Matematicko-fyzikálny časopis

Josef Vala

O kongruencích přímek vyťatých v nadrovinách projektivního čtyřrozměrného prostoru P_4 tečnými rovinami jeho plochy Φ

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 11 (1961), No. 4, 263--274

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127046

O KONGRUENCÍCH PŘÍMEK VYŤATÝCH V NADROVINÁCH PROJEKTIVNÍHO ČTYŘROZMĚRNÉHO PROSTORU P_4 TEČNÝMI ROVINAMI JEHO PLOCHY Φ

JOSEF VALA, Brno

Tečné roviny plochy Φ, náležející projektivnímu prostoru P_4, protínají jeho nadroviny H, $\bar{H}$ v dvojicích tvořících přímek kongruencí Γ, $\bar{\Gamma}$ v korespondenci $\bar{\mathbf{R}}$, ve které si rozvinutelné plochy obou kongruencí korespondují. Jsou nalezeny podmínky, kdy tato korespondence je bodovou, resp. rovinovou deformací. Zvláště je studován ten případ, že Γ i $\bar{\Gamma}$ jsou kongruencemi W. Konečně nalezena obecnost řešení problému k dané kongruenci Γ v nadrovině $H \in P_4$ nalézti plochu Φ prostoru P_4 tak, aby její tečné roviny vytínaly na H právě kongruenci Γ.

I. a) Plocha Φ nechť leží v projektivním čtyřrozměrném prostoru P_4. Pak je známé, že na ní existuje síť konjugovaných čar nebo systém asymptotik. V dalším budeme vždy předpokládat první případ a čáry sítě nechť jsou parametrickými u-čarami, resp. v-čarami plochy Φ. Souřadnice x_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$) jejího bodu x pak vyhovují diferenciální rovnici

$$x_{uv} = Ax + Qx_u + Px_v. \tag{1}$$

Uvažujme tečné roviny τ ve všech bodech plochy Φ a pevnou nadrovinu H prostoru P_4. Roviny τ protínají trojrozměrný prostor H v přímkách, které tvoří přímkovou kongruenci Γ. W. Blaschke [1] dokázal, že fokální plochy kongruence Γ vytvoří průsečíky A_1, A_2 tečen u-čar, resp. v-čar plochy Φ s prostorem H. Lze klást

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda_0 x + \lambda_1 x_u, \\ A_2 &= \mu_0 x + \mu_2 x_v. \end{aligned} \tag{2}$$

Rovnice nadroviny H nechť jsou $\sum_{j=1}^{5} s_j X_j = \langle sX \rangle = 0$, $s_j = \text{konst.}$ Podle (2) pak snadno dostaneme

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{-\langle sx_u \rangle}{\langle sx \rangle}, \qquad \frac{\mu_0}{\mu_2} = \frac{-\langle sx_v \rangle}{\langle sx \rangle}, \tag{3}$$

předpokládáme-li $\lambda_1 \mu_2 \neq 0$, což znamená, že plocha Φ není plochou trojrozměrného prostoru H.

b) Zvolme pohyblivý repér o vrcholech v bodech $A_0 = x$, A_1, A_2, body A_3, A_4 pak zvolme v nadrovině H tak, aby repér A_1, A_2, A_3, A_4 byl polokanonickým repérem kongruence Γ (Švec [6], str. 7). Potom platí

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2,\\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \beta_2\omega_2A_2 + \omega_1A_3,\\
\mathrm{d}A_2 &= \beta_1\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \alpha_1\omega_1A_4,\\
\mathrm{d}A_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \alpha_2\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

kde ω_1, ω_2, ω_{ik}, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ jsou Pfaffovy formy, které obsahují diferenciály $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$; α_1, α_2, β_1, β_2 jsou funkce proměnných u a v. Dále předpokládejme, že plocha není rozvinutelnou (Lane [3], str. 111), tedy, že platí

$$(x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}) \neq 0.$$

Body A_3, A_4 jsou pak lineárními kombinacemi bodů x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv},

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \varrho_0x + \varrho_1x_u + \varrho_2x_v + \varrho_{11}x_{uu} + \varrho_{22}x_{vv},\\
A_4 &= \sigma_0x + \sigma_1x_u + \sigma_2x_v + \sigma_{11}x_{uu} + \sigma_{22}x_{vv},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

podobně body x_{uuu}, x_{vvv}:

$$
\begin{aligned}
x_{uuu} &= m_0x + m_1x_u + m_2x_v + m_{11}x_{uu} + m_{22}x_{vv},\\
x_{vvv} &= n_0x + n_1x_u + n_2x_v + n_{11}x_{uu} + n_{22}x_{vv}.
\end{aligned}
\tag{5a}
$$

Dosaďme v rovnicích (4) za $A_0 = x$ a za A_1, A_2, A_3, A_4 podle (2) a (5).

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_0 = {} & x[\omega_{00} + \omega_{01}\lambda_0 + \omega_{02}\mu_0] +\\
& + x_u[\omega_{01}\lambda_1] +\\
& + x_v[\omega_{02}\mu_2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 = {} & x[\omega_{11}\lambda_0 + \beta_2\omega_2\mu_0 + \omega_1\varrho_0] +\\
& + x_u[\omega_{11}\lambda_1 + \omega_1\varrho_1] +\\
& + x_v[\beta_2\omega_2\mu_2 + \omega_1\varrho_2] +\\
& + x_{uu}[\omega_1\varrho_{11}] +\\
& + x_{vv}[\omega_1\varrho_{22}],
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_2 = {} & x[\beta_1\omega_1\lambda_0 + \omega_{22}\mu_0 + \omega_2\sigma_0] +\\
& + x_u[\beta_1\omega_1\lambda_1 + \omega_2\sigma_1] +\\
& + x_v[\omega_{22}\mu_2 + \omega_2\sigma_2] -\\
& + x_{uu}[\omega_2\sigma_{11}] +\\
& + x_{vv}[\omega_2\sigma_{22}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_3 = {} & x[\omega_{31}\lambda_0 + \omega_{32}\mu_0 + \omega_{33}\varrho_0 +\\
& + \alpha_1\omega_1\sigma_0] + x_u[\omega_{31}\lambda_1 + \omega_{33}\varrho_1 +\\
& + \alpha_1\omega_1\sigma_1] + x_v[\omega_{32}\mu_2 + \omega_{33}\varrho_2 +\\
& + \alpha_1\omega_1\sigma_2] + x_{uu}[\omega_{33}\varrho_{11} +\\
& + \alpha_1\omega_1\sigma_{11}] + x_{vv}[\omega_{33}\varrho_{22} +\\
& + \alpha_1\omega_1\sigma_{22}],
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_4 = {} & x[\omega_{41}\lambda_0 + \omega_{42}\mu_0 + \alpha_2\omega_2\varrho_0 +\\
& + \omega_{44}\sigma_0] + x_u[\omega_{41}\lambda_1 + \alpha_2\omega_2\varrho_1 +\\
& + \omega_{44}\sigma_1] + x_v[\omega_{42}\mu_2 + \alpha_2\omega_2\varrho_2 +\\
& + \omega_{44}\sigma_2] + x_{uu}[\alpha_2\omega_2\varrho_{11} +\\
& + \omega_{44}\sigma_{11}] + x_{vv}[\alpha_2\omega_2\varrho_{22} +\\
& + \omega_{44}\sigma_{22}].
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Diferencujme rovnice (2); použijeme-li vztahu (1), snadno dostaneme

$$\begin{aligned} dA_1 &= x[d\lambda_0 + \lambda_1 A\,dv] + \\ &+ x_u[\lambda_0\,du + d\lambda_1 + \lambda_1 Q\,dv] + \\ &+ x_v[\lambda_0\,dv + \lambda_1 P\,dv] + \\ &+ x_{uu}[\lambda_1\,du], \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dA_2 &= x[d\mu_0 + \mu_2 A\,du] + \\ &+ x_u[\mu_0\,du + \mu_2 Q\,du] + \\ &+ x_v[\mu_0\,dv + d\mu_2 + \mu_2 P\,du] + \\ &+ x_{vv}[\mu_2\,dv]. \end{aligned} \tag{7}$$

Porovnáním koeficientů u x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv} v rovnicích (6) a (7) pak vychází (předpokládáme, že body A_1, A_2 nevytvořují pouhé křivky) při variaci parametrů u a v:

$$\varrho_2 = \sigma_1 = \varrho_{22} = \sigma_{11} = 0.$$

$$\begin{aligned} \lambda_1\varrho_0 &= \varrho_{11}\lambda_{0u} - \left[\varrho_{11}\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\lambda_0 + \lambda_{1u} - \frac{\lambda_1}{\varrho_{11}}\varrho_1\right)\right], \\ \mu_2\sigma_0 &= \sigma_{22}\mu_{0v} - \left[\sigma_{22}\frac{\mu_0}{\mu_2}\left(\mu_0 + \mu_{2v} - \frac{\mu_2}{\sigma_{22}}\sigma_2\right)\right], \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)_v &= P\left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right) + Q\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - \left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - A, \\ \left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)_u &= P\left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right) + Q\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - \left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - A, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\lambda_1}{\varrho_{11}}\,du, \qquad \omega_2 = \frac{\mu_2}{\sigma_{22}}\,dv, \\ \omega_{11} &= \frac{1}{\lambda_1}\left[du\left(\lambda_0 + \lambda_{1u} - \frac{\lambda_1}{\varrho_{11}}\varrho_1\right) + dv(\lambda_{1v} + \lambda_1 Q)\right], \\ \omega_{22} &= \frac{1}{\mu_2}\left[du(\mu_{2u} + \mu_2 P) + dv\left(\mu_0 + \mu_{2v} - \frac{\mu_2}{\sigma_{22}}\sigma_2\right)\right], \end{aligned} \tag{10}$$

$$\beta_1 = \frac{(\mu_0 + \mu_2 Q)\,\varrho_{11}}{\lambda_1^2}, \qquad \beta_2 = \frac{(\lambda_0 + \lambda_1 P)\,\sigma_{22}}{\mu_2^2}. \tag{11}$$

Diferencujeme-li rovnice (5), užijeme vztahů (8) a (1), snadno dostaneme:

$$\begin{aligned} dA_3 &= x[d\varrho_0 + \varrho_1 A\,dv + \varrho_{11}m_0\,du + \varrho_{11}\,dv(A_u + PA)] + \\ &+ x_u[\varrho_0\,du + d\varrho_1 + \varrho_1 Q\,dv + \varrho_{11}m_1\,du + \varrho_{11}\,dv(A + Q_u + PQ)] + \\ &+ x_v[\varrho_0\,dv + \varrho_1 P\,dv + \varrho_{11}m_2\,du + \varrho_{11}\,dv(Pu + P^2)] + \\ &+ x_{uu}[\varrho_1\,du + d\varrho_{11} + \varrho_{11}m_{11}\,du + \varrho_{11}\,dvQ] + \\ &+ x_{vv}[\varrho_{11}m_{22}\,du], \\ dA_4 &= x[d\sigma_0 + \sigma_2 A\,du + \sigma_{22}(A_v + QA)\,du + \sigma_{22}n_0\,dv] + \\ &+ x_u[\sigma_0\,du + \sigma_2 Q\,du + \sigma_{22}(Q_v + Q^2)\,du + \sigma_{22}n_1\,dv] + \\ &+ x_v[\sigma_0\,dv + d\sigma_2 + \sigma_2 P\,du + \sigma_{22}(A + PQ + P_v)\,du + \sigma_{22}n_2\,dv] + \\ &+ x_{uu}[\sigma_{22}n_{11}\,dv] + \\ &+ x_{vv}[\sigma_2\,dv + d\sigma_{22} + \sigma_{22}n_{22}\,dv + \sigma_{22}P\,du]. \end{aligned} \tag{12}$$

Porovnáme-li koeficienty u x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv} v rovnicích (6) a (12), snadno nalezneme Pfaffovy formy ω_{31}, ω_{32}, ω_{33}, ω_{41}, ω_{42}, ω_{44} a funkce $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

$$\varkappa_1 = \frac{\varrho_{11}^2 m_{22}}{\lambda_1 \sigma_{22}}, \qquad \varkappa_2 = \frac{\sigma_{22}^2 n_{11}}{\mu_2 \varrho_{11}}. \tag{13}$$

Pro koeficienty, které určují polohu vrcholů A_3, A_4 dostaneme další relace:

$$\begin{gathered}
\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[-\frac{\varrho_1}{\varrho_{11}}(\varrho_1 + \varrho_{11u} + \varrho_{11}m_{11}) + \varrho_0 + \varrho_{1u} + \varrho_{11}m_{11}\right] + \\
+ \frac{\mu_0}{\mu_2}\left[-\frac{\varrho_{11}m_{22}}{\sigma_{22}}\sigma_2 + \varrho_{11}m_{22}\right] + \frac{\varrho_0}{\varrho_{11}}[\varrho_1 + \varrho_{11u} + \varrho_{11}m_{11}] + \\
+ \frac{\varrho_{11}m_{22}\sigma_0}{\sigma_{22}} - \varrho_{0u} - \varrho_{11}m_0 = 0, \\
\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[-\frac{\varrho_1}{\varrho_{11}}(\varrho_{11v} + \varrho_{11}Q) + \varrho_{1v} + \varrho_1 Q + \varrho_{11}(A + Q_u + PQ)\right] + \\
+ \frac{\mu_0}{\mu_2}[\varrho_0 + \varrho_1 P + \varrho_{11}(P_u + P^2)] + \\
+ \frac{\varrho_0}{\varrho_{11}}(\varrho_{11v} + \varrho_{11}Q) - \varrho_1 A - \varrho_{11}(A_u + PA) - \varrho_{0v} = 0, \\
\frac{\lambda_0}{\lambda_1}[\sigma_0 + \sigma_2 Q + \sigma_{22}(Q_v + Q^2)] + \\
+ \frac{\mu_0}{\mu_2}\left[-\frac{\sigma_2}{\sigma_{22}}(\sigma_{22u} + \sigma_{22}P) + \sigma_{2u} + \sigma_2 P + \sigma_{22}(A + PQ + P_v)\right] + \\
+ \frac{\sigma_0}{\sigma_{22}}(\sigma_{22u} + \sigma_{22}P) - \sigma_{0u} - \sigma_2 A - \sigma_{22}(A_v + QA) = 0, \\
\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[-\frac{n_{11}\varrho_1\sigma_{22}}{\varrho_{11}} + \sigma_{22}n_1\right] + \\
+ \frac{\mu_0}{\mu_2}\left[-\frac{\sigma_2}{\sigma_{22}}(\sigma_2 + \sigma_{22v} + \sigma_{22}n_{22}) + \sigma_0 + \sigma_{2v} + \sigma_{22}n_2\right] + \frac{\sigma_{22}n_{11}}{\varrho_{11}}\varrho_0 + \\
+ \frac{\sigma_0}{\sigma_{22}}(\sigma_2 + \sigma_{22v} + \sigma_{22}n_2) - \sigma_{22}n_0 - \sigma_{0v} = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Konečně ze vztahu $dA_0 = dx = x_u\,du + x_v\,dv$ a z první rovnice (4) lze vypočíst zbývající Pfaffovy formy

$$\omega_{00} = -\frac{\lambda_0}{\lambda_1}du - \frac{\mu_0}{\mu_2}dv, \qquad \omega_{01} = \frac{1}{\lambda_1}du, \qquad \omega_{02} = \frac{1}{\mu_2}dv.$$

c) Označme podle (3) $\langle sx \rangle = \lambda$, pak $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} = -\dfrac{\lambda_u}{\lambda}$, $\dfrac{\mu_0}{\mu_2} = -\dfrac{\lambda_v}{\lambda}$,

$$\lambda_0 = -K\lambda_u,\ \lambda_1 = K\lambda,\ \mu_0 = -\bar{K}\lambda_v,\ \mu_2 = \bar{K}\lambda,\ K = K(u, v),\ \bar{K} = \bar{K}(u, v).$$

a dosaďme do rovnice (9). Obě rovnice splynou v jedinou

$$\lambda_{uv} = A\lambda + Q\lambda_u + P\lambda_v. \tag{15}$$

Podle (3) je λ lineární kombinací s konstantními koeficienty souřadnic x plochy Φ. Tedy podle (5a) nutně platí

$$\begin{aligned} \lambda_{uuu} &= m_0\lambda + m_1\lambda_u + m_2\lambda_v + m_{11}\lambda_{uu} + m_{22}\lambda_{vv}, \\ \lambda_{vvv} &= n_0\lambda + n_1\lambda_u + n_2\lambda_v + n_{11}\lambda_{uu} + n_{22}\lambda_{vv}. \end{aligned} \tag{16}$$

Specializujme nyní repér tak, že je

$$\varrho_{11} = \lambda_1 = K\lambda, \qquad \sigma_{22} = \mu_2 = \bar{K}\lambda, \tag{17}$$

pak pro koeficienty v relacích (5) platí podle (8) tyto vztahy:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \varrho_2 = \sigma_{11} = \varrho_{22} = 0, \\ \varrho_0 = -K\lambda_{uu} - \frac{\lambda_u}{\lambda}\varrho_1, \\ \sigma_0 = -\bar{K}\lambda_{vv} - \frac{\lambda_v}{\lambda}\sigma_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Dosaďme z rovnic (17) a (18) do (14) a použijme relací (16). Rovnice (14) jsou pak splněny identicky, jak vychází snadným výpočtem. Koeficienty rovnic (5) jsou tedy vázány právě jen vztahy (18). Vhodnou volbou K, $\bar{K}$ je možno dosáhnout splnění relace $(A_1, A_2, A_3, A_4) = 1$. Z relací (10), (11), (13) snadno dostaneme podle (17)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= du, & \omega_2 &= dv, \\ \alpha_1 &= \frac{\lambda_1 m_{22}}{\mu_2}, & \alpha_2 &= \frac{\mu_2 n_{11}}{\lambda_1}, \\ \beta_1 &= \frac{\mu_0 + \mu_2 Q}{\lambda_1}, & \beta_2 &= \frac{\lambda_0 + \lambda_1 P}{\mu_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

d) Uvažujme další nadrovinu $\bar{H}$ v P_4. Tečné roviny τ plochy Φ protínají trojrozměrný prostor $\bar{H}$ v přímkové kongruenci $\bar{\Gamma}$ o fokálních plochách $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$.

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \bar{\lambda}_0 x + \bar{\lambda}_1 x_u = c_0 A_0 + c_1 A_1, \\ \bar{A}_2 &= \bar{\mu}_0 x + \bar{\mu}_2 x_u = d_0 A_0 + d_2 A_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Podle rovnic (2) vychází

$$\begin{aligned} c_0 &= \bar{\lambda}_0 - \frac{\bar{\lambda}_1 \lambda_0}{\lambda_1}, & c_1 &= \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1}, \\ d_0 &= \bar{\mu}_0 - \frac{\bar{\mu}_2 \mu_0}{\mu_2}, & d_2 &= \frac{\bar{\mu}_2}{\mu_2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Zvolme opět pohyblivý repér o vrcholech v bodech $A_0 = x$, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$, body $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$ jsou zvoleny tak, aby repér $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$ byl polokanonickým repérem kongruence $\bar{\Gamma}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_0 &= \bar{\omega}_{00}A_0 + \bar{\omega}_{01}\bar{A}_1 + \bar{\omega}_{02}\bar{A}_2, \\ \mathrm{d}\bar{A}_1 &= \bar{\omega}_{11}\bar{A}_1 + \bar{\beta}_2\bar{\omega}_2\bar{A}_2 + \bar{\omega}_1\bar{A}_3, \\ \mathrm{d}\bar{A}_2 &= \bar{\beta}_1\bar{\omega}_1\bar{A}_1 + \bar{\omega}_{22}\bar{A}_2 + \bar{\omega}_2\bar{A}_4, \\ \mathrm{d}\bar{A}_3 &= \bar{\omega}_{31}\bar{A}_1 + \bar{\omega}_{32}\bar{A}_2 + \bar{\omega}_{33}\bar{A}_3 + \bar{\alpha}_1\bar{\omega}_1\bar{A}_4, \\ \mathrm{d}\bar{A}_4 &= \bar{\omega}_{41}\bar{A}_1 + \bar{\omega}_{42}\bar{A}_2 + \bar{\alpha}_2\bar{\omega}_2\bar{A}_3 + \bar{\omega}_{44}\bar{A}_4. \end{aligned} \tag{22}$$

Body $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$ se pak dají napsat v tomto tvaru:

$$\begin{aligned} \bar{A}_3 &= \gamma_0A_0 + \gamma_1A_1 + \gamma_2A_2 + \gamma_{11}A_3 + \gamma_{22}A_4, \\ \bar{A}_4 &= \varphi_0A_0 + \varphi_1A_1 + \varphi_2A_2 + \varphi_{11}A_3 + \varphi_{22}A_4. \end{aligned} \tag{23}$$

Do rovnic (22) dosaďme za $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$ podle (20) a (23). Diferencujme dále rovnice (20) a (23) a za $\mathrm{d}A_0$, $\mathrm{d}A_1$, $\mathrm{d}A_2$, $\mathrm{d}A_3$, $\mathrm{d}A_4$ dosaďme podle (4). Porovnejme pak koeficienty u obou výsledků pro $\mathrm{d}\bar{A}_1$, $\mathrm{d}\bar{A}_2$, $\mathrm{d}\bar{A}_3$, $\mathrm{d}\bar{A}_4$. Snadno nalezneme:

$$\begin{gathered} \bar{\omega}_1 = \frac{c_1\omega_1}{\gamma_{11}} = \frac{c_1\lambda_1}{\gamma_{11}\varrho_{11}}\,\mathrm{d}u, \qquad \bar{\omega}_2 = \frac{d_2\omega_2}{\varphi_{22}} = \frac{d_2\mu_2}{\varphi_{22}\sigma_{22}}\,\mathrm{d}v, \\ \frac{c_0}{\mu_2} + \frac{c_1\beta_2\mu_2}{\sigma_{22}} = \bar{\beta}_2\frac{d_2^2\mu_2}{\varphi_{22}\sigma_{22}}, \\ \frac{d_0}{\lambda_1} + \frac{d_2\beta_1\lambda_1}{\varrho_{11}} = \bar{\beta}_1\frac{c_1^2\lambda_1}{\gamma_{11}\varrho_{11}}, \\ \bar{\alpha}_1\frac{c_1}{\gamma_{11}}\varphi_{22} = \gamma_{11}\alpha_1, \\ \bar{\alpha}_2\frac{d_2}{\varphi_{22}}\gamma_{11} = \varphi_{22}\alpha_2. \end{gathered} \tag{24}$$

Specializujme nyní repér kongruence $\bar{\Gamma}$ tak, aby platilo

$$\bar{\omega}_1 = \mathrm{d}u, \qquad \bar{\omega}_2 = \mathrm{d}v. \tag{25}$$

Podle (24) musí pak platit

$$c_1\lambda_1 = \gamma_{11}\varrho_{11}, \qquad d_2\mu_2 = \varphi_{22}\sigma_{22}. \tag{26}$$

Rovnice (23) se dají psát podle (5) a (8) ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{A}_3 &= \bar{\varrho}_0x + \bar{\varrho}_1x_u + \bar{\varrho}_{11}x_{uu}, \\ \bar{A}_4 &= \bar{\sigma}_0x + \bar{\sigma}_2x_v + \bar{\sigma}_{22}x_{vv}. \end{aligned} \tag{27}$$

Dokažme, že specializace repéru (26) je totožná se specializací $\bar{\varrho}_{11} = \bar{\lambda}_1$, $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\mu}_2$, tedy je to specializace analogická k specializaci (17). Dosaďme v rovnicích (23) za

A_1, A_2, A_3, A_4 podle (2) a (5) a porovnejme koeficienty ve výsledných rovnicích u x_{uu} resp. x_{vv} s příslušnými koeficienty v rovnicích (27).

$$\bar{\varrho}_{11} = \gamma_{11}\varrho_{11}, \qquad \bar{\sigma}_{22} = \varphi_{22}\sigma_{22}.$$

Podle (21) pak platí $c_1\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$, $d_2\mu_2 = \bar{\mu}_2$.

Při specializaci (26) lze psát rovnice (24) v tomto tvaru:

$$\begin{aligned} &\bar{\omega}_1 = \mathrm{d}u, && \bar{\omega}_2 = \mathrm{d}v, \\ &\bar{\beta}_1 = \frac{d_0 + d_2(\mu_0 + \mu_2 Q)}{\lambda_1 c_1}, && \bar{\beta}_2 = \frac{c_0 + c_1(\lambda_0 + \lambda_1 P)}{\mu_2 d_2}, \\ &\bar{\alpha}_1 = \frac{c_1\lambda_1 m_{22}}{d_2\mu_2}, && \bar{\alpha}_2 = \frac{d_2\mu_2 n_{11}}{c_1\lambda_1}. \end{aligned} \tag{28}$$

e) A. Švec ve své publikaci [6] uvažuje dvě kongruence přímek L, $\bar{L}$ v trojrozměrném projektivním prostoru P_3, resp. $\bar{P}_3$, které jsou v torzální korespondenci, tj. takové korespondenci $\boldsymbol{K}$, že každé rozvinutelné ploše kongruence L odpovídá rozvinutelná plocha kongruence $\bar{L}$.

Předpokládejme, že obě kongruence jsou vztaženy na své polokanonické repéry, pak korespondence $\boldsymbol{K}$ se dá napsat ve tvaru

$$\bar{\omega}_1 = \varepsilon_1\omega_1, \qquad \bar{\omega}_2 = \varepsilon_4\omega_2. \tag{29}$$

Autor volí dále takové polokanonické repéry, že platí

$$\varepsilon_1 = 1, \qquad \varepsilon_4 = 1. \tag{29a}$$

Korespondence $\boldsymbol{K}$ doplněná kolineací $\boldsymbol{K}_1$

$$\begin{aligned} K_1 A_1 &= \overset{*}{\sigma}_1 \bar{A}_1, \\ K_1 A_2 &= \overset{*}{\sigma}_2 \bar{A}_2 \end{aligned}$$

se nazývá bodovou deformací $\boldsymbol{R}$ kongruencí L, $\bar{L}$, lze-li kolineaci $\boldsymbol{K}_1$ rozšířiti na celé prostory P_3, $\bar{P}_3$ tak, že křivky

$$\begin{aligned} z &= x_1\overset{*}{\sigma}_1\bar{A}_1 + x_2\overset{*}{\sigma}_2\bar{A}_2, \\ \bar{z} &= K_1(x_1 A_1 + x_2 A_2) \end{aligned}$$

mají pro každá x_1, x_2 analytický styk 1. řádu.

A. Švec dokazuje, že nutná a postačující podmínka pro existenci bodové deformace je při specializaci (29a)

$$\beta_1\beta_2 = \bar{\beta}_1\bar{\beta}_2. \tag{30}$$

Duálně lze definovat tzv. rovinovou deformaci. Nutná a postačující podmínka pro existenci rovinové deformace $\boldsymbol{R}^*$ je při (29a)

$$\alpha_1\alpha_2 = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2. \tag{31}$$

f) Definice. *Korespondencí $\bar{R}$ nazývejme takovou korespondenci kongruencí Γ a $\bar{\Gamma}$, že odpovídající si přímky leží v jediné tečné rovině τ plochy Φ.*

Kongruence Γ a $\bar{\Gamma}$ uvažujeme v dalším vztažené na polokanonické repéry specializované podle (17) a (26). Pak podle (19) a (28) platí

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 , \qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2 ,$$

tedy jsou ve tvaru, jak uvažuje A. Švec.

Věta 1. *Každá korespondence $\bar{R}$ se dá rozšířit na rovinovou deformaci.*
Plyne z rovnic (31), (28), (19).

Věta 2. *Korespondence $\bar{R}$ se dá rozšířit na bodovou deformaci, platí-li*

$$\bar{\lambda} = U(u)\, V(v)\, \lambda.$$

Důkaz: Dosadíme-li do rovnice (30) podle (19) a (28), dostaneme po snadné úpravě tuto podmínku.

$$P \frac{\mu_0}{\mu_2} + Q \frac{\lambda_0}{\lambda_1} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \frac{\mu_0}{\mu_2} = P \frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2} + Q \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1} + \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1} \frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2}$$

a odtud podle (9)

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)_v = \left(\frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1}\right)_v , \qquad \left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)_u = \left(\frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2}\right)_u$$

nebo podle odst. c)

$$(\log \lambda)_{uv} = (\log \bar{\lambda})_{uv}$$

a odtud plyne již hledaný výsledek.

g) V dalším předpokládejme, že kongruence Γ i $\bar{\Gamma}$ jsou kongruencemi W.

Podmínkami, kdy Γ, je kongruence W se zabýval B. Segre [4], jeho práci pak doplnil O. Sorace [5].

Věta 3. *Jestliže kongruence Γ i $\bar{\Gamma}$ jsou kongruencemi W, pak korespondence $\bar{R}$ se dá vždy rozšířit na bodovou deformaci.*

Důkaz: Kongruence Γ, resp. $\bar{\Gamma}$ jsou kongruencemi W, platí-li

$$\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2 , \qquad \text{resp.} \qquad \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 = \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 .$$

Dosazením z rovnic (19), resp. (28) snadno dostaneme

$$m_{22} n_{11} - PQ = P \frac{\mu_0}{\mu_2} + Q \frac{\lambda_0}{\lambda_1} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \frac{\mu_0}{\mu_2} ,$$

$$m_{22} n_{11} - PQ = P \frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2} + Q \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1} + \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1} \frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2} .$$

Další část důkazu je zřejmá podle věty 2.

II. Předpokládejme, že v nadrovině H projektivního čtyřrozměrného prostoru P_4 je dána neparabolická kongruence přímek Γ o ohniskových plochách A_1, A_2. V P_4 hledejme plochu Φ, jejíž tečné roviny vytínají v nadrovině H právě kongruenci Γ.

Věta 4. *Plocha Φ závisí na dvou libovolných funkcích jednoho argumentu a dvou libovolných konstantách.*

Důkaz: V P_4 zvolme pohyblivý repér o vrcholech v bodech A_1, A_2, A_3, A_4, M. Vrcholy A_3, A_4 nechť jsou voleny tak, aby ležely v nadrovině H a repér A_1, A_2, A_3, A_4 byl polokanonickým repérem kongruence Γ. Zbývající vrchol $M = M(u, v)$ nechť neleží v H. Pak nutně platí:

$$\begin{aligned}
dM &= \omega_{00}M + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2 + \omega_{03}A_3 + \omega_{04}A_4,\\
dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \beta_2\omega_2A_2 + \omega_1A_3,\\
dA_2 &= \beta_1\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4,\\
dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \alpha_1\omega_1A_4,\\
dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \alpha_2\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4.
\end{aligned} \tag{32}$$

V rovnicích (32) jsou ω_{ik}, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, ω_1, ω_2 známé Pfaffovy formy v diferenciálech du, dv; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ jsou známé funkce parametrů u, v. Lokální souřadnice l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 bodu A plochy Φ jsou koeficienty lineární kombinace

$$A = l_0M + l_1A_1 + l_2A_2 + l_3A_3 + l_4A_4. \tag{33}$$

Aby tečná rovina plochy Φ v bodě A procházela přímkou (A_1, A_2), je nutné a stačí, aby determinanty čtvrtého řádu matice

$$(A, dA, A_1, A_2)$$

byly rovny nule. Tyto podmínky vycházejí ve tvaru:

$$l_0(l_1\omega_1 + dl_3 + l_3\omega_{33} + l_4\alpha_2\omega_2) - l_3(dl_0 + l_0\omega_{00}) + l_0^2\omega_{03} = 0, \tag{34a}$$

$$l_0(l_2\omega_2 + l_3\alpha_1\omega_1 + dl_4 + l_4\omega_{44}) - l_4(dl_0 + l_0\omega_{00}) + l_0^2\omega_{04} = 0, \tag{34b}$$

$$\begin{aligned}
&l_3(l_2\omega_2 + l_3\alpha_1\omega_1 + dl_4 + l_4\omega_{44} + l_0\omega_{04}) -\\
&- l_4(l_1\omega_1 + dl_3 + l_3\omega_{33} + l_4\alpha_2\omega_2 + l_0\omega_{03}) = 0.
\end{aligned} \tag{34c}$$

Rovnice (34c) je lineární kombinace rovnic (34a), (34b). Levé strany rovnic (34) jsou Pfaffovy formy v diferenciálech neznámých funkcí l_0, l_3, l_4 a parametrů u a v. Řešením těchto rovnic vycházejí souřadnice l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 bodů plochy Φ.

Derivujeme-li vnějšně rovnice (34a), (34b) a použijeme-li rovnic struktury projektivního čtyřrozměrného prostoru, snadno dostaneme:

$$\begin{aligned}
&[dl_0, l_1\omega_1 + dl_3 + l_3\omega_{33} + l_4\alpha_2\omega_2] + l_0[dl_1, \omega_1] +\\
&+ l_0l_1\{[\omega_{11}, \omega_1] + [\omega_1, \omega_{33}]\} + l_0[dl_3, \omega_{33}] + l_0l_3\{[\omega_{31}, \omega_1] +\\
&+ \alpha_1\alpha_2[\omega_1, \omega_2]\} + l_0\alpha_2[dl_4, \omega_2] + l_0l_4[d\alpha_2, \omega_2] +\\
&+ l_0l_4\alpha_2\{[\omega_{22}, \omega_2] + [\omega_2, \omega_{44}]\} - [dl_3, dl_0] - [dl_3, l_0\omega_{00}] -\\
&- l_3[dl_0, \omega_{00}] + 2l_0[dl_0, \omega_{03}] + l_0^2\{[\omega_{00}, \omega_{03}] + [\omega_{01}, \omega_1] +\\
&+ [\omega_{03}, \omega_{33}] + \alpha_2[\omega_{04}, \omega_2]\} = 0,
\end{aligned} \tag{35a}$$

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{d}l_0, l_2\omega_2 + l_3\alpha_1\omega_1 + \mathrm{d}l_4 + l_4\omega_{44}] + l_0[\mathrm{d}l_2, \omega_2] + l_0l_2\{[\omega_{22}, \omega_2] + \\
&\quad + [\omega_2, \omega_{44}]\} + l_0l_3[\mathrm{d}\alpha_1, \omega_1] + l_0\alpha_1[\mathrm{d}l_3, \omega_1] + l_0l_3\alpha_1\{[\omega_{11}, \omega_1] + \\
&\quad + [\omega_1, \omega_{33}]\} + l_0[\mathrm{d}l_4, \omega_{44}] + l_0l_4\{[\omega_{42}, \omega_2] + \alpha_1\alpha_2[\omega_2, \omega_1]\} - \\
&\quad - [\mathrm{d}l_4, \mathrm{d}l_0] - l_0[\mathrm{d}l_4, \omega_{00}] - l_4[\mathrm{d}l_0, \omega_{00}] + 2l_0[\mathrm{d}l_0, \omega_{04}] + \\
&\quad + l_0^2\{[\omega_{00}, \omega_{04}] + [\omega_{02}, \omega_2] + \alpha_1[\omega_{03}, \omega_1] + [\omega_{04}, \omega_{44}]\} = 0.
\end{aligned} \tag{35b}
$$

Z rovnic (34a) lze vypočísti $\mathrm{d}l_3$, z rovnic (34b) $\mathrm{d}l_4$ a dosadit do rovnic (35). Rovnice (35) pišme pak takto:

$$
\begin{aligned}
-l_1[\mathrm{d}l_0, \omega_1] + [\mathrm{d}l_1, l_0\omega_1] + \ldots = 0, \\
[\mathrm{d}l_2, l_0\omega_2] - l_2[\mathrm{d}l_0, \omega_2] + \ldots = 0.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Nenapsané členy v rovnicích (36) jsou kvadratické vnější formy, jejíž členy neobsahují již diferenciálů neznámých funkcí. Napíšeme-li bilineární relace příslušné k rovnicím (36), dostaneme:

$$
\begin{aligned}
l_0\{\mathrm{d}l_1\omega_1(\delta) - \delta l_1\omega_1(\mathrm{d})\} - l_1\{\mathrm{d}l_0\omega_1(\delta) - \delta l_0\omega_1(\mathrm{d})\} + \ldots = 0, \\
l_0\{\mathrm{d}l_2\omega_2(\delta) - \delta l_2\omega_2(\mathrm{d})\} - l_2\{\mathrm{d}l_0\omega_2(\delta) - \delta l_0\omega_2(\mathrm{d})\} + \ldots = 0.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Pokládáme-li v rovnicích (37) $\mathrm{d}l_0$, $\mathrm{d}l_1$, $\mathrm{d}l_2$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$, δu, δv za známé, dostaneme dvě rovnice pro tři neznámé δl_0, δl_1, δl_2. Poněvadž ω_1, ω_2 jsou lineárně nezávislé Pfaffovy formy, je řád rovnic (37) roven dvěma, uzavřený systém (34), (35) je v involuci s charakteristikami (Finikov [2], str. 80, 81)

$$s_0 = 2, \qquad s_1 = 2, \qquad s_2 = 1.$$

Jediná libovolná funkce dvou proměnných ($s_2 = 1$) je faktorem homogenity souřadnic bodu A. Jsou-li l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 výsledné souřadnice bodu A plochy Φ, pak ϱl_0, ϱl_1, ϱl_2, ϱl_3, ϱl_4, kde $\varrho = \varrho(u, v)$, rovněž vyhovují rovnicím (34), (35), jak lze snadno zjistit. Uvažujeme-li, že l_0 je libovolně zvolená funkce parametrů u, v, pak uzavřený systém (34), (35) je v involuci s charakteristikami

$$s_0 = 2, \qquad s_1 = 2, \qquad s_2 = 0.$$

Tím je podle teorie o systémech v involuci důkaz proveden. Vylučuje se případ $l_0 = 0$, poněvadž pak plocha Φ by ležela v nadrovině H.

Pracováno v semináři dif. geometrie prof. dr. J. Klapky

LITERATURA

[1] Blaschke W., *Sulla geometria proiettivo delle superficie V_2 dello spazio P_4*, Rend. circ. Mat. Palermo (2), 3 (1954), 193—197.

[2] Фиников С. П., *Теория конгруэнций*, Москва 1950.

[3] Lane E. P., *A treatise on projective differential geometry*, Chicago 1942.

[4] Segre B., *Intorno ad un problema di Wilhelm Blaschke*. Abhandlungen Mat. Sem. Hamburg, Bd. 20 (1956), 28—40.

[5] Sorace O., *Sulle superficie di S_4 aventi cinque iperpiani di Blaschke indipendenti.* Rend. Sc. fis. mat. e nat., Roma 1956, 452—456.
[6] Švec A., *Projektivní deformace kongruencí* (litogr.), Praha 1955.

Došlo 18. 2. 1961.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie Vysokého učení technického v Brně

О КОНГРУЭНЦИЯХ ПРЯМЫХ ПЕРЕСЕЧЕННЫХ В ГИПЕРПЛОСКОСТЯХ ПРОЕКТИВНОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА P_4 КАСАТЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ Φ

Йосеф Вала

Резюме

Пусть поверхность Φ лежит в проективном четырехмерном пространстве P_4. Её касательные плоскости пересекают гиперплоскости H, $\bar{H}$ пространства P в конгруэнциях прямых Γ, $\bar{\Gamma}$. Мы обозначим их фокальные поверхности A_1, A_2 или $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$. Соответствие $\boldsymbol{R}$ является таким соответствием конгруэнций Γ, $\bar{\Gamma}$, в котором соответствующие прямые лежат в единственной касательной плоскости поверхности Ф. Соответствие $\boldsymbol{R}$ дополненное колинеацией $\boldsymbol{K}$, $KA_1 = \sigma_1^*\bar{A}_1$, $KA_2 = \sigma_2^*\bar{A}_2$, называется точечным изгибанием конгруенций Γ, $\bar{\Gamma}$, если колинеацию $\boldsymbol{K}$ можно расширить на все пространства H, $\bar{H}$, так что кривые

$$z = x_1\sigma_1^*\bar{A}_1 + x_2\sigma_2^*\bar{A}_2 \quad \text{и} \quad \bar{z} = K(x_1A_1 + x_2A_2)$$

имеют аналитическое касание 1-ого порядка. Двойственно можно определить, когда соответствие $\boldsymbol{R}$ можно расширить на плоскостное изгибание. Если конгруэнции Γ и $\bar{\Gamma}$ являются конгруэнциями W, тогда можно $\boldsymbol{R}$ всегда расширить на точечное изгибание. Всякое соответствие $\boldsymbol{R}$ можно расширить на плоскостное изгибание. Наконец найдена общность решения проблемы: к заданной конгруэнции Γ в гиперплоскости H найти в P_4 поверхность Ф так, чтобы ее касательные плоскости пересекали H именно в заданной конгруэнции Γ.

ÜBER DIE GERADENKONGRUENZEN, DIE IN DEN HYPEREBENEN DES PROJEKTIVEN VIERDIMENSIONALEN RAUMES P_4 DURCH DIE TANGENTIALEBENEN DER FLÄCHE Φ, WELCHE IM RAUME P_4 LIEGT, DURCHGESCHNITTEN WERDEN

Josef Vala

Zusammenfassung

Die Fläche Φ sei im projektiven vierdimensionalen Raume P_4 liegen. Ihre Tangentialebenen schneiden die Hyperebenen H, $\bar{H}$ des Raumes P_4 in den Geradenkongruenzen Γ, $\bar{\Gamma}$ durch. Ihre Fokalflächen bezeichnen wir durch A_1, A_2, bzw. $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$. Die Korrespondenz $\boldsymbol{R}$ ist eine Korres-

pondenz der Kongruenzen Γ, Γ mit solcher Eigenschaft, daß die entsprechenden Geraden in einer Tangentialebenen der Fläche Φ liegen. Die Korrespondenz $\boldsymbol{R}$, die durch die Kollineation $\boldsymbol{K}$

$$KA_1 = \sigma_1^* A_1, \qquad KA_2 = \sigma_2^* A_2$$

ergänzt ist, bezeichnen wir als Punktabwicklung der Kongruenzen Γ, Γ in dem Falle, wenn es möglich ist, die Kollineation $\boldsymbol{K}$ auf die ganzen Räume H, H so zu ergänzen, daß die Kurven

$$z = x_1 \sigma_1^* \bar{A}_1 + x_2 \sigma_2^* A_2 \qquad \text{und} \qquad z = K(x_1 A_1 + x_2 A_2)$$

für jedes x_1, x_2 eine analytische Berührung erster Ordnung haben. Im dualen Sinne kann man feststellen, in welchem Falle es möglich ist, die Korrespondenz $\boldsymbol{R}$ zu der sogenannten Ebenenabwicklung zu ergänzen. Falls die beiden Kongruenzen Γ und Γ die Kongruenzen W sind, dann ist es immer möglich, jede Korrespondenz $\boldsymbol{R}$ zu einer Punktabwicklung zu ergänzen. Es ist möglich, jede Korrespondenz $\boldsymbol{R}$ zu einer Ebenenabwicklung zu ergänzen. Endlich wird die Allgemeinheit der Lösung dieses Problems gefunden; zu der gegebenen Kongruenz Γ, die in der Hyperebene H des Raumes P_4 liegt, die Fläche Φ des Raumes P_4 zu finden, so daß ihre Tangentialebenen die Hyperebene H gerade in der gegebenen Kongruenz durchschneiden.