Jozef Eliáš

Niektoré vlastnosti telesa operátorov

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 11 (1961), No. 4, 288--294

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127048

NIEKTORÉ VLASTNOSTI TELESA OPERÁTOROV

JOZEF ELIAŠ, Bratislava

V článku [1] sme definovali teleso operátorov $T(K)$, ako podielové teleso nad oborom integrity K všetkých komplexných funkcií $\{a(n)\}$ nezáporného celočíselného argumentu. Pripomeňme, že pre dve funkcie $a = \{a(n)\}$, $b = \{b(n)\}$ z K je súčet $a + b$ definovaný obvyklým spôsobom $a + b = \{a(n) + b(n)\}$ a súčin ab vzorcom $\{ab(n)\} = \{\sum_{i=1}^{n} a(n-i)\, b(i-1)\}$.

Účelom tohto článku je podrobnejšie vyskúmať niektoré vlastnosti telesa $T(K)$. Dokážeme, že nie je algebraicky uzavreté. Ďalej dokážeme, že všetky jeho elementy sú tvaru $a + P(S)$, kde $a \in K$ a $P(s)$ je polynóm operátora tvorby diferencií s (pozri [1], § 4). Označenie sú tie isté ako v [1].

Nech $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií patriacich do K. Budeme hovoriť, že postupnosť $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ konverguje k funkcii $f \in K$, ak pre každé $n = 0, 1, \ldots$ platí: $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(n) = f(n)$.

Rad $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = f_1 + f_2 + \ldots$, kde $f_\nu \in K$, budeme nazývať konvergentným, ak postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} f_i\}_{\nu=1}^{\infty}$ je konvergentná.

V ďalšom sa budeme zaoberať radom

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu l^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left\{\binom{n}{\nu-1}\right\}, \tag{1}$$

kde a_ν sú komplexné čísla a $l^\nu = \left\{\binom{n}{\nu-1}\right\}$ sú funkcie definované v [1], § 3.

Pre každú postupnosť $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ komplexných čísel je rad (1) konvergentný.

Aby sme to dokázali, zvoľme $n_0 \in E = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Pretože pre $\nu > n_0 + 1$ je $\binom{n_0}{\nu-1} = 0$, platí: $s_{n_0+2}(n_0) = s_{n_0+3}(n_0) = \ldots$, $\lim_{\nu\to\infty} s_\nu(n_0)$ zrejme existuje.

Rady tvaru (1) budeme nazývať potenčnými radmi. Ukážeme, že majú analogické vlastnosti, ako potenčné rady reálnej, resp. komplexnej premennej. Pretože rad (1) je konvergentný pre všetky $n \in E$, definuje nejakú funkciu.

Veta 1. *Ak* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i l^i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i l^i$, *potom* $a_i = b_i$, *pre* $i = 1, 2, \ldots$

Dôkaz. Nech $\{f(n)\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i l^i$ a $\{g(n)\} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i l^i$. Podľa predpokladu $\{f(n)\} = \{g(n)\}$ pre $n = 0, 1, \ldots$, čiže

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \binom{n}{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \binom{n}{i-1} \tag{2}$$

pre $n = 0, 1, \ldots$

Teraz dokážeme indukciou, že $a_i = b_i$ pre $i = 1, 2, \ldots$ Pre $i = 1$ je to zrejmé. Nech $a_i = b_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom z rovnosti (2) ihneď vyplýva, že $a_{n+1} = b_{n+1}$.

Veta 2. *Nech* $f \in K$. *Rovnosť* $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i l^i$ *platí vtedy a len vtedy, keď*

$$a_i = \Delta^{i-1} f(0) \tag{3}$$

pre $i = 1, 2, \ldots$

Dôkaz. Podľa vety 1 stačí dokázať, že

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^{i-1} f(0)\, l^i, \tag{4}$$

t. j.

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta^{i-1} f(0) \binom{n}{i-1}$$

pre $n = 0, 1, 2, \ldots$ Avšak to je známy vzťah medzi hodnotami funkcie a jej diferenciami (pozri [4]).

Poznámka 1. Podľa vety 2 vieme každú funkciu z K jednoznačne vyjadriť v tvare potenčného radu (4). Nech $\{f(n)\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i l^i$ a $\{g(n)\} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i l^i$. Všimnime si, že

$$\{f(n)\}\{g(n)\} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i l^i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} b_i l^i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{\mu+\nu=i} a_\mu b_\nu\Big) l^i.$$

Z vety 1.1 a vety 1.2 a z tohto vyjadrenia súčinu dvoch funkcií vyplýva tvrdenie: Ak $h = fg$, potom

$$\Delta^k h(0) = \sum_{\substack{\mu+\nu=k-1 \\ \mu \geq 0,\ \nu \geq 0}} \Delta^\mu f(0)\, \Delta^\nu g(0).$$

Funkciu $\{f(n)\}$ z K budeme nazývať rozložiteľnou, ak existujú funkcie $\{a(n)\}$, $\{b(n)\}$ také, že

$$\{f(n)\} = \{a(n)\}\{b(n)\}.$$

Ak funkcia $\{f(n)\}$ nie je rozložiteľná, nazývame ju nerozložiteľnou funkciou.

Veta 3. *Funkcia* $\{f(n)\}$ *je rozložiteľná vtedy a len vtedy, ak* $f(0) = 0$. *Ak* $f(0) = 0$, $\Delta f(0) = 0, \ldots, \Delta^{k-1} f(0) = 0$, *ale* $\Delta^k f(0) \neq 0$, $k \geq 1$, *potom pre ľubovoľné nerozloži-*

teľné funkcie $\{a_1(n)\}$, $\{a_2(n)\}$, ..., $\{a_k(n)\}$ *existuje práve jedna nerozložiteľná funkcia* $\{a_{k+1}(n)\}$ *tak, že platí:*

$$\{f(n)\} = \{a_1(n)\} \dots \{a_k(n)\}\{a_{k+1}(n)\}.$$

Dôkaz. Nech $f(0)$ je rôzne od nuly. Potom neexistujú funkcie $\{a(n)\}$, $\{b(n)\}$ tak, aby platilo $\{f(n)\} = \{a(n)\}\{b(n)\}$, pretože podľa definície 1.1 z [1] sa hodnota súčinu $\{a(n)\}\{b(n)\}$ v bode $n = 0$ rovná nule pre ľubovoľné funkcie $\{a(n)\}$, $\{b(n)\}$.

Nech $\{f(n)\}$ je taká, že $f(0) = 0$, ale $\Delta f(0) \neq 0$. Ak funkciu $\{f(n)\}$ napíšeme v tvare potenčného radu, dostaneme:

$$\{f(n)\} = \Delta f(0)\, I^2 + \Delta^2 f(0)\, I^3 + \Delta^3 f(0)\, I^4 + \dots$$

Zvoľme si ľubovoľnú funkciu $\{a(n)\} = a(0)\, I + \Delta a(0)\, I^2 + \dots$, kde $a(0) \neq 0$. Ak existuje funkcia $\{b(n)\} = b(0)\, I + \Delta b(0)\, I^2 + \dots$, $b(0) \neq 0$ taká, aby $\{f(n)\} = \{a(n)\}\{b(n)\}$, musí platiť:

$$\{f(n)\} = \Delta f(0)\, I^2 + \Delta^2 f(0)\, I^3 + \dots = a(0)\, b(0)\, I^2 + [a(0)\, \Delta b(0) + \Delta a(0)\, b(0)]\, I^3 + \dots$$

Porovnaním oboch strán dostaneme, že musí platiť nasledujúci systém rovnosti:

$$\begin{aligned} \Delta f(0) &= a(0)\, b(0), \\ \Delta^2 f(0) &= a(0)\, \Delta b(0) + \Delta a(0)\, b(0), \\ \Delta^3 f(0) &= a(0)\, \Delta^2 b(0) + \Delta a(0)\, \Delta b(0) + \Delta^2 a(0)\, b(0). \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Pretože $a(0) \neq 0$, je možné určiť z prvej rovnosti $b(0)$ takto:

$$b(0) = \frac{f(0)}{a(0)}.$$

Z ďalšej rovnice môžeme určiť $\Delta b(0)$, potom $\Delta^2 b(0)$ atď.

Naopak, keď $b(0)$, $\Delta b(0)$, $\Delta^2 b(0)$, ... volíme tak, aby spĺňali ten systém rovnosti, je zrejmé, že $\{f(n)\} = \{a(n)\}\{b(n)\}$.

Nech $f(0) = 0$, $\Delta f(0) = 0, \dots, \Delta^{k-1} f(0) = 0$ a $\Delta^k f(0) \neq 0$. Nech $\{a_1(n)\}, \dots, \{a_k(n)\}$ sú ľubovoľné funkcie, pre ktoré platí: $a_i(0) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. Podľa uvedeného existuje funkcia $\{b_1(n)\}$ taká, že $\{f(n)\} = \{a_1(n)\}\{b_1(n)\}$. Okrem toho z druhej časti dôkazu vyplýva, že $b_1(0) = 0$, $\Delta b_1(0) = 0, \dots, \Delta^{k-2} b_1(0) = 0$, $\Delta^{k-1} b_1(0) \neq 0$. Podľa druhej časti dôkazu existuje funkcia $\{b_2(n)\}$ taká, že $\{b_1(n)\} = \{a_2(n)\}\{b_2(n)\}$, kde zasa $b_2(0) = 0$, $\Delta b_2(0) = 0, \dots, \Delta^{k-3} b_2(0) = 0$ a $\Delta^{k-2} b_2(0) \neq 0$, atď.

Postupne skonštruujeme funkcie $\{b_1(n)\}, \dots, \{b_{k-1}(n)\}$, pričom platí: $\{b_{k-1}(n)\} = \{a_k(n)\}\{b_k(n)\}$, kde už $b_k(0) \neq 0$.

Ak položíme $\{b_k(n)\} = \{a_{k+1}(n)\}$, dostaneme:

$$\{f(n)\} = \{a_1(n)\}\{b_1(n)\} = \{a_1(n)\}\{a_2(n)\}\{b_2(n)\} = \dots = \{a_1(n)\}\{a_2(n)\} \dots \{a_k(n)\}\{a_{k+1}(n)\}.$$

Jednoznačnosť funkcie $\{a_{k+1}(n)\}$ vyplýva z toho, že v okruhu K niet deliteľov nuly. Ak by existovali dve nerozložiteľné funkcie $\{a_{k+1}(n)\}$ a $\{a'_{k+1}(n)\}$ také, že by platilo:

$$\{f(n)\} = \{a_1(n)\} \dots \{a_k(n)\}\{a_{k+1}(n)\}$$

a zároveň

$$\{f(n)\} = \{a_1(n)\} \dots \{a_k(n)\}\{a'_{k+1}(n)\},$$

ich odčítaním dostaneme:

$$0 = \{a_1(n)\}\{a_2(n)\} \dots \{a_k(n)\}[\{a_{k+1}(n)\} - \{a'_{k+1}(n)\}].$$

Pretože $\{a_1(n)\} \dots \{a_k(n)\} \neq 0$, musí byť $\{a_{k+1}(n)\} - \{a'_{k+1}(n)\} = 0$. Odtiaľ vyplýva, že $\{a_{k+1}(n)\} = \{a'_{k+1}(n)\}$.

Nech $\{f(n)\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu l^\nu$. Nech $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$ a $a_k \neq 0$. Potom číslo k budeme nazývať *indexom funkcie* $\{f(n)\}$ a označovať $\operatorname{ind} f$.

Nasledujúca veta podrobne vyjadruje štruktúru telesa $T(K)$.

Veta 4. *Nech $w \in T(K)$ je ľubovoľný operátor a nech je tvaru $w = f/g$, $f \in K$, $g \in K$. Operátor w je funkciou z K vtedy a len vtedy, ak* $\operatorname{ind} f > \operatorname{ind} g$. *V tomto prípade* $\operatorname{ind} w = \operatorname{ind} f - \operatorname{ind} g$.

Ak $\operatorname{ind} f \leq \operatorname{ind} g$, *potom existuje funkcia $h \in K$ a taký polynóm $P(s)$ stupňa* $\lambda = \operatorname{ind} g - \operatorname{ind} f$ *operátora s, že $w = h + P(s)$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že funkcie $\{f(n)\}$ a $\{g(n)\}$ majú nasledujúce rozvoje:

$$\{f(n)\} = a_\nu l^\nu + a_{\nu+1} l^{\nu+1} + \dots,$$

$a_\nu \neq 0$; jej index je ν.

$$\{g(n)\} = b_\mu l^\mu + b_{\mu+1} l^{\mu+1} + \dots,$$

$b_\mu \neq 0$; jej index je μ.

Nech najskôr $\nu > \mu$. Stačí keď dokážeme, že existujú také čísla $c_1, c_2, \dots$, pre ktoré platí:

$$\frac{\sum_{j=\nu}^{\infty} a_j l^j}{\sum_{j=\mu}^{\infty} b_j l^j} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i l^i.$$

Ak také čísla existujú, musí platiť:

$$\sum_{j=\nu}^{\infty} a_j l^j = \sum_{i=1}^{\infty} c_i l^i \sum_{j=\mu}^{\infty} b_j l^j = c_1 b_\mu l^{\mu+1} + (c_1 b_{\mu+1} + b_\mu c_2)\, l^{\mu+2} +$$

$$+ (c_3 b_\mu + c_2 b_{\mu+1} + c_1 b_{\mu+2})\, l^{\mu+3} + \dots + (c_{\nu-\mu} b_\mu + c_{\nu-\mu+1} b_{\mu-1} + \dots +$$

$$+ c_\mu b_{\nu-\mu})\, l^\nu + (b_\mu c_{\nu+1-\mu} + \dots + b_{\nu-\mu+1} c_\mu)\, l^{\nu+1} + \dots .$$

Aby platila posledná rovnosť, musia koeficienty c_i, a_j, b_j spĺňať nasledujúci systém rovníc:

$$\begin{aligned}
&c_1 b_\mu = 0,\\
&c_2 b_\mu + c_1 b_{\mu+1} = 0,\\
&c_3 b_\mu + c_2 b_{\mu+1} + c_1 b_{\mu+2} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&c_{\nu-\mu-1} b_\mu + c_{\nu-\mu} b_{\mu-1} + \dots + c_1 b_{\nu-2} = 0,\\
&c_{\nu-\mu} b_\mu + c_{\nu-\mu+1} b_{\mu-1} + \dots + c_1 b_{\nu-1} = a_\nu,\\
&c_{\nu-\mu+1} b_\mu + c_{\nu-\mu+2} b_{\mu-1} + \dots + c_1 b_\nu = a_{\nu-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Pretože $b_\mu \neq 0$, z tohto systému možno čísla $c_1, c_2, \dots$ jednoznačne vypočítať. Pritom $c_1 = c_2 = \dots c_{\nu-\mu-1} = 0$ a $c_{\nu-\mu} \neq 0$. Ale i naopak, ak existujú čísla c_1, c_2 atď., ktoré spĺňajú systém (1.5), je zrejmé, že platí: $\sum\limits_{j=\nu}^{\infty} a_j l^j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i l^i \sum\limits_{j=\mu}^{\infty} b_j l^j$.

Vyšetrime teraz podiel $\{f(n)\}/\{g(n)\}$, ak $\nu \leqq \mu$. Teda tento podiel má tvar:

$$\frac{a_\nu l^\nu + a_{\nu+1} l^{\nu-1} + \dots}{b_\mu l^\mu + b_{\mu+1} l^{\mu+1} + \dots} = \frac{1}{l^\kappa}\left[\frac{a_\nu l^\nu + a_{\nu+1} l^{\nu+1} + \dots}{b_\mu l^{\nu-1} + b_{\mu+1} l^\nu + \dots}\right] = \frac{1}{l^\kappa}\{h(n)\} =$$
$$= s^\kappa\{h(n)\} = \{\Delta^\kappa h(n)\} + \Delta^{\kappa-1} h(0) + \dots + s^{\kappa-1} h(0).$$

Pretože $\kappa = \mu - \nu + 1$ a podľa toho, čo sme už dokázali $h(0) \neq 0$, z tejto rovnosti vyplývajú už všetky ostatné tvrdenia vety.

Dôsledok. *Každý operátor $p \in T(K)$ možno písať v tvare*

$$p = \sum_{i=\nu}^{\infty} a_i l^i, \tag{6}$$

kde ν je celé číslo a a_i, $i = \nu, \nu + 1, \dots$, sú komplexné čísla.

Ak vo vyjadrení (6) operátora p je $a_\nu \neq 0$, číslo ν nazývame *indexom operátora* p a značíme ho $\operatorname{ind} p$.

Je zrejmé, že táto nová definícia indexu nie je v spore s už zavedenou a operátor p je funkciou vtedy a len vtedy, keď jeho index je kladný. Ďalej pre ľubovoľné dva operátory p, q je

$$\operatorname{ind} pq = \operatorname{ind} p + \operatorname{ind} q.$$

Teraz už máme prostriedky na to, aby sme mohli dokázať, že teleso operátorov nie je algebraicky uzavreté. Nato, aby sme to dokázali, stačí ukázať, že existuje taká algebraická rovnica nad telesom $T(K)$, ktorá nemá riešenie v $T(K)$. To sa nám podarí pomocou pojmu indexu funkcie.

Veta 5. *Teleso operátorov nie je algebraicky uzavreté.*

Dôkaz. Uvažujme rovnicu $x^2 = l$, kde $l = \{1\}$. Pre žiadnu funkciu $f \in K$ nie je $f^2 = l$, pretože hodnota funkcie f^2 v čísle $n = 0$ je nula, pre akékoľvek $f \in K$ a hodnota l v čísle $n = 0$ je 1. Pripusťme, že existuje operátor $p \in T(K)$ taký, že platí $p^2 = l$. Teda podľa dokázaného a podľa vety 4 $p = f/g$, pričom $\operatorname{ind} f \leqq \operatorname{ind} g$. Podľa nášho predpokladu je $f^2/g^2 = l$, čiže $f^2 = g^2 l$, a teda $\operatorname{ind} f^2 = \operatorname{ind} g^2 + 1$. To je spor, lebo z nerovnosti $\operatorname{ind} f \leqq \operatorname{ind} g$ vyplýva

$$\operatorname{ind} f^2 \leqq \operatorname{ind} g^2 < \operatorname{ind} g^2 + 1 = \operatorname{ind} g^2 l.$$

LITERATÚRA

[1] Eliaš J., *O operátorovej metóde riešenia diferenčných rovníc*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 8 (1958), 203—227.

[2] Mikusiński J. G., *Sur les fondaments du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1950), 41—70.

[3] Ryll Nardzewski C., *Sur le corps opérateurs de Mikusiński*, Studia Mathematica 14 (1954), 247—248.

[4] Nörlund N. E., *Differenzenrechnung*, Berlín 1924.

Došlo 2. 8. 1961.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛЯ ОПЕРАТОРОВ

Йозеф Элиаш

Резюме

В работе [1] определено поле операторов $T(K)$ как поле отношений над кольцом K всех комплексных функций, определенных на множестве всех целых неотрицательных чисел. Сложение и умножение в определяются по формулам $a + b = \{a(n) + b(n)\}$, $ab = \{\sum_{i=1}^{n} a(n-i)\, b(i-1)\}$ для всех $a, b \in k$.

В статье доказываются следующие теоремы:

Всякий элемент $p \in T(K)$ может быть представлен в виде

$$p = \sum_{i=\nu}^{\infty} a_i l^i$$

где $l = \{1\}$, $\nu \gtrless 0$ — целое число и a_i, $i = \nu, \nu + 1, \ldots$ — комплексные числа, $a_\nu \neq 0$.

Оператор p принадлежит K тогда и только тогда, когда $\nu > 0$.

Функцию $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i l^i$ можно писать в виде $f = gh$, $g, h \in K$ тогда и только тогда, когда $a_1 = 0$.

Поле $T(K)$ алгебраически незамкнуто [в самом деле, доказывается, что уравнение $x^2 = l$ не имеет решения в $T(K)$].

SOME PROPERTIES OF THE FIELD OF OPERATORS

Jozef Eliaš

Summary

In the paper [1] the field $T(K)$ of operators is defined as the quotiend-field over the ring K of all complex-valued functions defined on the set of all non-negative integers. The addition and multiplication in K is defined by formulae $a + b = \{a(n) + b(n)\}$ and $ab = \{\sum_{i=1}^{n} a(n-i)\, b(i-1)\}$ respectively (for every $a, b \in K$).

The following theorems are proved.

Every element $p \in T(K)$ can be written in the form $p = \sum_{i=\nu}^{\infty} a_i l^i$, where $l = \{1\}$, $\nu \gtrless 0$ is an integer, and a_i; $i = \nu, \nu + 1, \ldots$, are complex numbers, $a_\nu \neq 0$.

The operator p belongs to K if and only if $\nu > 0$.

The function $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i l^i$ can be written in the form $f = gh$, $g, h \in K$, if and only if $a_1 = 0$.

The field $T(K)$ is not algebraically closed [in fact it is proved that the equation $x^2 = l$ is not solvable in $T(K)$].

Исправление к стате

МАТРИЧНЫЙ ПРИЕМ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

К. К. Пономарев, Москва

На стр. 192 тома 11 (1961), № 3, строка 9 снизу напечатано уравнение $y^{(IV)} - \lambda^4 l^4 = 0$. Вместо него должно быть

$$y^{(IV)} - \frac{\lambda^4}{l^4}\, y = 0.$$