband aller verallgemeinerten Typen (vgl. [6]). Sei $\mathscr{K}$ die Menge der ordnungserhaltenden Abbildungen von $\mathscr{V}$ nach $\mathscr{M}$, die dem Raum 0 den Typ $0 = t(\mathbb{Z})$ zuordnen und einem Unterraum W einen verallgemeinerten Typ $\leqslant ST(W)$, wobei W als divisible torsionsfreie abelsche Gruppe betrachtet wird. Solche Abbildungen heißen *Gewichte*. Gewichte heißen vom *Rang* n, wenn der Vektorraum V die Dimension n hat. Ein Gewicht γ heißt *endlich*, wenn $\gamma(\mathscr{V})$ endlich ist. Die Menge $T_\gamma^k = \{\gamma(U) \mid U \subset V, \dim U = k\}$ heißt das *Gewicht auf der k-ten Schicht*.

Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe A vom Rang n mit divisibler Hülle $V = \mathbb{Q}A$ sei der Verband $\mathscr{V}(V)$ aller Unterräume in V mit $\mathscr{V}_n$ bezeichnet. Die Abbildung

$\varphi\colon \mathscr{V}_n \to \mathscr{M}$ wird für $W \in \mathscr{V}_n$ definiert durch $\varphi(W) = ST(W \cap A)$. Sie ist eine ordnungserhaltende Abbildung in $\mathscr{K}$ und wird als das *Gewicht* von A bezeichnet.

Zur Definition einer Booleschen Algebra werden die Bezeichnungen und Definitionen von Birkhoff [2] verwendet.

Ein komplementierter distributiver Verband heißt *Boolesche Algebra*. Nach [2, Ch. X, Theorem 6] ist jede Boolesche Algebra endlicher Länge n isomorph zur Potenzmenge einer Menge von n Elementen und wird deshalb kurz als isomorph zu 2^n bezeichnet. Sei $I = \{1, \dots, n\}$ eine n-elementige Menge. Dann werden die Elemente aus einer Booleschen Algebra $\mathscr{W}$ für $P \subset I$ mit $\mathscr{W}_P$ identifiziert. Dabei gelten für Teilmengen P, $Q \subset I$ die Regeln $\mathscr{W}_P \cap \mathscr{W}_Q = \mathscr{W}_{P\cap Q}$ und $\mathscr{W}_P \cup \mathscr{W}_Q = \mathscr{W}_{P\cup Q}$. Ferner ist für die Teilmenge $\overline{P} \subset I$ mit $P \cap \overline{P} = \emptyset$ und $P \cup \overline{P} = I$ das Element $\mathscr{W}_{\overline{P}}$ das eindeutig bestimmte Komplement zu $\mathscr{W}_P$.

In [4] wird folgende Definition für die Hypertypen eingeführt. Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n und F eine vollrangige freie Untergruppe von A. Sei $A/F \cong \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ eine Zerlegung von A/F mit $0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_n \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Eine solche Zerlegung ist eindeutig, man bezeichnet sie als *Standardzerlegung*. Der i-te *Hypertyp* von A ist definiert als $HT_i(A) = t(T_i)$. Die Hypertypen $HT_1(A) = IT(A)$ bzw. $HT_n(A) = OT(A)$ sind nach [9] der innere bzw. der äußere Typ von A. Für eine vollrangige Untergruppe B einer torsionsfreien abelschen Gruppe A des Ranges n gilt nach [3, 15.6] $HT_i(B) \leqslant HT_i(A)$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Die Quasiisomorphieklasse der Torsionsgruppe A/F heißt *Richman-Typ* $RT(A)$ von A. Sie ist unabhängig von der Wahl der vollrangigen freien Untergruppe F, so daß $RT(A)$ eine Invariante von A ist, siehe [8].

Für den Richnam-Typ $RT(A) = \left[A/F = \bigoplus_{j=1}^{n} T_j\right]$ einer torsionsfreien abelschen Gruppe A des Ranges n bezeichnet man für Indizes $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$ mit $RT_i^k(A)$ die Quasiisomorphieklasse $RT_i^k(A) = \left[\bigoplus_{j=i}^{k} T_j\right]$. Insbesondere ist $RT(A) = RT_1^n(A)$. Für Richman-Typen $RT(A)$ bzw. $RT(B)$ schreibt man $RT_i^j(A) \leqslant RT_k^l(B)$ oder $RT_i^j(A) \tilde{\subset} RT_k^l(B)$, falls $HT_{i+m}(A) \leqslant HT_{k+m}(B)$ gilt für alle $0 \leqslant m \leqslant j - i = l - k$. Insbesondere besitzt A *kleineren Richman-Typ als* B, i. Z. $RT(A) \leqslant RT(B)$, falls $HT_i(A) \leqslant HT_i(B)$ gilt für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Es gilt also $RT(C) \leqslant RT(A)$ für eine vollrangige Untergruppe $C \subset A$, und bei gleichem Richman-Typ, d.h. $RT(C) = RT(A)$, besitzt C endlichen Index in A (vgl. Satz 9). Analog definiert man für eine Primzahlmenge P die *P-Gleichheiten* bzw. die *P-Vergleichbarkeiten* $RT_i^j(A) \leqslant_P RT_k^l(B)$, $RT_i^j(A) =_P RT_k^l(B)$, und $RT_i^j(A) \geqslant_P RT_k^l(B)$, falls entsprechendes für die zugehörigen Hypertypen gilt. Ferner ist $RT_i^j(A) <_P RT_k^l(B)$, falls $RT_i^j(A) \leqslant_P RT_k^l(B)$ und P-Gleichheit nicht für alle Hypertypen gilt. Analog $RT_i^j(A) >_P RT_k^l(B)$.

Teilsummen von Hypertypen sind definiert durch $ST_i^k(A) = \sum_{j=i}^{k} HT_j(A)$. Für $i > k$ setzt man $ST_i^k(A) = t(\mathbb{Z})$. [6, 4.1] liefert $ST(A) = ST_1^n(A)$, den üblichen Summentyp von A. Sowieso ist $ST(A) = ST_1^k(A) + ST_{k+1}^n(A)$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$.

Die folgenden Ergebnisse für die Hypertypen beruhen auf [4, 1+2+4].

Satz 1. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n und $\mathscr{W}$ eine Boolesche Algebra isomorph zu 2^n in $\mathscr{V}_n$. Dann gilt:*

$$HT_i(A) = \bigcup_{\substack{|Q|=i-1 \\ Q\subset I}} IT\big(A/(\mathscr{W}_Q \cap A)\big) = \bigcap_{\substack{|P|=i \\ P\subset I}} OT(W_P \cap A).$$

Insbesondere ist diese Formel unabhängig von der Wahl der Boolschen Algebra $\mathscr{W}$.

Lemma 2. *Sie A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges $n \geqslant 2$. Für reine Untergruppen $X \subset_* Y \subset_* A$ mit zugehörigen Rängen $0 < \mathrm{rg}(X) = k \leqslant \mathrm{rg}(Y) = l < n$ gelten:*

(1) $IT(A/Y) \leqslant HT_{l+1-k}(A/X) \leqslant HT_{l+1}(A)$.

(2) $OT(X) \geqslant HT_k(Y) \geqslant HT_k(A)$.

Für eine reine Untergruppe X einer torsionsfreien abelschen Gruppe A sei $C^A(X) = \{Z \subset_* A \mid A/(Z \oplus X) \text{ ist Torsionsgruppe}\}$ die Menge aller reinen Komplemente in A. Die Gruppen Z heißen „X-high" Untergruppen [3].

Mit Lemma 2 erhält man die Abschätzungen für die Summentypen und Richman-Typen:

Korollar 3. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n und seien B rein in A, vom Rang k, und $C \in C^A(B)$. Dan gelten*

(1) $ST_i^j(A) \leqslant ST_i^j(C) \leqslant ST_i^j(A/B) \leqslant ST_{i+k}^{j+k}(A)$ *für alle* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-k$.

(2) $RT_i^j(A) \leqslant RT_i^j(C) \leqslant RT_i^j(A/B) \leqslant RT_{i+k}^{j+k}(A)$ *für alle* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-k$.

Insbesondere gelten $ST_1^k(A) \leqslant ST(B) \leqslant ST_{n-k+1}^n(A)$ und $RT_1^k(A) \leqslant RT(B) \leqslant RT_{n-k+1}^n(A)$ für alle reinen Untergruppen B, vom Rang k.

Die folgenden einfachen Typenrechnungen werden häufiger verwendet:

Lemma 4. *Seien I eine endliche Indexmenge und s, t, u, t_i, u_i (verallgemeinerte) Typen mit $t \leqslant t_i \leqslant s$ für alle $i \in I$. Dann gelten:*

(1) $\bigcap_{i\in I} (s - t_i) = s - \bigcup_{i\in I} t_i$.

(2) $\bigcup_{i\in I} (s - t_i) = s - \bigcap_{i\in I} t_i$.

(3) $\bigcap_{i\in I}(t_i - t) = \bigcap_{i\in I} t_i - t.$

(4) $\bigcup_{i\in I}(t_i - t) = \bigcup_{i\in I} t_i - t.$

(5) $\bigcap_{i\in I}(u_i + u) = \bigcap_{i\in I} u_i + u.$

(6) $\bigcup_{i\in I}(u_i + u) = \bigcup_{i\in I} u_i + u.$

Lemma 5. *Seien t_1, t_2, s_1 und s_2 (verallgemeinerte) Typen. Dann gilt $(t_1 + t_2) \cap (s_1 + s_2) \leqslant (t_i \cap s_k) + (t_j \cup s_l)$ für $\{i,j\} = \{k,l\} = \{1,2\}$.*

Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n mit dem Gewicht φ_A. Für das Gewicht von A auf der k-ten Schicht schreibt man auch $T_A^k = T_{\varphi_A}^k$. Insbesondere ist $T_A^1 = T(A)$ die Typenmenge von A und $T_A^n = \{ST(A)\}$. Zwei Gruppen A und B gleichen Ranges n bzw. ihre Gewichte heißen *schichtengleich*, wenn $T_A^k = T_B^k$ gilt für alle $1 \leqslant k \leqslant n$. Der folgende Satz beschreibt das Infimum der Menge T_A^k. Für $k = 1$ liefert die angegebene Formel den inneren Typ.

Satz 6. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n mit dem Gewicht φ_A und $\mathscr{W}$ eine Boolesche Algebra isomorph zu 2^n in $\mathscr{V}_n$. Dann gilt:*

$$\inf T_A^k = \bigcap_{\substack{Q\subset I\\|Q|=k}} \varphi_A(\mathscr{W}_Q) = ST_1^k(A).$$

Insbesondere ist diese Gleichung unabhängig von der Wahl der Booleschen Algebra $\mathscr{W}$.

B e w e i s. Mit [6, 4.1] und Korollar 3 folgt $\varphi_A(U) \overset{[6,4.1]}{=} ST(U \cap A) \overset{\text{Kor.3}}{\geqslant} ST_1^k(A)$ für alle Unterräume $U \subset V = \mathbb{Q}A$ der Dimension k. Die behauptete Gleichung zeigt man mit Induktion über die Dimension k der Unterräume $U \subset V$ bzw. die Mächtigkeit $|Q|$ der Teilmengen $Q \subset I$. Für $k = 1$ folgt $\bigcap\{\varphi_A(\mathscr{W}_Q) \mid Q \subset I, |Q| = 1\} = IT(A) = HT_1(A) = ST_1(A)$ aufgrund der Definition des inneren Typs. Sei nun schon für alle $m < k$ die Gleichheit $\bigcap\{\varphi_A(\mathscr{W}_Q) \mid Q \subset I, |Q| = m\} = ST_1^m(A)$ gezeigt. Dann ist

$$\begin{aligned} ST_1^k(A) &\leqslant \bigcap_{\substack{Q\subset I\\|Q|=k}} \varphi_A(\mathscr{W}_Q) \overset{\text{Lem.4(5)}}{=} \bigcap_{\substack{P\subset I\\|P|=k-1}} \Big(\varphi_A(\mathscr{W}_P) + IT\big(A/(\mathscr{W}_P \cap A)\big)\Big) \\ &\overset{\text{Lem.5}}{\leqslant} \bigcap_{\substack{P\subset I\\|P|=k-1}} \varphi_A(\mathscr{W}_P) + \bigcup_{\substack{P\subset I\\|P|=k-1}} IT\big(A/(\mathscr{W}_P \cap A)\big) \\ &\overset{\text{Satz1+Ind.ann.}}{=} ST_1^{k-1}(A) + HT_k(A) = ST_1^k(A) \end{aligned}$$

mit Gleichheit. □

Somit lassen sich auch die i-ten Hypertypen wie folgt aus dem Gewicht berechnen:

Korollar 7. *Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe A des Ranges n und $1 \leqslant i \leqslant n$ gilt:*

$$HT_i(A) = \inf T_A^i - \inf T_A^{i-1}.$$

B e w e i s. Für den i-ten Hypertyp gilt:

$$HT_i(A) = ST_1^i(A) - ST_1^{i-1}(A) \overset{\text{Satz } 6}{=} \inf T_A^i - \inf T_A^{i-1}.$$

□

Inbesondere lassen sich die üblichen Typeninvarianten, wie der innere Typ $IT(A) = HT_1(A)$, der äußere Typ $OT(A) = HT_n(A)$, der Summentyp $ST(A) = \sum_{i=1}^{n} HT_i(A)$ und der Richman-Typ $RT(A) = \big(HT_1(A), \dots, HT_n(A)\big)$ am Gewicht ablesen.

Die folgende Proposition zeigt, daß die Schichtengleichheit zweier Gruppen denselben Richman-Typ garantiert.

Propostion 8. *Schichtengleiche Gruppen besitzen denselben Richman-Typ.*

B e w e i s. Seien A und B zwei schichtengleiche Gruppen. Dann ist $T_A^k = T_B^k$ für alle $1 \leqslant k \leqslant \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$ und mit Korollar 7 folgt $HT_k(B) = \inf T_B^k - \inf T_B^{k-1} = \inf T_A^k - \inf T_A^{k-1} = HT_k(A)$. □

Natürlich sind Gruppen vom selben Richman-Typ i.a. nicht schichtengleich, wie die Gruppen $\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Q}^{(p,q)}b$ und $\mathbb{Q}^{(p)}a \oplus \mathbb{Q}^{(q)}b$ mit verschiedenen Primzahlen p, q zeigen. Andererseits sind zwei Gruppen A und B mit denselben Mengen von Typenreihen $\mathscr{T}(A) = \mathscr{T}(B)$ schichtengleich. Umgekehrt besitzen jedoch schichtengleiche Gruppen i.a. nicht dieselben Mengen von Typenreihen. Seien nämlich $A = \mathscr{S}x_1 \oplus \mathscr{S}x_2 \oplus \mathscr{S}x_3 \oplus A'$ und $B = \mathscr{S}x_1 \oplus \mathscr{S}x_2 \oplus \mathscr{S}x_3 \oplus B'$ mit $A, B \subset \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{Q}x_i$ und den Gruppen $A' = \big\langle x_4, x_5, p^{-2}(x_4 + [\sqrt{p}]x_5) \mid p \text{ prim}\big\rangle$ und $B' = \big\langle x_4, x_5, p^{-2}(x_4 + px_5) \mid p \text{ prim}\big\rangle$. Man erkennt leicht, daß die Gruppen B und B' jeweils $t(\mathscr{S})$-uniform sind, die Gruppe A jedoch nicht, da A' faktoriell homogen ist. Also gilt $\mathscr{T}(A) \neq \mathscr{T}(B)$. Jedoch sind A und B schichtengleich. Dazu betrachtet man die Gewichte auf den einzelnen Schichten.

Für $k = 1$ gilt: $T(A) = T_A^1 = \big\{t(\mathbb{Z}), t(\mathscr{S})\big\} = T_B^1 = T(B)$.

Für $k = 2$ gilt: $T_A^2 = \big\{t(\mathscr{S}), 2t(\mathscr{S})\big\} = T_B^2$.

Für $k = 3$ gilt: $T_A^3 = \big\{2t(\mathscr{S}), 3t(\mathscr{S})\big\} = T_B^3$.

Für $k = 4$ gilt: $T_A^4 = \big\{3t(\mathscr{S}), 4t(\mathscr{S})\big\} = T_B^4$.

Für $k = 5$ gilt: $T_A^5 = \big\{ST(A) = 5t(\mathscr{S}) = ST(B)\big\} = T_B^5$.

Also sind A und B schichtengleich.

Der folgende Satz beschreibt die Untergruppen einer torsionsfreien abelschen Gruppe A, die schichtengleich zu A sind.

Satz 9. *Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe A endlichen Ranges und eine vollrangige Untergruppe $U \subset A$ sind äquivalent:*
(1) *A/U ist endlich.*
(2) *U und A sind schichtengleich.*
(3) *U und A besitzen denselben Richman-Typ.*

Beweis. (1) nach (2) ist trivial. (2) nach (3) zeigt Proposition 8. Seien nun U und A vom selben Richman-Typ und n ihr Rang. Sei F eine vollrangige freie Untergruppe von U. Dann sind $U/F = T_1 \oplus \ldots \oplus T_n \doteq A/F = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ quasiisomorphe Standardzerlegungen mit $HT_i(U) = t(T_i) = t(S_i) = HT_i(A)$, d.h. $(T_i)_p \cong (S_i)_p$ für fast alle p und beide sind zyklisch oder isomorph zu $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Seien nun $U_p := (U/F)_p \subset A_p := (A/F)_p$ die zugehörigen Primärkomponenten. Nach [3, 21.3] lassen sich U_p bzw. A_p zerlegen in $U_p = R_U \oplus D_U$ bzw. $A_p = R_A \oplus D_A$ mit bis auf Isomorphie festgelegten endlichen Gruppen R_U bzw. R_A und divisiblen Gruppen D_U bzw. D_A. Nun ist $D_U = \bigoplus \{(T_i)_p \mid (T_i)_p \cong \mathbb{Z}(p^\infty)\} \subset D_A = \bigoplus \{(S_i)_p \mid (S_i)_p \cong \mathbb{Z}(p^\infty)\}$ mit Gleichheit und nach [3, 21.2] kann R_A so gewählt werden, daß $R_U \subset R_A$, da $R_U \cap D_U = 0$. Also ist $A_p/U_p = (R_A \oplus D_A)/(R_U \oplus D_U) \cong R_A/R_U$ endlich. Da $(T_i)_p \cong (S_i)_p$ für fast alle p gilt, muß auch $U_p = A_p$ für fast alle p gelten und $(\bigoplus_p A_p)/(\bigoplus_p U_p) \cong \bigoplus_p^{\text{endl}} (A_p/U_p)$ ist endlich. Folglich ist $(A/F)/(U/F) \cong A/U$ endlich. □

Im folgenden wird die Schichtengleichheit für Butlergruppen betrachtet. Butlergruppen besitzen ein endliches Gewicht ([6, 6.1]). In Gruppen mit einem endlichen Gewicht sind der innere und der äußere Typ realisiert ([6, 1.3+2.6]). Somit existieren für diese Gruppen Kompositionsreihen $0 \subset_* A_1 \subset_* \ldots \subset_* A_n = A$ mit zugehöriger Typenreihe $\{t_1, \ldots, t_n\}$, wobei $t_i = t(A_i/A_{i-1}) = IT(A/A_{i-1})$ gelten.

[4, Corollary 1] zeigt $RT(A/X) = RT_2^n(A)$ für eine reine rationale Untergruppe X vom inneren Typ $IT(A)$. Somit erhält man folgendes Ergebnis für Gruppen mit einem endlichen Gewicht:

Satz 10. [4, Corollary 1], [6,1.3] *Eine torsionsfreie abelsche Gruppe A des Ranges n mit einem endlichen Gewicht besitzt eine reine Untergruppe B des Ranges $k \leqslant n$ mit $RT(B) = RT_1^k(A)$ und $RT(A/B) = RT_{k+1}^n(A)$. Insbesondere besitzt A eine aufsteigend linear geordnete Typenreihe, nämlich $\{HT_1(A), \ldots, HT_n(A)\}$.*

Für Butlergruppen gilt sogar schärfer:

Satz 11. [7, Satz 8] *Eine Butlergruppe A besitzt genau eine aufsteigend linear geordnete Typenreihe.*

Das folgende Lemma beschreibt die Hypertypen von Butlergruppen:

Lemma 12. [7, Lemma 13] *Sie A eine Butlergruppe und X rein in A, vom Rang $i-1$, mit $RT(X) = RT_i^{i-1}(A)$. Dann ist*

$$IT(A/X) = HT_i(A) = \sup\{IT(Z) \mid Z \in C^A(X)\}.$$

Die Hypertypen von Butlergruppen lassen sich aus der Typenmenge und den Rängen der Typenuntergruppen bestimmen. Diese Eigenschaft ist auch charakteristisch für Butlergruppen.

Satz 13. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n mit einer endlichen Typenmenge T. Dann sind äquivalent:*
(1) *A ist eine Butlergruppe.*
(2) *$HT_i(A) = \bigcup\{t \in T \mid i > n - \operatorname{rg}(A(T))\}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.*

B e w e i s. Sei A eine Butlergruppe, $t \in T$ und $l_t = \operatorname{rg}(A(t))$. Sei $\overline{A} \in C^A(A(t))$. Dann ist $t = HT_1(A(t)) = HT_1((A(t) \oplus A)/\overline{A}) \leqslant HT_1(A/\overline{A}) \overset{\text{Lem.2}}{\leqslant} HT_{1+(n-l_t)}(A) \leqslant HT_i(A)$, falls $i > n - l_t$. Folglich gilt auch $HT_i(A) \geqslant \bigcup\{t \in T \mid i > n - l_t\}$. Nach Satz 10 existiert andererseits eine reine Untergruppe X des Ranges $i-1$ mit $RT(X) = RT_i^{i-1}(A)$ und $HT_i(A) = IT(A/X)$. Für eine Gruppe $Z \in C^A(X)$ gilt offensichtlich $Z \subset A(IT(Z))$ und deshalb $\operatorname{rg}(A(IT(Z))) = l_{IT(Z)} \leqslant n - i + 1$. Also ist $IT(Z) \in \{t \in T \mid i > n - l_t\}$. Schließlich ist $\bigcup\{t \in T \mid i > n - l_t\} \geqslant \bigcup\limits_{Z \in C^A(X)} IT(Z) \overset{\text{Lem.12}}{=} HT_i(A)$ und die Gleichheit ist gezeigt.

Sei umgekehrt (2) verausgesetzt. Dann gibt es nach [1, 0.1+1.9] eine reguläre Butleruntergruppe $C \subset A$ gleichen Ranges, es gilt also $C(t) = C \cap A(t)$ für alle $t \in T$. Aus Ranggründen besitzen $C(t)$ und $A(t)$ denselben Rang l_t für alle $t \in T$. Folglich ist $HT_i(C) = \bigcup\{t \in T \mid i > n - l_t\} = HT_i(A)$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, da C eine Butlergruppe ist, und C besitzt nach Satz 9 endlichen Index in A. Also ist A wie C eine Butlergruppe. □

Es ergibt sich nun sofort die folgende Abschätzung für die Hypertypen torsionsfreier abelscher Gruppen endlichen Ranges mit endlicher Typenmenge.

Korollar 14. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n mit einer endlichen Typenmenge T. Dann ist $HT_i(A) \geqslant \bigcup\{t \in T \mid i > n - \operatorname{rg}(A(t))\}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.*

B e w e i s. Nach [1, 0.1+1.9] existiert eine reguläre Butleruntergruppe $B \subset A$ gleichen Ranges und nach Satz 13 gilt für diese $HT_i(A) \geqslant HT_i(B) = \bigcup \{t \in T \mid i > n - \operatorname{rg}(A(t))\}$. □

Zwei Butlergruppen mit gleichen Typenmengen und gleichrangigen Typenuntergruppen besitzen denselben Richman-Typ.

Korollar 15. *Zwei Butlergruppen A und B mit denselben Typenmengen T und $\operatorname{rg}(A(t)) = \operatorname{rg}(B(t))$ für alle $t \in T$ besitzen denselben Richman-Typ.*

B e w e i s. Die Gruppen A und B besitzen nach Satz 13 dieselben Hypertypen und somit denselben Richman-Typ. □

Umgekehrt können jedoch Typenuntergruppen $A(t)$ bzw. $B(t)$ zweier Butlergruppen A und B gleichen Ranges mit gleicher Typenmenge und demselben Richman-Typ unterschiedliche Ränge besitzen. Denn seien P_1 und P_2 zwei disjunkte unendliche Teilmengen der Menge aller Primzahlen P mit $P_1 \cup P_2 = P$. Seien $S_i = \langle p^{-1} \mid p \in P_i \rangle$ für $i = 1, 2$ und $S = \langle p^{-1} \mid p \in P \rangle$. Dann besitzen die vollständig zerlegbaren Gruppen $A = S_1x_1 \oplus S_2x_2 \oplus S_1x_3 \oplus S_2x_4 \oplus Sx_5$ und $B = S_1x_1 \oplus S_2x_2 \oplus \mathbb{Z}x_3 \oplus Sx_4 \oplus Sx_5$ offensichtlich dieselbe Typenmenge und denselben Richman-Typ. Aber die Typenuntergruppen $A(t(S))$ bzw. $B(t(S))$ besitzen die Ränge 1 bzw. 2. Somit lassen sich die Ränge der Typenuntergruppen i.a. nicht aus dem Richman-Typ und der Typenmenge bestimmen. Die folgenden Ergebnisse aus [7] beschreiben das Gewicht einer Butlergruppe und sind grundlegend für die weitere Betrachtung.

Satz 16. [7, Korollar 17] *Für eine Butlergruppe A des Ranges n und $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt $\sup T_A^k = ST_{n-k+1}^n(A)$.*

Satz 17. [7, Korollar 18] *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n mit einem endlichen Gewicht. Besitzt der Typ $\sup T_A^1 - IT(A)$ nur endlich viele unendliche p-Komponenten, wobei $\infty - \infty = 0$, so sind äquivalent:*

(1) *A ist eine Butlergruppe.*

(2) *$\sup T_A^k = ST_{n-k+1}^n(A)$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Eine Untergruppe B einer torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges heißt *regulär*, wenn $t^B(b) = t^A(b)$ für alle $b \in B$ gilt. Diese Eigenschaft ist äquivalent zur Bedingung $B(t) = B \cap A(t)$ für alle Typen t. Vollrangige reguläre Untergruppen von Butlergruppen besitzen nach [1, 1.10] endlichen Index in diesen. Ferner besitzt nach einem Ergebnis von Koehler [1, 0.1+1.9] jede torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges mit einer endlichen Typenmenge eine vollrangige reguläre Untergruppe.

Für eine rationale Gruppe R und eine torsionsfreie abelsche Gruppe A endlichen Ranges sei im folgenden $RA \cong R \otimes A$, so daß $RA \subset \mathbb{Q}A$, der divisiblen Hülle von A.

Lemma 18. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n mit einem endlichen Gewicht und $B \subset A$ eine reguläre Butleruntergruppe gleichen Ranges. Falls $\sup T_A^k = ST_{n-k+1}^n(A)$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt, so folgt $ST(A) = ST(B)$. Insbesondere gelten $HT_k(B)\colon HT_k(B) = HT_k(A)\colon HT_k(A)$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Beweis. Sei p eine Primzahl mit $[ST(A)]_p = k\omega$ für $k \geqslant 1$. Wegen $\sup T_A^k = \bigcup\{ST(C) \mid C \subset_* A \text{ des Ranges } k\} = ST_{n-k+1}^n(A)$ muß eine reine Untergruppe $A_k \subset_* A$ des Ranges k existieren mit $pA_k = A_k$. Folglich ist $IT(A_k) \geqslant t(\mathbb{Q}^{(p)})$, also $A_k \subset A\bigl(t(\mathbb{Q}^{(p)})\bigr)$. Andererseits kann $A\bigl(t(\mathbb{Q}^{(p)})\bigr)$ höchstens den Rang k haben, da sonst $\bigl[ST(A)\bigr]_p > k\omega$ gelten müßte. Also folgt $A_k = A\bigl(t(\mathbb{Q}^{(p)})\bigr)$. Aus der Regularitätseigenschaft von B folgt nun $A_k \cap B = B\bigl(t(\mathbb{Q}^{(p)})\bigr)$, vom Rang k aus Ranggründen. Somit folgt auch $\bigl[ST(B)\bigr]_p = k\omega$. Insgesamt erhält man $ST(A)\colon ST(A) = ST(B)\colon ST(B)$. Aus $\sum_{j=1}^{n} \bigl(HT_j(A)\colon HT_j(A)\bigr) = ST(A)\colon ST(A) = ST(B)\colon ST(B) = \sum_{j=1}^{n} \bigl(HT_j(B)\colon HT_j(B)\bigr)$ und $HT_j(B)\colon HT_j(B) \leqslant HT_j(A)\colon HT_j(A)$ für alle $1 \leqslant j \leqslant n$ folgt nun mit den Rechenregeln für ω auch $HT_j(B)\colon HT_j(B) = HT_j(A)\colon HT_j(A)$ für alle $1 \leqslant j \leqslant n$. Sei nun P_∞ die maximale Primzahlmenge, auf der $HT_n(A)$ unendlich ist, und sei P die Komplementmenge zu P_∞ in der Menge aller Primzahlen. Es genügt $RT(A) =_P RT(B)$ zu zeigen. Sei $R_\infty = \langle p^{-1} \mid p \in P_\infty \rangle_{\mathsf{Ring}}$ der erzeugte unitäre Ring rationaler Zahlen. Dann genügt es zu zeigen, daß $(R_\infty A)/(R_\infty B)$ endlich ist. Wegen $\sup T_A^k = ST_{n-k+1}^n(A)$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$ folgt auch $\sup T_{R_\infty A}^k = ST_{n-k+1}^n(R_\infty A)$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$. Sowieso ist $R_\infty B$ wieder eine reguläre Untergruppe in $R_\infty A$ und wie B eine Butlergruppe. Nach Konstruktion von R_∞ besitzt ferner der Typ $OT(R_\infty A) - IT(R_\infty A)$ keine unendlichen p-Komponenten. Also ist $R_\infty A$ nach Satz 17 selbst eine Butlergruppe. Nach [1, 1.10] besitzt schließlich $R_\infty B$ endlichen Index in $R_\infty A$ als vollrangige reguläre Untergruppe einer Butlergruppe. □

Lemma 19. *Sei A eine Butlergruppe des Ranges n und B schichtengleich zu A. Dann ist $RT(D) = RT_1^k(B) = RT_1^k(A)$ für alle reinen Untergruppen D von B, vom Rang k, mit einem divisiblen Quotienten B/D.*

Beweis. Seien A und B wie vorausgesetzt und ferner derart, daß $D \subset B$ ein Gegenbeispiel kleinsten Ranges $k \geqslant 1$ ist. Nach Proposition 8 besitzen A und B denselben Richman-Typ. Wegen $T_A^k = T_B^k$ existiert eine Untegruppe D' rein in A, vom Rang k, mit $ST(D') = ST(D)$. Wegen $ST(A) = ST(B)$ muß auch $ST(A/D') =$

$ST(B/D) = (n-k)t(\mathbb{Q})$ gelten. Also ist $RT(A/D') = RT^n_{k+1}(A) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n-k}$. Nach Satz 11 besitzt A genau eine aufsteigend linear geordnete Typenreihe und deshalb ist $RT(D') = RT^k_1(A)$. Folglich ist $ST(D) = ST(D') = ST^k_1(A) = ST^k_1(B)$. Nach Korollar 3 gilt $RT(D) \geqslant RT^k_1(B)$. Aufgrund der Rechenregeln für ω und der für die ganzen Zahlen gelten für $1 \leqslant i \leqslant k$ somit $HT_i(D) : HT_i(D) = HT_i(B) : HT_i(B)$ und $HT_i(D) =_{P_<} HT_i(B)$ für alle Primzahlmengen $P_<$, auf denen $HT_k(B)$ endlich ist. Insbesondere ist damit $HT_k(D) = OT(D) = HT_k(B)$ gezeigt. Sei nun j maximal bzgl. $HT_j(D) > HT_j(B)$ angenommen. Dann ist insbesondere $j < k$ und es existiert eine unendliche Primzahlmenge P, so daß $HT_j(D) >_P HT_j(B)$ gilt, $HT_j(B)$ endlich auf P und $HT_k(B)$ unendlich auf P ist. Aufgrund des Schubfachprinzips existieren nun ein Index $j < i \leqslant k$ und eine unendliche Teilmenge $Q \subset P$, so daß $HT_j(D) >_Q HT_j(B)$ gilt, $HT_{i-1}(B)$ endlich auf Q und $HT_i(B)$ unendlich auf Q ist. Da φ_B endlich ist, existiert nach Satz 10 eine reine Untergruppe E des Ranges $i-1$ in D mit $RT(E) = RT^{i-1}_1(D)$ und $RT(B/E) = RT^n_i(B)$. Sei nun $R = \langle p^{-1} \mid p \notin Q \rangle_{\text{Ring}}$ der erzeugte unitäre Ring rationaler Zahlen. Dann ist auch RA eine Butlergruppe, und RB ist wieder schichtengleich zu RA. Nach Konstruktion von R ist auch $(RB)/(RE)$ divisibel. Da RE vom Rang $i-1 < k$ ist, gilt $RT(RE) = RT^{i-1}_1(RB)$, da D als Gegenbeispiel kleinsten Ranges angenommen wurde. Folglich ist auch $HT_j(D) =_Q HT_j(RD) = HT_j(RB) =_Q HT_j(B)$, im Widerspruch zu $HT_j(D) >_Q HT_j(B)$. Also gilt auch $RT(D) = RT^k_1(B)$. □

Der folgende Satz zeigt nun, daß für eine Butlergruppe A alle zu A schichtengleichen Gruppen wieder Butlergruppen sind. In Beweis des Satzes wird der folgende Schluß (Schubfachprinzip) häufiger verwendet:

Seien für (verallgemeinerte) Typen $t, s_1, \ldots, s_k$ und eine unendliche Primzahlmenge P die Typen t und $\bigcup_{i=1}^{k} s_i$ P-gleich, d.h. $t =_P \bigcup_{i=1}^{k} s_i$. Dann exitieren ein Index j und eine unendliche Teilmenge $Q \subset P$, so daß $t =_Q s_j$ gilt.

Satz 20. *Alle zu einer Butlergruppe schichtengleichen Gruppen sind selbst Butlergruppen.*

B e w e i s. Sei A eine Butlergruppe des Ranges n und B schichtengleich zu A. Nach Korollar 16 gilt $\sup T^k_A = ST^n_{n-k+1}(A)$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$. Nach Proposition 8 besitzen A und B denselben Richman-Typ und somit dieselben Hypertypen. Also gilt auch $\sup T^k_B = ST^n_{n-k+1}(B)$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$. Da A und B jeweils endliche Gewichte besitzen, existiert nach [1, 0.1 + 1.9] eine reguläre Butleruntergruppe $C \subset B$ gleichen Ranges und für diese gilt nach Lemma 18 $ST(C) = ST(B)$. Für die Behauptung genügt es $RT(C) = RT(B)$ nachzuweisen, da B/C dann nach Satz 9 endlich ist und B wie C eine Butlergruppe ist. Sowieso ist $RT(C) \leqslant RT(B)$. Nach

Lemma 18 gelten schon $HT_i(C)\colon HT_i(C) = HT_i(B)\colon HT_i(B)$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ und die Hypertypen $HT_k(C)$ und $HT_k(B)$ sind $P_<$-gleich für alle Primzahlmengen $P_<$, auf denen $HT_n(B)$ endlich ist. Sei nun j maximal bzgl. $HT_j(C) < HT_j(B)$ angenommen. Dies impliziert, daß der äußere Typ $HT_n(A)$ unendlich viele ∞-Stellen besitzt. Sowieso ist dann $j < n$. Es existiert also eine unendliche Primzahlmenge P der Menge $\mathscr{P}$ aller Prinzahlen, so daß $HT_j(C) <_P HT_j(B) <_P HT_n(B) =_P \infty$. Weiter existiert nach dem Schubfachprinzip ein Index $j \leqslant i < n$ und eine unendliche Teilmenge $P' \subset P$, so daß $HT_j(C) <_{P'} HT_j(B) \leqslant_{P'} HT_i(B) <_{P'} HT_{i+1}(B) =_{P'} \infty$. Sei nun $R = \langle p^{-1} \mid p \in \mathscr{P} \setminus P' \rangle_{\text{Ring}}$ der erzeugte unitäre Ring rationaler Zahlen. Wieder sind RB und RA schichtengleich und besitzen daher nach nach Proposition 8 denselben Richman-Typ. Weiter sind auch RC und RA Butlergruppen und RC ist eine reguläre Untergruppe in RB. Nach Konstruktion von R hat man wieder die Situation $HT_j(RC) <_{P'} HT_j(RB) \leqslant_{P'} HT_i(RB) <_{P'} HT_{i+1}(RB) =_{P'} \infty$. Seien deshalb im folgenden RA, RB, usw. jeweils durch A, B usw. ersetzt. Wegen $\sup T_B^{n-1} = ST_{i+1}^n(B) = (n-1)t(\mathbb{Q})$ gibt es nach dem Schubfachprinzip eine Untergruppe D rein in B, vom Rang $n-i$, und eine unendliche Teilmenge $P_D \subset P'$, so daß $\sup T_B^{n-1} =_{P_D} ST(D) =_{P_D} (n-1)\omega$. D ist also p-divisibel für alle $p \in P_D$. Nach Satz 10 gibt es eine Untergruppe A_i rein in A, vom Rang i, mit $RT(A_i) = RT_1^i(A)$. Die Untergruppe A_i ist als reine Untergruppe einer Butlergruppe wieder eine Butlergruppe und nach Satz 16 gilt $\sup T_{A_i}^{i-j+1} = ST_j^i(A)$. Nach dem Schubfachprimzip existiert wieder eine Untergruppe E' rein in A_i, vom Rang $i-j+1$, und eine unendliche Teilmenge $P_E \subset P_D$ mit $ST_j^i(A) =_{P_E} ST(E')$. Wegen $T_{A_i}^{i-j+1} \subset T_A^{i-j+1} = T_B^{i-j+1}$ existiert eine Untergruppe E rein in B, vom Rang $i-j+1$, mit $ST(E) = ST(E') =_{P_E} ST_j^i(A) = ST_j^i(B)$. Wegen $ST(E) = ST(E') \in T_{A_i}^{i-j+1}$ ist $ST(E) <_{P'} \infty$. Folglich läßt sich E einbetten in eine Untergruppe B_i rein in B, vom Rang i, mit divisiblem Faktor B/B_i. Nach Lemma 19 folgt $RT(B_i) = RT_1^i(B)$. Wegen $ST_j^i(B) =_{P_E} ST(E)$ erhält man aufgrund ganzzahliger Rechnung auf P_E sogar $RT(E) =_{P_E} RT_j^i(B_i) = RT_j^i(B)$. Da die Gruppe D für alle Primzahlen $p \in P_D$ divisibel war, ist nun $D \cap E = 0$ und die Gruppe $B' =< D, E >_*$ besitzt den Rang $n-j+1$ und einen inneren Typ $IT(B') \geqslant_{P_D} HT_1(E)$. Die Gruppe $C' = C \cap B'$ besitzt nun denselben Rang $n-j+1$ und denselben inneren Typ $IT(C') = IT(B') \geqslant_{P_D} HT_1(E)$ wie B', da C eine vollrangige reguläre Untergruppe in B ist. Nun ist $IT(C')$ ein Typ aus der Typenmenge $T(C) = T(B)$ und folglich $C' \subset C\big(IT(C')\big)$. Also ist $n - \operatorname{rg}\big(C(IT(C'))\big) \leqslant n - \operatorname{rg}(C') = n - (n-j+1) = j-1 < j$. Nach Satz 13 ist damit aber $HT_j(C) \geqslant IT(C') \geqslant_{P_D} HT_1(E) =_{P_E} HT_j(B_i) = HT_j(B)$, da, wie oben gezeigt, $RT(E) =_{P_E} RT_j^i(B_i) = RT_j^i(B)$. Das ist jedoch wegen $P_E \subset P'$ ein Widerspruch zu $HT_j(C) <_{P'} HT_j(B)$, und die Behauptung ist gezeigt. □

Schichtengleiche Butlergruppen sind i.a. nicht quasiisomorph, wie das folgende Beispiel zeigt. Die Rang-3-Butlergruppen $A = \mathbb{Q}^{(p)}a \oplus \mathbb{Q}^{(q)}(a+b) \oplus \mathbb{Q}^{(r)}(a-b) \oplus \mathbb{Q}^{(s)}b \oplus \mathbb{Q}^{(t)}c$ und $B = \mathbb{Q}^{(p)}a \oplus \mathbb{Q}^{(q)}(a+b) \oplus \mathbb{Q}^{(r)}(a-2b) \oplus \mathbb{Q}^{(s)}b \oplus \mathbb{Q}^{(t)}c \subset V = \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b \oplus \mathbb{Q}c$ für paarweise verschiedene Primzahlen p, q, r, s und t besitzen dieselben Mengen von Typenreihen und sind daher schichtengleich. Sie sind jedoch nicht quasiisomorph, da es in diesem Fall nach [1, 1.6] einen Isomorphismus $\psi\colon V = \mathbb{Q}A \to V$ geben müßte mit $\psi(\mathbb{Q}A(t)) = \mathbb{Q}B(t)$ für alle $t \in T'(A) = T'(B)$, wobei T' die kritische Typenmenge bezeichnet. Einen solchen Isomorphismus gibt es jedoch nicht.

Zwei schichtengleiche Butlergruppen mit linear geordneten Typenmengen sind jedoch isomorph, wie das folgende Korollar zeigt.

Korollar 21. *Sei A eine Butlergruppe mit einer linear geordneten Typenmenge. Eine zu A schichtengleiche Gruppe B ist isomorph zu A.*

B e w e i s. Nach Satz 20 ist auch B eine Butlergruppe mit derselben linear geordneten Typenmenge wie A. Nach [1, 1.11] sind daher A und B vollständig zerlegbar mit denselben linear geordneten Typenmengen und vom selben Richman-Typ nach Proposition 8. Also besitzen A und B isomorphe vollständige Zerlegungen. □

Bibliographie

[1] *D. M. Arnold*: Pure subgroups of finite rank completely decomposable groups. Lect. Notes Math. 874, 1981, pp. 1–31.

[2] *Birkhoff*: Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol XXV, 1948.

[3] *L. Fuchs*: Infinite abelian groups I+II. Academic Press, 1970, 1973.

[4] *H. P. Goeters, C. Vinsonhaler and W. Wickless*: Hypertypes of torsion-free abelian groups of finite rank. Bull. Austral. Math. Soc. *39* (1989), 21–24.

[5] *O. Mutzbauer*: Type graph. Lect. Notes Math. 1006, 1983, pp. 228–252.

[6] *O. Mutzbauer*: Type Invariants of torsion-free abelian groups. Abelian Group Theory, Proc. Perth, Contemp. Math. *87* (1989), 133–154.

[7] *E. Müller und O. Mutzbauer*: Das Gewicht einer Butlergruppe. Math. Z. *216* (1994), 69–82.

[8] *F. Richman*: A class of rank 2 torsion-free groups. Studies on Abelian Groups. Paris, 1968, pp. 327–333.

[9] *R. B. Warfield Jr.*: Homomorphisms and duality for torsion-free groups. Math. Z. *107* (1968), 189–200.

Anschrift des Verfassers: Mathematisches Institut, Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg, Deutschland.