Iosif Aleksandrovič Vil′ner

# Бесквадратурная номогррафия. Алгебраическая номография и проблема анаморфозы функций в двухмерной плоскости при $n = 6$ переменных. II.

*Matematický časopis*, Vol. 17 (1967), No. 4, 266--281

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/127009`

Matematický časopis 17 (1967), No. 4

# БЕСКВАДРАТУРНАЯ НОМОГРАФИЯ. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НОМОГРАФИЯ И ПРОБЛЕМА АНАМОРФОЗЫ ФУНКЦИЙ В ДВУХМЕРНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ $n = 6$ ПЕРЕМЕННЫХ II

ИОСИФ АЛЕКСАНДРОВИЧ ВИЛЬНЕР, Москва (СССР)

## ГЛАВА II

### ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ БЕСКВАДРАТУРНОЙ АНАМОРФОЗЫ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

**§9.**[1] Если условия (1.15) или что то же $\underset{3}{A}{}^{z_3}_{11} \neq 0$ или $\underset{3}{A}{}^{z_3}_{33} \neq 0$ (см. теорему 3 в начале §3 (или (8.5)) не могут быть удовлетворены ни при каком ,,дифференцировании'', т. е. имеем тождественно

$$(9.1) \qquad (\bar{b}\, \mathrm{d}_{z_1}\bar{b},\, \mathrm{d}_{z_2}\bar{b}) \equiv 0,$$

то векторы $\bar{b}$, $\mathrm{d}_{z_1}\bar{b}$, $\mathrm{d}_{z_2}\bar{b}$ компланарны и вектор-функция $\bar{b}$ двух аргументов $z_1$, $z_2$ в пространстве описывает коническую поверхность, на которой сеть линий $z_1 = \mathrm{const}$ и $z_2 = \mathrm{const}$ будет координатной.

Если же присоединить сюда и первые два условия (8.5), выражающих условия того, что линии $z_2 = \mathrm{const}$ и $z_1 = \mathrm{const}$ лежат в плоскостях, проходящих через начало, то получим, что вектор-функция $\bar{b}$ описывает плоскость, проходящую через начало.

Мы легко можем переписать условие (9.1) в виде (см. (1.15))

$$(9.2) \qquad B \equiv \begin{vmatrix} F & F_{z_3} & F_{z_3^2} \\ F_{z_1} & F_{z_3 z_1} & F_{z_3^2 z_1} \\ F_{z_2} & F_{z_3 z_2} & F_{z_3^2 z_2} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Если ранг определителя (9.2) при любом ,,дифференцировании не выше двух, то мы еще не можем отсюда сделать заключение о неприменимости нашей теории, поскольку определитель (9.2) (или (1.15)) получен в резуль-

(1) Излагаемое в этом параграфе ниже вошло в доклад автора [21]. Мы будем теперь считать $z_i$ принимающими значения из непрерывного числового поля.

тате частного выбора дифференцирований, фигурирующих слева в окаймленном определителе (8.7).

Поэтому неприменимость теории будет иметь место только в случае тождественного равенства нулю окаймленного определителя в (8.7) при любом дифференцировании, т. е. при

$$(9.3)\qquad \begin{vmatrix} F & F_{z_3} & F_{z_3^2} \\ F_{z_1 z_2} & F_{z_3 z_1 z_2} & F_{z_3^2 z_1 z_2} \\ F_{z_1^2 z_2^2} & F_{z_3 z_1^2 z_2^2} & F_{z_3^2 z_1^2 z_2^2} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где слева имеем функцию девяти абстрактных измененных

$$z_1,\ z_1^1,\ z_1^2,\ z_2,\ z_1^1,\ z_2^2,\ z_3,\ z_3^1,\ z_3^2.$$

Пусть ранг этого определителя равен двум, т. е. существует такое дифференцирование, т. е. набор значений этих девяти абстрактных переменных, при котором ранг определителя, получаемого из (9.3) при этих значениях, равен двум.

Легко видеть, что можно считать

$$(9.4)\qquad \delta \equiv \begin{vmatrix} F_{z_3 z_1 z_2} & F_{z_3^2 z_1 z_2} \\ F_{z_3 z_1^2 z_2^2} & F_{z_3^2 z_1^2 z_2^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это дифференцирование мы и зафиксируем в (9.3).

Раскладывая определитель (9.3) по элементам первой строки и деля затем получившееся тождество (по $z_1$, $z_2$, $z_3$) на отличный от нуля определитель $\delta$, мы найдем следующий вид функций, к которым наша теория неприменима:

$$(9.5)\qquad F \equiv \varphi_3(z_3)\xi_{12}(z_1;\, z_2) + \psi_3(z_3)\eta_{12}(z_1;\, z_2),$$

т. е. эти функции представимы билинейным разложением (9.5) длины равной двум и строго двум.

Если бы мы предположили, что ранг определителя (9.3) равен единице, например $F_{z_3 z_1 z_2} \neq 0$, то определитель

$$(9.6)\qquad \begin{vmatrix} F & F_{z_3} \\ F_{z_1 z_2} & F_{z_3 z_1 z_2} \end{vmatrix} \equiv 0$$

при таком выборе дифференцирования равнялся бы нулю тождественно по $z_1$, $z_2$, $z_3$, и мы получили бы тривиальный случай

$$(9.7)\qquad F \equiv \varphi_3(z_3)\xi_{12}\,(z_1;\, z_2).$$

Случай функции (9.5) отнюдь не тривиальный. Он охватывает уравнения третьего номографического порядка, когда анаморфоза возможна, и когда нецелесообразен подход теории анаморфозы функций, а целесообразен подход теории анаморфозы уравнений. Но все же это не снимает вопроса о представлении (9.5) с точностью до множителя $\sigma_{12}$ в виде определителя Массо.

Мы ограничимся указанием подхода.

Строим функцию

$$F_{\delta\nu} \equiv \varphi_3\xi_{12} + \psi_3\eta_{12} + \delta_3\nu_{12} \tag{9.8}$$

с неопределенными функциями $\delta_3$ и $\nu_{12}$, причем $F \equiv \lim\limits_{\delta_3\nu_{12}\to 0} F_{\delta\nu}$.

Условие (2.1) или (8.) априори тождественно удовлетворено. Легко найти([2])

$$A_{33} \equiv \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{1^12^1} & \eta_{1^12^1} & \nu_{1^12^1} \\ \xi_{1^22^2} & \eta_{1^22^2} & \nu_{1^22^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_{3^1} & \varphi_{3^2} \\ \psi_3 & \psi_{3^1} & \psi_{3^2} \\ \delta_3 & \delta_{3^1} & \delta_{3^2} \end{vmatrix} \equiv C\tilde{A} \tag{9.9}$$

Условия (8.25) и (8.26) дают соответственно

$$\underset{(1)}{A^{z^3}} \equiv \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} & \nu_{12^1} \\ \xi_{12^2} & \eta_{12^2} & \nu_{12^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \varphi_{3^2} & \varphi_{3^3} \\ \psi_{3^1} & \psi_{3^2} & \psi_{3^3} \\ \delta_{3^1} & \delta_{3^2} & \delta_{3^3} \end{vmatrix} \equiv \underset{(1)}{\tilde{A}A}, \tag{9.10}$$

$$\underset{(2)}{A^{z_3}} \equiv \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{1^12} & \eta_{1^12} & \nu_{1^12} \\ \xi_{1^22} & \eta_{1^22} & \nu_{1^22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \varphi_{3^2} & \varphi_{3^3} \\ \psi_{3^1} & \psi_{3^2} & \psi_{3^3} \\ \delta_{3^1} & \delta_{3^2} & \delta_{3^3} \end{vmatrix} \equiv \underset{(2)}{\tilde{A}A}, \tag{9.11}$$

где через $A$ обозначен второй сомножитель в (9.10) и (9.11), а через $\tilde{A}$ — второй сомножитель в (9.9), причем, очевидно, $A = \tilde{A}_{z_3}$, где условная производная берется по $z_3$ с повышением индекса. Отметим — нам это понадобится ниже в §10 — что равенства (9.9), (9.10), (9.11), как они написаны, верны не только в смысле тождественного равенства приравненных в этих равенствах определителей, но и в матричном смысле, что легко проверить, если принять во внимание (9.8) и (2.5), (2.6) (достаточно в (2.5), (2.6), как в матрицах, заменить $F$ на выражение $F_{\delta\nu}$ из (9.8)).

Уравнения шкал напишутся по формулам (3.1)—(3.3):

$$\underset{1}{x_1} = \begin{vmatrix} \varphi_{3^2}\xi_{12} + \psi_{3^2}\eta_{12} + \delta_{3^2}\nu_{12} & \varphi_{3^3}\xi_{12} + \psi_{3^3}\eta_{12} + \delta_{3^3}\nu_{12} \\ \varphi_{3^2}\xi_{12^1} + \psi_{3^2}\eta_{12^1} + \delta_{3^2}\nu_{12^1} & \varphi_{3^3}\xi_{12^1} + \psi_{3^3}\eta_{12^1} + \delta_{3^3}\nu_{12^3} \end{vmatrix}, \tag{9.12}$$

$$\underset{1}{x_2} = -\begin{vmatrix} \varphi_{3^1}\xi_{12} + \psi_{3^1}\eta_{12} + \delta_{3^1}\nu_{12} & \varphi_{3^3}\xi_{12} + \psi_{3^3}\eta_{12} + \delta_{3^3}\nu_{12} \\ \varphi_{3^1}\xi_{12^1} + \psi_{3^1}\eta_{12^1} + \delta_{3^1}\nu_{12^1} & \varphi_{3^3}\xi_{12^1} + \psi_{3^3}\eta_{12^1} + \delta_{3^3}\nu_{12^1} \end{vmatrix},$$

([2]) Условные производные от $\varphi_3, \ldots, \xi_{12}, \ldots$ мы обозначаем через $\varphi_{31}, \ldots, \xi_{1^12^1}, \ldots, \varphi_{32}, \ldots, \xi_{1^22^2}, \ldots$ и т. д.

$$\underset{1}{x_3} = \begin{vmatrix} \varphi_{3^1}\xi_{12} + \psi_{3^1}\eta_{12} + \delta_{3^1}\nu_{12} & \varphi_{3^2}\xi_{12} + \psi_{3^2}\eta_{12} + \delta_{3^2}\nu_{12} \\ \varphi_{3^1}\xi_{12^1} + \psi_{3^1}\eta_{12^1} + \delta_{3^1}\nu_{12^1} & \varphi_{3^2}\xi_{12^1} + \psi_{3^2}\xi_{12^1} + \delta_{3^2}\nu_{12^1} \end{vmatrix},$$

$$(9.13)\quad \underset{2}{x_1} = \begin{vmatrix} \varphi_{3^2}\xi_{12} + \psi_{3^2}\eta_{12} + \delta_{3^2}\nu_{12} & \varphi_{3^3}\xi_{12} + \psi_{3^3}\eta_{12} + \delta_{3^3}\nu_{12} \\ \varphi_{3^2}\xi_{1^12} + \psi_{3^2}\eta_{1^12} + \delta_{3^2}\nu_{1^12} & \varphi_{3^3}\xi_{1^12} + \psi_{3^3}\eta_{1^12} + \delta_{3^3}\nu_{1^12} \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_2} = -\begin{vmatrix} \varphi_{3^1}\xi_{12} + \psi_{3^1}\eta_{12} + \delta_{3^1}\nu_{12} & \varphi_{3^3}\xi_{12} + \psi_{3^3}\eta_{12} + \delta_{3^3}\nu_{12} \\ \varphi_{3^1}\xi_{1^12} + \psi_{3^1}\eta_{1^12} + \delta_{3^1}\nu_{1^12} & \varphi_{3^3}\xi_{1^12} + \psi_{3^3}\eta_{1^12} + \delta_{3^3}\nu_{1^12} \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_3} = \begin{vmatrix} \varphi_{3^1}\xi_{12} + \psi_{3^1}\eta_{12} + \delta_{3^1}\nu_{12} & \varphi_{3^2}\xi_{12} + \psi_{3^2}\eta_{12} + \delta_{3^2}\nu_{12} \\ \varphi_{3^1}\xi_{1^12} + \psi_{3^1}\eta_{1^12} + \delta_{3^1}\nu_{1^12} & \varphi_{3^2}\xi_{1^12} + \psi_{3^2}\eta_{1^12} + \delta_{3^2}\nu_{1^12} \end{vmatrix},$$

$$(9.14)\quad \underset{3}{x_1} = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 & \delta_3 \\ \varphi_{3^2} & \psi_{3^2} & \delta_{3^2} \\ \varphi_{3^3} & \psi_{3^3} & \delta_{3^3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{1^12^1} & \eta_{1^12^1} & \nu_{1^12^1} \\ \xi_{1^22^2} & \eta_{1^22^2} & \nu_{1^22^2} \\ \xi_{1^32^3} & \eta_{1^32^3} & \nu_{1^32^3} \end{vmatrix},$$

$$\underset{3}{x_2} = -\begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 & \delta_3 \\ \varphi_{3^1} & \psi_{3^1} & \delta_{3^1} \\ \varphi_{3^3} & \psi_{3^3} & \delta_{3^3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{1^12^1} & \eta_{1^12^1} & \nu_{1^12^1} \\ \xi_{1^22^2} & \eta_{1^22^2} & \nu_{1^22^2} \\ \xi_{1^32^3} & \eta_{1^32^3} & \nu_{1^32^3} \end{vmatrix},$$

$$\underset{3}{x_3} = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 & \delta_3 \\ \varphi_{3^1} & \psi_{3^1} & \delta_{3^1} \\ \varphi_{3^2} & \psi_{3^2} & \delta_{3^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{1^12^1} & \eta_{1^12^1} & \nu_{1^12^1} \\ \xi_{1^22^2} & \eta_{1^22^2} & \nu_{1^22^2} \\ \xi_{1^32^3} & \eta_{1^32^3} & \nu_{1^32^3} \end{vmatrix}.$$

Для нас имеет решающее значение, в смысле универсальности бесквадратурного метода для анаморфозы функций и охвата особого случая $B \equiv 0$ (если $B \equiv 0$, то и $B' \equiv \bar{B} \equiv 0$, и обратно, если при произвольном $z_3$ — $B' \equiv \bar{B} \equiv 0$, то и $B \equiv 0$) то, что функция $\nu_{12}$, которую мы будем стремить к нулю, в формулах (9.14) входит лишь во вторые множители, одинаковые во всех трех однородных координатах, на которые мы, таким образом, можем до перехода к пределу сократить, и, следовательно, после перехода к пределу шкала переменной $z_3$ останется прежней. Однако, функция $\nu_{12}$ входит в координаты переменных $z_1$ и $z_2$ и недопустимо, чтобы в пределе все три координаты для $z_1$ или $z_2$ обратились в нули.

Заметив это, перепишем теперь формулы (9.12) — (9.14) в более наглядной форме. Для $\underset{1}{x_i}$ и $\underset{2}{x_i}$ мы введем символическую запись определителей, стоящих в правых частях (9.12), (9.13), в виде произведения прямоугольных матриц, не требующего особых разъяснений.

Получим

$$(9.12')\quad \underset{1}{x_1} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} & \nu_{12^1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^2} & \varphi_{3^3} \\ \psi_{3^2} & \psi_{3^3} \\ \delta_{3^2} & \delta_{3^3} \end{vmatrix},$$

$$\underset{1}{x_2} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} & \nu_{12^1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^3} & \varphi_{3^1} \\ \psi_{3^3} & \psi_{3^1} \\ \delta_{3^3} & \delta_{3^1} \end{vmatrix},$$

$$\underset{1}{x_3} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} & \nu_{12^1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \varphi_{3^2} \\ \psi_{3^1} & \psi_{3^2} \\ \delta_{3^1} & \delta_{3^2} \end{vmatrix},$$

$$(9.13') \qquad \underset{2}{x_1} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{1^12} & \eta_{1^12} & \nu_{1^12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^2} & \varphi_{3^3} \\ \psi_{3^2} & \psi_{3^3} \\ \delta_{3^2} & \delta_{3^3} \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_2} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{1^12} & \eta_{1^12} & \nu_{1^12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^3} & \varphi_{3^1} \\ \psi_{3^3} & \psi_{3^1} \\ \delta_{3^3} & \delta_{3^1} \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_3} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{1^12} & \eta_{1^12} & \nu_{1^12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \varphi_{3^2} \\ \psi_{3^1} & \psi_{3^2} \\ \delta_{3^1} & \delta_{3^2} \end{vmatrix},$$

$$(9.14') \qquad \underset{3}{x_1} = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 & \delta_3 \\ \varphi_{3^2} & \psi_{3^2} & \delta_{3^2} \\ \varphi_{3^3} & \psi_{3^3} & \delta_{3^3} \end{vmatrix}, \qquad \underset{3}{x_2} = \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \psi_{3^1} & \delta_{3^1} \\ \varphi_3 & \psi_3 & \delta_3 \\ \varphi_{3^3} & \psi_{3^3} & \delta_{3^3} \end{vmatrix},$$

$$\underset{3}{x_3} = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 & \delta_3 \\ \varphi_{3^1} & \psi_{3^1} & \delta_{3^1} \\ \varphi_{3^2} & \psi_{3^2} & \delta_{3^2} \end{vmatrix},$$

причем в выроженном случае $\delta_{3^1}$, $\delta_{3^2}$, $\delta_{3^3}$ — произвольные числа, а $\delta_3 = 0$.

Для составления выражений для однородных координат переменной $z_3$, очевидно, достаточно в определителе

$$(9.15) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \psi_{3^1} & \delta_{3^1} \\ \varphi_{3^2} & \psi_{3^2} & \delta_{3^2} \\ \varphi_{3^3} & \psi_{3^3} & \delta_{3^3} \end{vmatrix}$$

по очереди замещать первую, вторую, третью строки строкой $\varphi_3$, $\psi_3$, $\delta_3$. Можно, конечно, переставить в (9.14') и в (9.15) строки и столбцы.

Перепишем теперь формулы (9.12) и (9.13) в их предельном виде, когда $\nu_{12}$ стремится к нулю. Получим

$$(9.12'') \qquad \underset{1}{x_1} = \begin{vmatrix} \varphi_{3^2}\xi_{12} + \psi_{3^2}\eta_{12} & \varphi_{3^3}\xi_{12} + \psi_{3^3}\eta_{12} \\ \varphi_{3^2}\xi_{12^1} + \psi_{3^2}\eta_{12^1} & \varphi_{3^3}\xi_{12^1} + \psi_{3^3}\eta_{12^1} \end{vmatrix},$$

$$\underset{1}{x_2} = - \begin{vmatrix} \varphi_{3^1}\xi_{12} + \psi_{3^1}\eta_{12} & \varphi_{3^3}\xi_{12} + \psi_{3^3}\eta_{12} \\ \varphi_{3^1}\xi_{12^1} + \psi_{3^1}\eta_{12^1} & \varphi_{3^3}\xi_{12^1} + \psi_{3^3}\eta_{12^1} \end{vmatrix},$$

$$\underset{1}{x_3} = \begin{vmatrix} \varphi_{3^1}\xi_{12} + \psi_{3^1}\eta_{12} & \varphi_{3^2}\xi_{12} + \psi_{3^2}\eta_{12} \\ \varphi_{3^1}\xi_{12^1} + \psi_{3^1}\eta_{12^1} & \varphi_{3^2}\xi_{12^1} + \psi_{3^2}\eta_{12^1} \end{vmatrix},$$

$$(9.13'')\qquad \underset{2}{x_1} = \begin{vmatrix} \varphi_{3^2}\xi_{12} + \psi_{3^2}\eta_{12} & \varphi_{3^3}\xi_{12} + \psi_{3^3}\eta_{12} \\ \varphi_{3^2}\xi_{1^12} + \psi_{3^2}\eta_{1^12} & \varphi_{3^3}\xi_{1^12} + \psi_{3^3}\eta_{1^12} \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_2} = -\begin{vmatrix} \varphi_{3^1}\xi_{12} + \psi_{3^1}\eta_{12} & \varphi_{3^3}\xi_{12} + \psi_{3^3}\eta_{12} \\ \varphi_{3^1}\xi_{1^12} + \psi_{3^1}\eta_{1^12} & \varphi_{3^3}\xi_{1^12} + \psi_{3^3}\eta_{1^12} \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_3} = \begin{vmatrix} \varphi_{3^1}\xi_{12} + \psi_{3^1}\eta_{12} & \varphi_{3^2}\xi_{12} + \psi_{3^2}\eta_{12} \\ \varphi_{3^1}\xi_{1^12} + \psi_{3^1}\eta_{1^12} & \varphi_{3^2}\xi_{1^12} + \psi_{3^2}\eta_{1^12} \end{vmatrix},$$

Или, что то же самое, но в форме, аналогичной (9.12′) — (9.14′)

$$(9.12''')\qquad \underset{1}{x_1} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^2} & \varphi_{3^3} \\ \psi_{3^2} & \psi_{3^3} \end{vmatrix},$$

$$\underset{1}{x_2} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^3} & \varphi_{3^1} \\ \psi_{3^3} & \psi_{3^1} \end{vmatrix},$$

$$\underset{1}{x_3} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \varphi_{3^2} \\ \psi_{3^1} & \psi_{3^2} \end{vmatrix},$$

$$(9.13''')\qquad \underset{2}{x_1} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{1^12} & \eta_{1^12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^2} & \varphi_{3^3} \\ \psi_{3^2} & \psi_{3^3} \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_2} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{1^12} & \eta_{1^12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^3} & \varphi_{3^1} \\ \psi_{3^3} & \psi_{3^1} \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_3} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{1^12} & \eta_{1^12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \varphi_{3^2} \\ \psi_{3^1} & \psi_{3^2} \end{vmatrix}.$$

Сразу видно, что шкалы $z_1$ и $z_2$ вырождаются в одну точку и никакого представления Массо мы не получаем, т. к. определитель Массо превращается тождественно в нуль.

Формулы (9.12)—(9.14) равносильны формулам (9.12′)—(9.14′), хотя последние предпочтительнее для вычислений.

Эти формулы дают номограмму уравнения (8.8) при любых $\varphi_3$, $\psi_3$, $\delta_3$, $\xi_{12}$, $\eta_{12}$, $\nu_{12}$, если только выполнены условия (9.10), (9.11) и (9.9).

В случае же уравнения (9.5) эти формулы не заменяются на (9.12‴) (9.13‴) и (9.14′) по причине отмеченного выше вырождения.

Допустимость номограммы для (9.5) уже определяется не условиями (9.10), (9.11), (9.9), которые делаются тривиальными при замене $\nu_{12}$ или $\delta_3$ нулями, а возможностью определения такой неизвестной функции $\nu_{12}$, которая обращала бы одновременно в нули вторые множители левых частей равенств (9.10) и (9.11), поскольку обращение в нуль первого сомножителя означало бы линейную зависимость $\delta_3$ от $\varphi_3$ и $\psi_3$ и, следовательно, одновременно обращало бы в нуль все три однородные координаты $z_3$ согласно формулам (9.14′).

Мы приходим к необходимому и достаточному условию анаморфозы вырожденной функции (9.5) в форме разрешимости системы (9.18) (см. ниже) относительно неизвестной функции $\nu_{12}$ (и, казалось бы, возможности ее последующего стремления к нулю ($\nu_{12} = 0$ есть тривиальное решение), не нарушая в процессе стремления $\nu_{12}$ к нулю обеих равенств (9.10), (9.11) и неравенства (9.9), на которое, впрочем, можно не обращать внимания, поскольку формулы для расчета номограмм (9.12‴), (9.13‴) и (9.14′) тогда бы утратили смысл, не определяя номограмму (принцип игнорирования критериев). Мы увидим, однако, что это нельзя делать (стремить $\nu_{12}$ к нулю)).

Точно также мы бы выяснили неправильность стремления к нулю $\delta_3$. Из изложенного, основанного на анализе пределов $x_1$, $x_2$, $x_3$ ($i = 1, 2$) при $\delta_3\nu_{12} \to 0$, вытекает непригодность предельных формул (9.12), (9.13) и (9.14′) и качественно иное решение задачи анаморфозы вырожденного случая (9.5), основанное на том, что мы не требуем ничего, кроме однозначности функций.

Мы фиксируем некоторую систему значений $z_3^1$, $z_3^2$, $z_3^3$, не находящихся в области изменения переменной $z_3$.

Этим значениям ставим в соответствие девять произвольных чисел матрицы

$$(9.16) \qquad \begin{Vmatrix} \varphi_{3^1} & \psi_{3^1} & \delta_{3^1} \\ \varphi_{3^2} & \psi_{3^2} & \delta_{3^2} \\ \varphi_{3^2} & \psi_{3^3} & \delta_{3^3} \end{Vmatrix}$$

так, чтобы ранг этой матрицы был равен нулю (см. (9.9)) и, следовательно не все значения $\delta_3$ равны нулю.

Полагаем теперь

$$(9.17) \qquad \delta_3 \equiv \begin{cases} 0, & \text{если} \quad z_3 \neq z_3^1, z_3^2, z_3^3, \\ \delta_{3^1}, & \text{если} \quad z_3 = z_3^1, \\ \delta_{3^2}, & \text{если} \quad z_3 = z_3^2, \\ \delta_{3^3}, & \text{если} \quad z_3 = z_3^3. \end{cases}$$

*Даже при любом выборе функции* $\nu_{12}$ *теперь обеспечено превращение вырожденного уравнения* (9.5) *в невырожденное уравнение* (9.8)! Однако, мы обязаны брать лишь такие функции $\nu_{12}$, которые гарантируют выполнение условий (9.10), (9.11) при выполнении неравенства (9.9).

Следовательно, должны обращаться в нуль вторые множители равенств (9.10) и (9.11).

Таким образом в случае (9.5) приходим к неполной системе типа Аппеля (см. стр. 147 работы [15]) следующих „дифференциальных" уравнений:

$$
(9.18)\quad \underset{(1)}{\tilde{A}} \equiv \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} & \nu_{12^1} \\ \xi_{12^2} & \eta_{12^2} & \nu_{12^2} \end{vmatrix} = 0, \qquad \underset{(2)}{\tilde{A}} \equiv \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \nu_{12} \\ \xi_{1^12} & \eta_{1^12} & \nu_{1^12} \\ \xi_{1^22} & \eta_{1^22} & \nu_{1^22} \end{vmatrix} = 0
$$

с неизвестной функцией $\nu_{12}$ двух переменных, которая система легко разрешается, *если задача имеет решение.*

Если разложить уравнения (9.18) по элементам последних рядов, то получим

$$
(9.19)\qquad \nu_{12^2} = a\nu_{12} + b\nu_{12^1}, \quad \nu_{1^22} = c\nu_{12} + d\nu_{1^12}.
$$

Можно толковать эту задачу и на языке обычного дифференцирования, когда задача приводится к системе уравнений в полных дифференциалах, рассмотренной автором на страницах 145—148 работы [15].

Можно спросить, что означает ограничение (1.15) или (5.105) на стр. 149 работы [15] при обычном дифференциальном толковании производных.

Здесль мало что можно добавить к той геометрической картине, которую мы выше дали в терминах бесквадратурной номографии, истолковывая равенства (9.1) и первые два равенства (8.5).

Первые два равенства (8.5) попрежнему означают, что координатные линии на поверхности, определяемой радиусом-вектором $\bar{b}$, лежат в плоскостях, проходящих через начало.

Нарушение одного третьего неравенства (8.5) означало бы, что поверхность радиуса вектора $\bar{b}$ есть конус, а все три вместе означали бы, что имеем плоскости, проходящие через начало для каждого $z$.

Билинейного характера функции опять удовлетворяют уравнению (9.3). Однако, на этом аналогии кончаются и ясно выступают преимущества бесквадратурного метода, как только пытаемся выяснить вид $F$.

Для нас удобнее рассматривать систему (9.19) в форме

$$
(9.20)\qquad \nu_{12} = \alpha\nu_{1^12} + \beta\nu_{1^22}, \quad \nu_{12} = \gamma\nu_{12^1} + \delta\nu_{12^2}.
$$

Отсюда

$$
(9.21)\qquad \begin{aligned}
\nu_{1^12} &= \alpha_{1^12}\,\nu_{1^12} + \beta_{1^12}\,\nu_{1^22}, & \nu_{1^12} &= \gamma_{1^12}\,\nu_{1^12^1} + \delta_{1^12}\,\nu_{1^12^2},\\
\nu_{12^1} &= \alpha_{12^1}\,\nu_{1^12^1} + \beta_{12^1}\,\nu_{1^22^1}, & \nu_{12^1} &= \gamma_{12^1}\,\nu_{12^1} + \delta_{12^1}\,\nu_{12^2},\\
\nu_{1^12^1} &= \alpha_{1^12^1}\,\nu_{1^12^1} + \beta_{1^12^1}\,\nu_{1^22^1}, & \nu_{1^12^1} &= \gamma_{1^12^1}\,\nu_{1^12^1} + \delta_{1^12^1}\,\nu_{1^12^2}.
\end{aligned}
$$

Из 8 уравнений (9.20), (9.21) надо найти

$$
\nu_{1^12},\ \nu_{12^1},\ \nu_{1^12^1},\ \nu_{1^22},\ \nu_{12^2},\ \nu_{12}.
$$

Из ($9.21_2$) находим

$$
(9.22)\qquad \nu_{1^12} = \gamma_{1^12}\nu_{1^12^1} + \delta_{1^12}\nu_{1^12^2}.
$$

Из (9.21$_3$) находим

$$\nu_{12^1} = \alpha_{12^1}\nu_{1^1 2^1} + \beta_{12^1}\nu_{1^2 2^1}. \tag{9.23}$$

С помощью (9.22) из (9.21$_1$) и с помощью (9.23) из (9.21$_4$) найдем

$$\nu_{1^2 2} = (\gamma_{1^1 2}\nu_{1^1 2^1} + \delta_{1^1 2}\nu_{1^1 2^2})\,\frac{1 - \alpha_{1^1 2}}{\beta_{1^1 2}}, \tag{9.24}$$

$$\nu_{12^2} = (\alpha_{12^1}\nu_{1^1 2^1} + \beta_{12^1}\nu_{1^2 2^1})\,\frac{1 - \gamma_{12^1}}{\delta_{12^1}}. \tag{9.25}$$

Из (9.21$_5$) и (9.21$_6$) находим

$$\nu_{1^2 2^1} = \nu_{1^1 2^1}\,\frac{1 - \alpha_{1^1 2^1}}{\beta_{1^1 2^1}}, \tag{9.26}$$

$$\nu_{1^1 2^2} = \nu_{1^1 2^1}\,\frac{1 - \gamma_{1^1 2^1}}{\delta_{1^1 2^1}}. \tag{9.27}$$

С помощью (9.26) и (9.27) уравнения (9.22) и (9.23) примут вид

$$\nu_{1^1 2} = \gamma_{1^1 2}\nu_{1^1 2^1} + \delta_{1^1 2}\,\frac{1 - \gamma_{1^1 2^1}}{\delta_{1^1 2^1}}\,\nu_{1^1 2^1} = \frac{\gamma_{1^1 2}\delta_{1^1 2^1} + \delta_{1^1 2} - \delta_{1^1 2}\gamma_{1^1 2^1}}{\delta_{1^1 2^1}}\,\nu_{1^1 2^1} \tag{9.28}$$

$$\nu_{12^1} = \alpha_{12^1}\nu_{1^1 2^1} + \beta_{12^1}\,\frac{1 - \alpha_{1^1 2^1}}{\beta_{1^1 2^1}}\,\nu_{1^1 2^1} = \frac{\alpha_{12^1}\beta_{1^1 2^1} + \beta_{12^1} - \alpha_{1^1 2^1}\beta_{12^1}}{\beta_{1^1 2^1}}\,\nu_{1^1 2^1}. \tag{9.29}$$

Находим с помощью (9.26) и (9.27), что

$$\gamma_{1^1 2}\nu_{1^1 2^1} + \delta_{1^1 2}\nu_{1^1 2^2} = \gamma_{1^1 2}\nu_{1^1 2^1} + \delta_{1^1 2}\,\frac{1 - \gamma_{1^1 2^1}}{\delta_{1^1 2^1}}\,\nu_{1^1 2^1} = \frac{\gamma_{1^1 2}\delta_{1^1 2^1} + \delta_{1^1 2} - \gamma_{1^1 2^1}\delta_{1^1 2}}{\delta_{1^1 2^1}}\,\nu_{1^1 2^1}, \tag{9.30}$$

$$\alpha_{12^1}\nu_{1^1 2^1} + \beta_{12^1}\nu_{1^2 2^1} = \alpha_{12^1}\nu_{1^1 2^1} + \beta_{12^1}\,\frac{1 - \alpha_{1^1 2^1}}{\beta_{1^1 2^1}}\,\nu_{1^1 2^1} = \frac{\alpha_{12^1}\beta_{1^1 2^1} + \beta_{12^1} - \alpha_{1^1 2^1}\beta_{12^1}}{\beta_{1^1 2^1}}\,\nu_{1^1 2^1}. \tag{9.31}$$

После этого с помощью (9.24) и (9.25) находим

$$\nu_{1^2 1} = \frac{(1 - \alpha_{1^1 2})\,(\gamma_{1^1 2}\delta_{1^1 2^1} + \delta_{1^1 2} - \gamma_{1^1 2^1}\delta_{1^1 2})}{\beta_{1^1 2}\delta_{1^1 2^1}}\,\nu_{1^1 2^1}, \tag{9.32}$$

$$(9.33) \qquad \nu_{12^2} = \frac{(1 - \gamma_{12^1})(\alpha_{12^1}\beta_{1^12^1} + \beta_{12^1} - \alpha_{1^12^1}\beta_{12^1})}{\beta_{1^12^1}\delta_{12^1}}\nu_{1^12^1}.$$

С помощью формул (9.28), (9.32) и (9.29), (9.33) завершаем согласно (9.20) определение неизвестной функции $\nu_{12}$, причем оба результата должны быть тождественны, что и дает условие ,,интегрируемости системы (9.20). Получаем

$$(9.34') \qquad \nu_{12} = \left[\alpha\frac{\gamma_{1^12}\delta_{1^12^1} + \delta_{1^12} - \delta_{1^12}\gamma_{1^12^1}}{\delta_{1^12^1}} + \right.$$

$$\left. + \beta\frac{(1 - \alpha_{1^12})(\gamma_{1^12}\delta_{1^12^1} + \delta_{1^12} - \gamma_{1^12^1}\delta_{1^12})}{\beta_{1^12}\delta_{1^12^1}}\right]\nu_{1^12^1}$$

или

$$(9.34) \qquad \nu_{12} = \frac{(\gamma_{1^12}\delta_{1^12^1} + \delta_{1^12} - \delta_{1^12}\gamma_{1^12^1})(\alpha\beta_{1^12} + \beta - \beta\alpha_{1^12})}{\beta_{1^12}\delta_{1^12^1}}\nu_{1^12^1},$$

$$(9.35') \qquad \nu_{12} = \left[\gamma\frac{\alpha_{12^1}\beta_{1^12^1} + \beta_{12^1} - \alpha_{1^12^1}\beta_{12^1}}{\beta_{1^12^1}} + \right.$$

$$\left. + \delta\frac{(1 - \gamma_{12^1})(\alpha_{12^1}\beta_{1^12^1} + \beta_{12^1} - \alpha_{1^12^1}\beta_{12^1})}{\beta_{1^12^1}\delta_{12^1}}\right]\nu_{1^12^1}$$

или

$$(9.35) \qquad \nu_{12} = \frac{(\alpha_{12^1}\beta_{1^12^1} + \beta_{12^1} - \alpha_{1^12^1}\beta_{12^1})(\gamma\delta_{12^1} + \delta - \delta\gamma_{12^1})}{\beta_{1^12^1}\delta_{12^1}}\nu_{1^12^1}.$$

Мы ,,проинтегрировали'' систему (9.20) в общем виде, не предполагая, что имеем специфическую систему (9.18), когда

$$(9.36) \qquad \alpha \equiv -\frac{\underset{(2)}{\tilde{A}}_{23}}{\underset{(2)}{\tilde{A}}_{13}} \equiv \frac{\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{1^22} & \eta_{1^22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_{1^12} & \eta_{1^12} \\ \xi_{1^22} & \eta_{1^22} \end{vmatrix}}, \quad \beta \equiv -\frac{\underset{(2)}{\tilde{A}}_{23}}{\underset{(2)}{\tilde{A}}_{13}} \equiv -\frac{\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{1^12} & \eta_{1^12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_{1^12} & \eta_{1^12} \\ \xi_{1^22} & \eta_{12^2} \end{vmatrix}},$$

$$\gamma \equiv -\frac{\underset{(1)}{\tilde{A}}_{23}}{\underset{(1)}{\tilde{A}}_{13}} \equiv \frac{\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_{12^1} & \eta_{12^1} \\ \xi_{12^2} & \eta_{12^2} \end{vmatrix}}, \quad \delta \equiv \frac{\underset{(1)}{\tilde{A}}_{23}}{\underset{(1)}{\tilde{A}}_{13}} \equiv -\frac{\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} \\ \xi_{12^1} & \eta_{12^1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_{12^1} & \eta_{12^1} \\ \xi_{12^2} & \eta_{12^2} \end{vmatrix}},$$

предполагая, что

$$(9.37) \qquad \underset{(2)}{\tilde{A}}_{13} \neq 0, \quad \underset{(1)}{\tilde{A}}_{13} \neq 0.$$

Нарушение хотя бы одного из этих условий означало бы, очевидно, что $\xi_{12}$ и $\eta_{12}$ пропорциональны функциям одной из переменных $z_1$ или $z_2$, когда уравнение (9.5) лишено интереса.

Вернемся к общему случаю (9.20). Если условие ,,интегрируемости системы (9.20) выполнено тождественно по $z_1$, $z_2$, $z_{1^1}$, $z_{2^1}$, то можно зафиксировать любые значения.

Уравнения номограммы (9.12), (9.13), (9.14) дадут номограмму уравнения (9.5).

Выпишем необходимое условие разрешимости (,,полной инегрируемости'') системы (9.20). С помощью (9.34) и (9.35) находим

$$(9.38)\qquad \frac{(\gamma_{1^12}\delta_{1^12^1} + \delta_{1^12} - \delta_{1^12}\gamma_{1^12^1})\,(\alpha\beta_{1^12} + \beta - \beta\alpha_{1^12})}{\delta_{1^12^1}\beta_{1^12}}\,\nu_{1^12^1} \equiv$$

$$\equiv \frac{(\gamma\delta_{12^1} + \delta - \delta\gamma_{12^1})\,(\alpha_{12^1}\beta_{1^12^1} + \beta_{12^1} - \alpha_{1^12^1}\beta_{12^1})}{\delta_{12^1}\beta_{1^12^1}}\,\nu_{1^12^1} \equiv \nu_{12}.$$

При условии (9.38) оба выражения для названной функции совпадают. Поэтому, предполагая условие (9.38) выполненным, можем, в зависимости от того, что более удобно, пользоваться то выражением (9.34), то выражением (9.35) для неизвестной функции $\nu_{12}$.

Имея это в виду, ,,дифференцируя'' $\nu_{12}$, легко убедиться, что определенная равенствами (9.34) и (9.35) функция $\nu_{12}$ удовлетворяет уравнениям (9.28) и (9.29). Но уравнениям (9.32) и (9.33), как показывает двукратное дифференцирование функции $\nu_{12}$, т. е. образование $\nu_{1^22}$ и $\nu_{12^2}$, она, вообще говоря, не удовлетворяет.

Это приводит дополнительно к (9.38) еще к двум условиям

$$(9.38')\qquad \alpha_{1^22}\beta_{1^12} + \beta_{1^22} - \beta_{1^22}\alpha_{1^12} \equiv 1 - \alpha_{1^12},$$

$$(9.38'')\qquad \gamma_{12^2}\delta_{12^1} + \delta_{12^2} - \delta_{12^2}\gamma_{12^1} \equiv 1 - \gamma_{12^1}$$

или соответственно

$$(9.\overline{38}')\qquad \alpha_{1^22}\beta_{1^12} \equiv (1 - \alpha_{1^12})\,(1 - \beta_{1^22}),$$

$$(9.\overline{38}'')\qquad \gamma_{12^2}\delta_{12^1} \equiv (1 - \gamma_{12^1})\,(1 - \delta_{12^2}).$$

Необходимость двух условий (9.38) для полной интегрируемости (9.20) доказана.

Докажем их достаточность.

Возьмем функцию $\nu_{12}$ в форме (9.34) и прямой подстановкой убедимся, что она удовлетворяет первому уравнению (9.20).

Вычисляя ,,производные'' $\nu_{1^12}$ и $\nu_{1^22}$ и подставляя в правую чатсь ($9.20_1$), получим после очевидных упрощений

$$\alpha\nu_{1^12} + \beta\nu_{1^22} \equiv (\gamma_{1^12}\delta_{1^12^1} + \delta_{1^12} - \delta_{1^12}\gamma_{1^12^1})\,(\alpha\beta_{1^12} +$$

$$+ \beta\alpha_{1^22}\beta_{1^12} + \beta\beta_{1^22} - \beta\beta_{1^22}\alpha_{1^12})\,\frac{\nu_{1^12^1}}{\beta_{1^12}\delta_{1^12^1}} \equiv (\gamma_{1^12}\delta_{1^12^1} + \delta_{1^12} - \delta_{1^12}\gamma_{1^12^1})\,[\alpha\beta_{1^12} +$$

$$+ \beta(\alpha_{1^22}\beta_{1^12} + \beta_{1^22} - \beta_{1^22}\alpha_{1^12})]\,\frac{\nu_{1^12^1}}{\beta_{1^12}\delta_{1^12^1}}.$$

Упрощая квадратную скобку при помощи условия (9.38′), получим

$$\alpha\nu_{1^12} + \beta\nu_{1^22} \equiv \frac{(\gamma_{1^12}\delta_{1^12^1} + \delta_{1^12} - \delta_{1^12}\gamma_{1^12^1})\,(\alpha\beta_{1^12} + \beta - \beta\alpha_{1^12})}{\beta_{1^12}\delta_{1^12^1}}\cdot\nu_{1^12^1} \equiv \nu_{12},$$

в силу равенства (9.34).

Вычисляя „производные" $\nu_{12^1}$ и $\nu_{12^2}$, используя, однако, выражение (9.35) для функции $\nu_{12}$, получим

$$\gamma\nu_{12^1} + \delta\nu_{12^2} \equiv (\alpha_{12^1}\beta_{1^12^1} + \beta_{12^1} - \alpha_{1^12^1}\beta_{12^1})\,[\gamma\delta_{12^1} + \delta(\gamma_{12^2}\delta_{12^1} + \delta_{12^2} -$$

$$- \delta_{12^2}\gamma_{12^1})]\,\frac{\nu_{1^12^1}}{\beta_{1^12^1}\delta_{12^1}} \equiv \frac{(\alpha_{12^1}\beta_{1^12^1} + \beta_{12^1} - \alpha_{1^12^1}\beta_{12^1})\,(\gamma\delta_{12^1} + \delta - \delta\gamma_{12^1})}{\beta_{1^12^1}\delta_{12^1}}\,\nu_{1^12^1}$$

что согласно равенству (9.35) совпадает с $\nu_{12}$.

При упрощении квадратной скобки мы использовали условие „интегрируемости" (9.38″).

Итак, наша теорема полностью доказана.

Заметим еще, что для полной „интегрируемости" системы (9.20) достаточно, чтобы условия (9.38) имели место при некоторых фиксированных $z_1^1, z_1^2, z_2^1, z_2^2$. Но тогда интегрируема система (9.20). Но тогда, в свою очередь, опять будут иметь место все условия (9.38) при любом интегрировании. Поэтому эти условия должны иметь место тождественно по всем аргументам, хотя для проверки условий достаточно фиксировать какие-нибудь определенные „дифференцирования".

Если условие (9.38) не выполнено, то вырожденная функция (9.5) не будет анаморфозируемой.

Но возможно, что по формулам (9.34), (9.35) получаются тривиальные нулевые решения или формулы делаются неприменимыми.

В первом случае уравнение неанаморфозируемо.

В связи со второй возможностью сделаем несколько замечаний. Для практического применения условий „интегрируемости" (9.38) полезно отметить, что второе выражение для $\nu_{12}$ в (9.38) получается из первого так: снижается на единицу показатель условной степени при индексе 1 в первом множителе и увеличивается на единицу показатель условной степени при индексе 2 во втором множителе.

Отсюда следует, что если первый множитель вовсе не зависит от $z_1$, а второй от $z_2$, то условие интегрируемости (9.38) заведомо выполняется.

Мы сейчас увидим пример применения этого полезного для избавления от вычислений правила.

Но, прежде всего, мы сделаем еще два простых, но важных замечания по поводу условного дифференцирования.

Мы уже знаем, что это довольно неопределенная операция. Пусть имеем выражение

$$\text{(A)} \qquad \Phi_{z_i^k}\,(z_i, z_i^1, z_i^2, \ldots).$$

Мы можем понимать эту „производную" и как

$$\text{(I)} \qquad \Phi\,(z_i^k, z_i^1, z_i^2, \ldots),$$

т. е. без изменения индексов при $z_i^s$, $s = 1, 2, \ldots$, и как

$$\text{(II)} \qquad \Phi\,(z_i^k, z_i^{k+1}, z_i^{k+2}, \ldots)$$

т. е. с изменением всех индексов при $z_i^s$, или даже еще более произвольным образом (изменение одних верхних индексов и оставление без изменения других).

Этот произвол ограничен лишь некоторыми неравенствами, в условиях наличия которых выбор „*дифференцирования" произволен.*

Сейчас мы приведем пример, когда при толковании (I) условия (9.38) теряют смысл и не дают ответа, а при толковании (II) получаем положительное решение.

Из упомянутого принципа относительно произвольного толкования условного дифференцирования вытекает не менее важный принцип замены *в окончательных формулах* значений функций от аргументов $z_i^k$, $z_i^l$, $\ldots$, все показатели которых $k$, $l$, $\ldots$, *положительны* ($z_i^0$ мы считаем равным $z_i$ т. е. самой переменной $z_i$) (или даже комбинаций таких значений) - произвольными постоянными $C_1$, $C_2$, $\ldots$ или $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $g$, $\ldots$, как у нас ниже.

Так, если в *результативной* формуле присутствует, скажем, $f_{1^1 2^1 3^1}$ но сами аргументы $z_1^1$, $z_2^2$, $z_3^1$ в нее не входят, то можем заменить $f_{1^1 2^2 3^1}$ на произвольную постоянную $C$ и т. д., и даже любые функциональные комбинации от таких аргументов, лишь бы только не нарушались ограничения решения задачи.

Так, поскольку речь идет, скажем, о решении проблемы анаморфозы функций (теорема 3 работы [6]), таким ограничением является неравенство $\underset{3}{A}{}_{11}^{z_3} \neq 0$ или, что равносильно, $\underset{3}{A}{}_{33}^{z_3} \not\equiv 0$.

А. Н. Колмогорову принадлежит методологически важное своей явной формой уточнение этой теоремы, сделанное при представлении в ДАН статьи автора [6] в 1952/53 году, заключающееся в том, что „*Если задача* ($S$) *разрешима, то условия* (4) *и* (5) *выполняются при любых* $z_i^k$, *для которых* $A^{z_s}_{s\,11} \neq 0$ .

Отсюда следует, что, если при одном выборе „дифференцирования" (плохом) формулы, скажем, (9.38) делаются неприменимыми (обращение в бесконечность или неопределенность обеих частей условия „интегрируемости" (9.38)), то надо взять другое „дифференцирование".

Рассмотрим теперь пример

$$F \equiv f_1 + f_2 + h_3 = 0. \tag{9.39}$$

Сравнивая (9.5) и (9.39), получим

$$\xi_{12} = f_1 + f_2, \quad \eta_{12} = 1, \quad \varphi_3 = 1, \quad \psi_3 = h_3. \tag{9.40}$$

С помощью (9.35) и (9.36) найдем

$$\alpha = \begin{vmatrix} f_1 + f_2 & 1 \\ f_{1^2} + f_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_{1^1} + f_2 & 1 \\ f_{1^2} + f_2 & 1 \end{vmatrix} = (f_1 - f_{1^2}) : (f_{1^1} - f_{1^2}), \tag{9.41}$$

$$\beta = -\begin{vmatrix} f_1 + f_2 & 1 \\ f_{1^1} + f_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_{1^1} + f_2 & 1 \\ f_{1^2} + f_2 & 1 \end{vmatrix} = -(f_1 - f_{1^1}) : (f_{1^1} - f_{1^2}),$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} f_1 + f_2 & 1 \\ f_1 + f_{2^2} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1 + f_{2^1} & 1 \\ f_1 + f_{2^2} & 1 \end{vmatrix} = (f_2 - f_{2^2}) : (f_{2^1} - f_{2^2}),$$

$$\delta = -\begin{vmatrix} f_1 + f_2 & 1 \\ f_1 + f_{2^1} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1 + f_{2^1} & 1 \\ f_1 + f_{2^2} & 1 \end{vmatrix} = -(f_2 - f_{2^1}) : (f_{2^1} - f_{2^2}).$$

Легко убедиться, что формулы (9.34), (9.35) делаются неприменимыми при толковании производных в смысле (I), между тем как система (9.20) сохраняет смысл при $\xi_{12}$, $\eta_{12}$, $\psi_3$, определяемых формулами (9.40).

Ясно, что непригодность формул (9.34), (9.35) произошла из-за того, что делаются непригодными уже уравнения (9.21) при выбранном нами толковании „производных" (II).

В таких случаях надо решать систему (9.20) при других „дифференцированиях", но идейно, т. е. в принципе, тем же методом, как это сделано нами при решении системы (9.20), или же решать ее в каждом конкретном случае.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Вильнер И. А., *Бесквадратурное представление в виде определителя Массо в многомерном пространстве недифференцируемых и дифференцируемых функций многих переменных в инвариантной форме*, Сборник статей ВЗПИ, вып. 9 (1955), 84—115.

[2] Вильнер И. А., *Об одной номографической задаче*, Номографический сборник МГУ (1951), 253—258.

[3] Вильнер И. А., *О линейной зависимости функций и методе условных производных в бесквадратурной номографии*, Сборник статей ВЗПИ, № 7 (1954), 105—128.(3)

[4] Вильнер И. А., *Стереоскопическая номография и решение проблем общей анаморфозы в N-мерном пространстве*, УМН, т. *11*, вып. 4 (70) (1956), 123—130.

[5] Вильнер И. А., *О соотношениях между минорами одной или двух матриц*, УМН т. *9*, вып. 5 (57) (1953), 139—146.

[6] Вильнер И. А., *Алгебраическое решение проблемы анаморфозы функций в инвариантной форме*, ДАН, т. *90*, № 1 (1953), 5—8.

[7] Вильнер И. А., *Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебраизация и стереоскопическая номография*, Сборник статей ВЗПИ, вып. 21 (1958), § 2, 110—112.

[8] Вильнер И. А., *Решение проблемы анаморфозы функций в $(N-1)$-мерном пространстве векторно-алгебраическими методами*, УМН, т. *8*, в. 3 (55), 1953, 153—156.

[9] Вильнер И. А., *Номограммы систем уравнений и аналитических функций*, ДАН, т. *59*, № 5 (1947), 729—732.

[10] Дубнов Я. С., *Основы векторного исчисления*, т. *1*. ГИТТЛ, Москва 1950,

[11] Швердт Г., *Номография на основе геометрии отображения*, изд. ОНТИ НКТП Украины, Харьков, Киев (1935).

[12] Вильнер И. А., *Стереоскопическая номография и пространственная анаморфоза с наперед заданной шкалой*, Укр. матем. ж. (1957), 121—133.

[13] Вильнер И. А., *Проблема номографической интерпретации функций комплексного переменного и задачи Коши*, Сборник исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного Физматгиз, Москва 1960, 371—401.

[14] Vilner I. A., *Neelementární nomogramy rovnic třetího nomografického řádu a jejich automorfní transformace*, Nomografické metody, Nakl. Čsl. akademie věd, Praha, 1962, 37—85.

[15] Вильнер И. А., *Номографирование систем уравнений и аналитических функций*, Номографический сборник МГУ (1951), 125—242.

[16] Boulad F., *Sur la disjonction de variables des équations nomographiquement rationneless d'ordre supérieur*, Comptes-Rendus, 1er sem. 1910, 379.

[17] Boulad F., *Application de la notien de valeurs critiques à la disjonction de variables dans les équations d'ordre nomographique supérieur*, Bulletin de la Sociéte mathématique de France, 1911, 105.

[18] Duporeq, Comptes-Rendus, *127* (1898), 265.

[19] Вильнер И. А., *Бесквадратурное номографирование обобщенной функции К. Я. Залтса*, Ученые записки Латв. Гос. университета, т. *28*, в. 4, 1959, 131—139. (Рига.) (4)

[20] Вильнер И. А., *Номограмма для определения избытка воздуха при неполном сгорании топлива*, Топливоэнергетика, № 2 (1960), 88—89.

---

(3) В этой работе много опечаток.

(4) Настоящая работа, находившаяся в редакции Укр. Мат. Журнала в ожидании опубликования с 1955 г. была по указанию гл. редактора Укр. Мат. ж-ла, проф. Б. В. Гнеденко с согласия автора передана Латвийскому университэту в связи с отмечавшейся датой смерти К. Я. Залтса.

[21] Вильнер И. А., *Бесквадратурная номография и номографирование в комплексных проективных плоскостях*, Труды четвертого Всесоюзного Математического Съезда изд. „Наука„, Ленинград (1964), 186—194.
[22] Вильнер И. А., Галайда П., *Номограмма для определения избытка воздуха при неполном сгорании топлива*, Теплоэнергетика № 5, Москва 1966.
[23] Невский Б. А., *Методика построения номограмм*, ОНТИ-НКТП СССР, Москва 1936.
[24] Залтс К. Я., *О бесквадратурном номографировании функций* $F_1K_{23} + F_2L_{31} + F_3M_{12}$, Матем. сб. *33* (75): 2 (1953), 385—388.
[25] Боголюбов Ю. И., *О номографировании уравнений и систем уравнений*, Диссертация, защищенная в МОПИ 11 июня 1965 г.
Вильнер И. А., *Отзыв о диссертации Боголюбова Ю. И. „О номографировании уравнений и систем уравнений.* .

Поступило 10. 10. 1963.

*Катедра математики*
*Всесоюзного заочного инженерно-строительного института,*
*Москва, СССР*