Matematický časopis

Jindřich Kerndl

Соответсвия между комплексами прямых в трехмерном аффинном пространстве

Matematický časopis, Vol. 25 (1975), No. 2, 145--157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126944

Mat. Čas. 25, 1975, No 2, 145—157

СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ КОМПЛЕКСАМИ ПРЯМЫХ В ТРЕХМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЙИНДРЖИХ КЕРНДЛ (JINDŘICH KERNDL)

При изучении статьи [5] автор учитывал факт, что в то время как теория конгруэнций прямых в нашей литературе в значительной мере разработана (см. напр. [6]), геометрия комплексов прямых не находится — в отличие от советских геометров (см. напр. [1], [7], [8], [9], [10]) — в центре внимания. При этом показываются напр. возможности изучения соответствий между комплексами в аффинной геометрии, как вытекает из настоящей работы.

1. Основные понятия

Пусть в трехмерном аффинном пространстве A_3 дан комплекс K прямых $p = p(u, v, w)$ (в общем случае параметры u, v, w — комплексные). Сопоставим каждому лучу $p \in K$ сопровождающий репер, состоящий из точки A и линейно независимых векторов I_1, I_2, I_3 таких, что $p = [AI_1]$.

Дифференциалы $\mathrm{d}A$, $\mathrm{d}I_k$ выражаются уравнениями

$$\mathrm{d}A = \omega^j I_j, \quad \mathrm{d}I_k = \omega_k^j I_j; \quad j, k = 1, 2, 3 \tag{1,1}$$

Пусть

$$[I_1 I_2 I_3] = 1. \tag{1,2}$$

Отсюда вытекает, что

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 \tag{1,3}$$

Далее, в уравнениях (1,1) выступающие формы Пфаффа подчинены уравнениям структуры аффинного пространства:

$$\mathrm{d}\omega^j = \omega^k \wedge \omega_k^j, \quad \mathrm{d}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{1,4}$$

Теперь

$$\mathrm{d}p = \omega_1^1[AI_1] + \omega_1^2[AI_2] + \omega_1^3[AI_3] + \omega^2[I_2 I_1] + \omega^3[I_3 I_1],$$

где формы ω_1^2, ω_1^3, ω^2, ω^3 — главные и между ними существует линейное соотношение.

Выбирая ω_1^2, ω_1^3, ω^3 за базисные формы комплекса, мы находим, (благодаря специализации реперов), что

$$\omega^2 = \omega_1^3. \tag{1,5}$$

Здесь исключены специальные комплексы, характеризованные уравнением $\omega^2 = 0$.

Далее выполнены равенства

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_1^2 &= \omega_1^2 \wedge (\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 \\ \mathrm{d}\omega_1^3 &= -\omega_1^3 \wedge (\omega_3^3 - \omega_1^1) + \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ \mathrm{d}\omega^3 &= \omega_1^3 \wedge (\omega_2^3 - \omega^1) + \omega^3 \wedge \omega_3^3. \end{aligned} \tag{1,6}$$

Дифференцируя уравнение (1,5) внешним образом и принимая во внимание (1,4), (1,6), получим

$$\omega_1^2 \wedge (\omega^1 + \omega_2^3) + \omega_1^3 \wedge (2\omega_3^3) - \omega^3 \wedge \omega_3^2 = 0 \tag{1,7}$$

Из уравнений (1,5), (1,7) мы выводим, что рассматриваемые комплексы существуют с производом одной функции трех аргументов.

Будем предполагать, что комплекс K в трехмерном проективном пространстве P_3, возникшем из A_3 при помощи его проективного продолжения. Всякий вектор из A_3 является несобственной точкой из P_3. Эти точки создают несобственное пространство N_2 аффинного пространства A_3. Без опасения недоразумения можно говорить о точках I_1, I_2 и т. д., принимая во внимание несобственные точки, определенные упомянутыми векторами.

Рассмотрим луч $p = [AI_1]$ комплекса K.

Пусть

$$M = A + tI_1, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1,8}$$

точка этого луча. Если точка M остается неподвижной, то

$$\mathrm{d}M = 0;$$

отсюда следует, что

$$\omega^1 + \omega_1^1 t + \mathrm{d}t = 0, \quad \omega^2 + t\omega_1^2 = 0, \quad \omega^3 + t\omega_1^3 = 0. \tag{1,9}$$

Эти уравнения определяют *конус лучей комплекса K в точке M*. Касательной плоскостью к этому конусу вдоль p является

$$\tau_M = [AI_1\,\mathrm{d}A], \quad t \neq 0$$

или, принимая во внимание (1,1), (1,5), (1,9),

$$\tau_M = [AI_1I_2 - tI_3] \tag{1,10}$$

Случай $t = 0$ влечет $M \equiv A$ и уравнения (1,9) примут вид

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0\,, \tag{1,11}$$

а соответствующая касательная плоскость

$$\tau_A = [AI_1\,\mathrm{d}I_1] = [AI_1I_2]. \tag{1,12}$$

Это значит, что в нормальной корреляции (см. [1], стр. 9) точке A соответствует — благодаря специализации (1,5) — плоскость $\tau_A = [AI_1I_2]$. Для $t \to \infty$ точка M — бесконечно удаленная, и конус вырождается в цилиндр. Касательной плоскостью к этому цилиндру вдоль луча p, является, опять благодаря специализации (1,5),

$$\tau_{I_1} = [AI_1I_3] \tag{1,13}$$

Уравнение (1,10) мы перепишем теперь в виде

$$\tau_M = \tau_A - t\tau_{I_1}\,, \quad t \in (-\infty, \infty). \tag{1,10'}$$

Рассмотрим далее *основной цилиндроид комплекса* (соответствующий лучу $p = [AI_1]$ комплекса K, см. [1], страница 236).

Это есть линейчатая поверхность комплекса K, описанная лучом p в предположении, что прямая $[I_1I_3]$ остается неподвижной.
Учитывая (1,1), получаем

$$\mathrm{d}[I_1I_3] = -\,\omega_2^2[I_1I_3] + \omega_1^2[I_2I_3] + \omega_3^2[I_1I_2];$$

отсюда следует, что

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^2 = 0 \tag{1,14}$$

являются уравнениями основного цилиндроида комплекса. Касательная плоскость σ_N к цилиндроиду в точке

$$N = A + t_1I_1\,, \quad t_1 \in (-\infty, \infty) \tag{1,15}$$

определена соотношением

$$\sigma_N = [AI_1\,\mathrm{d}N]$$

или, учитывая (1,1), (1,15), (1,12), (1,13),

$$\sigma_N = \tau_A + \left(\frac{\omega^3}{\omega_1^3} + t_1\right)\tau_{I_1}. \tag{1,16}$$

Подставляя $t_1 = 0$ в (1,16), получим

$$\sigma_A = \tau_A + \frac{\omega^3}{\omega_1^3}\tau_{I_1}, \quad \sigma_A \not\equiv \tau_A,$$

а для $t_1 \to \infty$ получим асимптотическую плоскость

$$\sigma_{I_1} = \tau_{I_1}. \tag{1,17}$$

Из соотношений (1,10′), (1,16) вытекает, что $\tau_M \equiv \sigma_N$ в том и только в том случае, если

$$t + t_1 + \frac{\omega^3}{\omega_1^3} = 0. \tag{1,18}$$

В общем случае $M \not\equiv N$. Только для $t = -\omega^3/(2\omega_1^3)$ из (1,18) следует

$$t_1 = -\frac{1}{2}\frac{\omega^3}{\omega_1^3} = t,$$

что означает $M \equiv N$ и также $\tau_M \equiv \sigma_M$.

Обозначим эту точку $S \in p$ и назовем ее *аффинным центром луча* (см. [1], стр. 237).

Можем писать

$$S = A - \frac{1}{2}\frac{\omega^3}{\omega_1^3} I_1. \tag{1,19}$$

Из уравнения (1,17) вытекает, что к такой же ситуации доходит тоже в точке I_1.

Рассмотрим пару точек

$$M = A + tI_1,$$

$$N = A - \left(t + \frac{\omega^3}{\omega_1^3}\right) I_1$$

и аффинный центр (1,19). Отношение деления трех точек выходит

$$\frac{(SM)}{(SN)} = -1,$$

что характеризует аффинный центр луча.

Вывод.

Уравнение (1,18) определяет на луче p точечное соответствие $\gamma : M \to N$ такое, что $\tau_M \equiv \sigma_N$ и одновременно $\tau_N \equiv \sigma_M$.

Это соответствие является инволюцией, двойными точками которой являются точки S и I_1.

Наконец рассмотрим конгруэнции и линейчатые поверхности комплекса K.

Конгруэнцию прямых комплекса K будем задавать уравлением

$$(1,20) \qquad \omega_1^2 = m\omega_1^3 + n\omega^3.$$

Учитывая (1,3), (1,5), (1,6), отсюда получим

$$(1,21) \qquad \omega_1^3 \wedge \{dm - m(\omega_3^3 - \omega_2^2 + m\omega_2^3) + n(\omega^1 - \omega_2^3) + \omega_3^2\} + \\ + \omega^3 \wedge \{dn - n(m\omega_2^3 - 2\omega_2^2)\} = 0.$$

Будем различать два случая:

1. $n \neq 0$; это общий случай конгруэнций комплекса K. Развертывающиеся поверхности этой конгруэнции определены уравнением

$$\omega^2\omega_1^3 - \omega^3\omega_1^2 = 0$$

или ввиду (1,5), (1,20)

$$(1,22) \qquad (\omega_1^3)^2 - m\omega_1^3\omega^3 - n(\omega^3)^2 = 0$$

2. $n = 0$; это случай цилиндрических конгруэнций (см. [2], стр. 353), образованных однопараметрическим семейством цилиндрических поверхностей комплекса K.

То-есть уравнение

$$(1,21) \qquad \omega_1^2 = m\omega_1^3$$

определяет в несобственной плоскости N_2 направляющую этого однопараметрического семейства, описанную точкой I_1. Снова мы будем различать два случая.

2.1. $m \neq 0$; это общий случай цилиндрических конгруэнций. Развертывающиеся поверхности этих конгруэнций определены уравнением

$$(1,23) \qquad \omega_1^3(\omega_1^3 - m\omega^3) = 0.$$

2,2. $m = 0$; уравнение (1,21) имеет вид

$$(1,24) \qquad \omega_1^2 = 0.$$

Развертывающиеся поверхности определены уравнением

$$(1,25) \qquad (\omega_1^3)^2 = 0,$$

что представляет обсуждаемое однопараметрическое семейство цилиндрических поверхностей, считаное два раза. Более того, эти поверхности вырождаются в сети прямых в плоскостях τ_{I_1}. Значит, конгруэнция образована сетями прямых в плоскостях τ_{I_1}, касающихся направляющей

$\omega_1^2 = 0$. Это касается *специального случая параболических конгруэнций с директрисой* (см. [3], стр. 245).

Линейчатую поверхность комплекса K будем задавать уравнениями

$$(1{,}26) \qquad \omega_1^2 = \mu\omega^3, \quad \omega_1^3 = \nu\omega^3.$$

Дело касается пересечения двух конгруэнций комплекса K. Развертывающаяся поверхность определена уравнениями

$$(1{,}27) \qquad \omega_1^2 = \nu^2\omega^3, \quad \omega_1^3 = \nu\omega^3.$$

Специально для конуса лучей комплекса K в точке (1,8) получим

$$(1{,}28) \qquad \omega_1^2 = \frac{1}{t^2}\,\omega^3, \quad \omega_1^3 = -\frac{1}{t}\,\omega^3, \quad t \neq 0,$$

в то время как для цилиндра определенного точкой I_1 имеем

$$(1{,}29) \qquad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0$$

Из уравнений (1,26) получим

$$(1{,}30) \qquad \begin{aligned} &\omega^3 \wedge \{\mathrm{d}\mu - \mu(\nu\omega_2^3 - 2\omega_2^2 + \nu\omega^1) + \nu\omega_3^2\} = 0 \\ &\omega^3 \wedge \{\mathrm{d}\nu - \nu(\omega_1^1 - \nu\omega^1 + \nu\omega_2^3) + \mu\omega_2^3\} = 0\,. \end{aligned}$$

Будеи различать два случая

1. $\mu \neq 0$; общий случай линейчатых поверхностей,
2. $\mu = 0$; уравнения (1,26) имеют вид

$$(1{,}31) \qquad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = \nu\omega^3\,.$$

Из (1,24) находим, что поверхность в цилиндрической конгруэнции параболического типа.

2. Соответствия между комплексами

Рассмотрим комплекс $K \in A_3$ и уравнения (1,1)—(1,7). Более того в трехмерном аффинном пространстве $\bar{A}_3$ рассмотрим комплекс $\bar{K}$ прямых $\bar{p} = \bar{p}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. Комплекс $\bar{K}$ подчинен подобным предположениям как комплекс K. Именно, к прямой $\bar{p} \in \bar{K}$ присоединим репер $\{B, J_1, J_2, J_3\}$ такой, что $\bar{p} = [BJ_1]$. Основная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$(\overline{1{,}1}) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}B &= \bar{\omega}^i J_i \\ \mathrm{d}J_k &= \bar{\omega}_k^i J_i; \quad i, k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Мы предполагаем действительность уравнений, аналогичных уравнениям (1,2)—(1,7). Мы отмечаем их чертой.

Уравнение компгекса $\bar{K}$ имеет вид

$$(\overline{1,5}) \qquad \bar{\omega}^2 = \bar{\omega}_1^3.$$

Отсюда следует, что

$$(\overline{1,7}) \qquad \bar{\omega}_1^2 \wedge (\bar{\omega}^1 + \bar{\omega}_2^3) + \bar{\omega}_1^3 \wedge (2\bar{\omega}_3^3) - \bar{\omega}^3 \wedge \bar{\omega}_3^2 = 0.$$

Будем изучать соответствие $C : K \to \bar{K}$ между лучами комплексов K, $\bar{K}$, определеное соотношениями $\bar{u} = \bar{u}(u, v, w)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v, w)$, $\bar{w} = \bar{w}(u, v, w)$. Пусть $C : K \to \bar{K}$ — регулярное. Тогда оно определено уравнениями

$$(2,1) \qquad \begin{aligned} \bar{\omega}_1^2 &= \lambda_{11}\omega_1^2 + \lambda_{12}\omega_1^3 + \lambda_{13}\omega^3 \\ \bar{\omega}_1^3 &= \lambda_{21}\omega_1^2 + \lambda_{22}\omega_1^3 + \lambda_{23}\omega^3 \\ \bar{\omega}^3 &= \lambda_{31}\omega_1^2 + \lambda_{32}\omega_1^3 + \lambda_{33}\omega^3; \quad \det(\lambda_{ij}) \neq 0. \end{aligned}$$

Обозначим $\qquad \tau_i^j = \bar{\omega}_i^j - \omega_i^j, \qquad t_i^j = \bar{e}_i^j - e_i^j,$

где $\qquad e_i^j = \omega_i^j,(\delta), \qquad \bar{e}_i^j = \bar{\omega}_i^j(\delta),$

а δ означает дифференцирование для константных главных параметров. Дифференцируя уравнения (2,1) внешним образом и учитывая (1,6), $(\overline{1,6})$, получим

$$(2,2) \qquad \begin{aligned} &\omega_1^2 \wedge \{d\lambda_{11} - \lambda_{11}(\tau_1^1 - \tau_2^2) - \lambda_{12}\omega_2^3 + \lambda_{21}\bar{\omega}_3^2\} + \\ &+ \omega_1^3 \wedge \{d\lambda_{12} - \lambda_{12}(\tau_1^1 + \omega_3^3 - \bar{\omega}_2^2) - \lambda_{11}\omega_3^2 - \lambda_{13}(\omega_2^3 - \omega^1) + \lambda_{22}\bar{\omega}_3^2\} + \\ &+ \omega^3 \wedge \{d\lambda_{13} - \lambda_{13}(\omega_3^3 + \bar{\omega}_1^1 - \bar{\omega}_2^2) + \lambda_{23}\bar{\omega}_3^2\} = 0 \\ &\omega_1^2 \wedge \{d\lambda_{21} - \lambda_{21}(\tau_1^1 + \omega_2^2 - \bar{\omega}_3^3) - \lambda_{22}\omega_2^3 + \lambda_{11}\bar{\omega}_2^3\} + \\ &+ \omega_1^3 \wedge \{d\lambda_{22} - \lambda_{22}(\tau_1^1 - \tau_3^3) - \lambda_{23}(\omega_2^3 - \omega^1) + \lambda_{12}\bar{\omega}_2^3 - \lambda_{21}\omega_3^2\} + \\ &+ \omega^3 \wedge \{d\lambda_{23} - \lambda_{23}(\bar{\omega}_1^1 - \tau_3^3) + \lambda_{13}\bar{\omega}_2^3\} = 0 \\ &\omega_1^2 \wedge \{d\lambda_{31} - \lambda_{31}(\omega_2^2 - \omega_1^1 - \bar{\omega}_3^3) - \lambda_{32}\omega_2^3 + \lambda_{21}(\bar{\omega}_2^3 - \bar{\omega}^1)\} + \\ &+ \omega_1^3 \wedge \{d\lambda_{32} + \lambda_{32}(\tau_3^3 + \omega_1^1) - \lambda_{31}\omega_3^2 - \lambda_{33}(\omega_2^3 - \omega^1) + \lambda_{22}(\bar{\omega}_2^3 - \bar{\omega}^1)\} + \\ &+ \omega^3 \wedge \{d\lambda_{33} + \lambda_{33}\tau_3^3 + \lambda_{23}(\bar{\omega}_2^3 - \bar{\omega}^1)\} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$(2,3) \qquad \begin{aligned} \delta\lambda_{11} &= \lambda_{11}(t_1^1 - t_2^2) + \lambda_{12}e_2^3 \\ \delta\lambda_{12} &= \lambda_{12}(t_1^1 + e_3^3 - \bar{e}_2^2) + \lambda_{13}(e_2^3 - e^1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta\lambda_{13} &= \lambda_{13}(e_3^3 + \bar{e}_1^1 - \bar{e}_2^2)\\
\delta\lambda_{21} &= \lambda_{21}(t_1^1 + e_2^2 - \bar{e}_3^3) + \lambda_{22}e_2^3 - \lambda_{11}\bar{e}_2^3\\
\delta\lambda_{22} &= \lambda_{22}(t_1^1 - t_3^3) + \lambda_{23}(e_2^3 - e^1) - \lambda_{12}\bar{e}_2^3\\
\delta\lambda_{23} &= \lambda_{23}(\bar{e}_1^1 - t_3^3) - \lambda_{13}\bar{e}_2^3\\
\delta\lambda_{31} &= \lambda_{31}(e_2^2 - e_1^1 - \bar{e}_3^3) + \lambda_{32}e_2^3 - \lambda_{21}(\bar{e}_2^3 - \bar{e}^1)\\
\delta\lambda_{32} &= -\lambda_{32}(t_3^3 + e_1^1) + \lambda_{33}(e_2^3 - e^1) - \lambda_{22}(\bar{e}_2^3 - \bar{e}^1)\\
\delta\lambda_{33} &= -\lambda_{33}t_3^3 - \lambda_{23}(\bar{e}_2^3 - \bar{e}^1),
\end{aligned}
$$

Покажем, какой смысл имеет обращение в нуль инварианта λ_{13}. Конус лучей комплекса K в точке (1,8) имеет уравнения (1,28). Соответствующая линейчатая поверхность определена соотношениями (смотри (2,1))

$$
(2,4)\qquad \bar{\omega}_1^2 = \frac{\lambda_{11} - \lambda_{12}t + \lambda_{13}t^2}{\lambda_{31} - \lambda_{32}t + \lambda_{33}t^2}\,\bar{\omega}^3,
$$

$$
\bar{\omega}_1^3 = \frac{\lambda_{21} - \lambda_{22}t + \lambda_{23}t^2}{\lambda_{31} - \lambda_{32}t + \lambda_{33}t^2}\,\bar{\omega}^3, \quad \lambda_{31} - \lambda_{32}t + \lambda_{33}t^2 \neq 0.
$$

Уравнения (2,4) остаются в силе и для $t = 0$, когда $M \equiv A$. Для $t \to \infty$ конус лучей комплекса вырождается в цилиндрическую поверхность (1,29) и соответствующая линейчатая поверхность в $\bar{K}$ имеет уравнения

$$
(2,5)\qquad \bar{\omega}_1^2 = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}}\,\bar{\omega}^3, \qquad \bar{\omega}_1^3 = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}}\,\bar{\omega}^3; \quad \lambda_{33} \neq 0.
$$

Из уравнений (2,4), (2,5) следует упомянутый геометрический смысл. Если $\lambda_{13} \neq 0$, то на луче $p \in K$ существуют две собственные точки, определенные параметрами

$$
(2,6)\qquad t_{1,2} = \frac{\lambda_{12} \pm \sqrt{D}}{2\lambda_{13}}, \quad D = (\lambda_{12})^2 - 4\lambda_{11}\lambda_{13} \neq 0,
$$

такие, что поверхности, соответствующие конусам лучей комплекса в этих точках, принадлежат цилиндрической конгруэнции параболического типа. Если $\lambda_{13} = 0$, $\lambda_{12} \neq 0$, то на луче $p \in K$ существует одна такая собственная точка и вторая — несобственная совпадает с I_1. Принимая во внимание (2,3), получим

$$
\delta D = 2D(e_3^3 + t_1^1 - \bar{e}_2^2).
$$

Если $D = 0$, $\lambda_{13} \neq 0$, то рассматриваемые точки совпадут в собственной точке, параметр которой

$$t = \frac{\lambda_{12}}{2\lambda_{13}}.$$

Если $\lambda_{13} = 0$, $\lambda_{12} = 0$, $\lambda_{11} \neq 0$, то условие $D = 0$ выполняется, и рассматриваемые точки совпадут в несобственной точке I_1.

Точки луча p, для которых конусом лучей комплекса K в соответствии C отвечают поверхности цилиндрической конгруэнции параболического типа, назовем особыми ввиду соответствия C (для краткости — *особыми*).

Принимая во внимание существующие результаты, различаем два основных типа соответствий между комплексами.

A. $\lambda_{13} \neq 0$, это значит, что особые точки луча являются собственными.

B. $\lambda_{13} = 0$, это значит, что хотя бы одна особая точка является несобственной.

При этом в первой группе имеются три разные случая, в то время как во второй — четыре разные случая. Следовательно, будет семь типов соответствий между комплексами, которые геометрически различаются.

Мы рассмотрим частные случаи в сжатом виде.

A_1. На луче p имеются две разные особые точки. Благодаря специализации реперов можем предполагать что матрица (λ_{ij}) коэффициентов уравнений (2,1) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{Vmatrix} \tag{2,7}$$

Рассмотрим тройку $(K, C, \bar{K})$, где K — комплекс в A_3, определенный уравнением (1,5), $\bar{K}$ — комплекс в $\bar{A}_3$, определенный уравнением $(\overline{1,5})$ и $C : K \to \bar{K}$ соответствие между комплексами K, $\bar{K}$, определенное уравнениями (2,1), а матрица коэффициентов λ_{ij} имеет вид (2,7). Будем изучать существование и общность этой тройки. Учитывая (2,7), можно систему внешних квадратических соотношений (1,7), $(\overline{1,7})$, (2,2) писать в виде

$$\begin{aligned}
&\omega_1^2 \wedge \Delta_1 + \omega_1^3 \wedge \Delta_2 + \omega^3 \wedge \Delta_3 = 0\\
&\omega_1^2 \wedge \Delta_4 + \omega_1^3 \wedge \Delta_5 + \omega^3 \wedge \Delta_6 = 0\\
&\omega_1^2 \wedge \Delta_7 + \omega_1^3 \wedge \Delta_8 + \omega^3 \wedge \Delta_9 = 0\\
&\omega_1^2 \wedge \Delta_{10} + \omega_1^3 \wedge \Delta_{11} + \omega^3 \wedge \Delta_{12} = 0\\
&\omega_1^2 \wedge \Delta_{13} + \omega_1^3 \wedge \Delta_{14} + \omega^3 \wedge \Delta_{15} = 0
\end{aligned} \tag{2,8}$$

Здес находятся 15 независимых форм Пфаффа

$$
\begin{aligned}
(2{,}9)\quad & \varDelta_1 = \omega^1 + \omega_2^3 && \varDelta_4 = \bar\omega_1 + \bar\omega_2^3 + 2\lambda_{21}\bar\omega_3^3 - \lambda_{31}\bar\omega_3^2 \\
& \varDelta_2 = 2\omega_3^3 && \varDelta_5 = 2\lambda_{22}\bar\omega_3^3 - \lambda_{32}\bar\omega_3^2 \\
& \varDelta_3 = -\omega_3^2 && \varDelta_6 = \bar\omega^1 + \bar\omega_2^3 - \lambda_{33}\bar\omega_3^2 \\
& \varDelta_7 = \tau_2^2 - \tau_1^1 + \lambda_{21}\bar\omega_3^2 \\
& \varDelta_8 = -\omega_3^2 - \omega_2^3 + \omega^1 + \lambda_{22}\bar\omega_3^2 \\
& \varDelta_9 = \bar\omega_2^2 - \omega_3^3 - \bar\omega_1^1 \\
& \varDelta_{10} = \mathrm{d}\lambda_{21} - \lambda_{21}(\tau_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) - \lambda_{22}\omega_2^3 + \bar\omega_2^3 \\
& \varDelta_{11} = \mathrm{d}\lambda_{22} - \lambda_{22}(\tau_1^1 - \tau_3^3) - \lambda_{21}\omega_3^2 \\
& \varDelta_{12} = \bar\omega_2^3 \\
& \varDelta_{13} = \mathrm{d}\lambda_{31} - \lambda_{31}(\omega_2^2 - \omega_1^1 - \bar\omega_3^3) - \lambda_{32}\omega_2^3 + \lambda_{21}(\bar\omega_2^3 - \bar\omega^1) \\
& \varDelta_{14} = \mathrm{d}\lambda_{32} + \lambda_{32}(\tau_3^3 + \omega_1^1) - \lambda_{31}\omega_3^2 - \lambda_{33}(\omega_2^3 - \omega^1) + \lambda_{22}(\bar\omega_2^3 - \bar\omega^1) \\
& \varDelta_{15} = \mathrm{d}\lambda_{33} + \lambda_{33}\tau_3^3
\end{aligned}
$$

Составляя интегральные элементы системы (1,5), $(\overline{1,5})$, (2,1) относительно базисных форм ω_1^2, ω_1^3, ω^3, положим

$$(2{,}10)\qquad \varDelta_i = k_i^1\omega_1^2 + k_i^2\omega_1^3 + k_i^3\omega^3; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, 15.$$

Интегральный элемент $E_1(\omega_1^2,\ \omega_1^3 = \omega^3 = 0)$ определен в зависимости от k_i^1. Число произвольных параметров элемента E_1 обозначим $r_1 = 15$.

Изучая число параметров , от которых зависит интегральный элемент $E_2(\omega_1^2,\ \omega_1^3,\ \omega^3 = 0)$, подставляем выражения (2,10) в систему (2,8), предполагая при этом $\omega^3 = 0$. Для коэффициентов k_i^2 получим 5 независимых уравнений

$$(2{,}11)\qquad k_1^2 = k_2^1,\ k_4^2 = k_5^1,\ k_7^2 = k_8^1,\ k_{10}^2 = k_{11}^1,\ k_{13}^2 = k_{14}^1,$$

которые не ограничивают коэффициенты k_i^1. Интегральный элемент E_2 зависит от $r_2 = 10$ произвольных параметров.

Изучая $E_3(\omega_1^2,\ \omega_1^3,\ \omega^3)$, подставляем выражения (2,10) в (2,8). Получим 15 уравнений

$$
\begin{aligned}
(2{,}12)\qquad & k_1^2 - k_2^1 = 0 \qquad && k_1^3 - k_3^1 = 0 \qquad && k_2^3 - k_3^2 = 0 \\
& k_4^2 - k_5^1 = 0 && k_4^3 - k_6^1 = 0 && k_5^3 - k_6^2 = 0 \\
& k_7^2 - k_8^1 = 0 && k_7^3 - k_9^1 = 0 && k_8^3 - k_9^2 = 0
\end{aligned}
$$

$$k_{10}^2 - k_{11}^1 = 0 \qquad k_{10}^3 - k_{12}^1 = 0 \qquad k_{11}^3 - k_{12}^2 = 0$$
$$k_{13}^2 - k_{14}^1 = 0 \qquad k_{13}^3 - k_{15}^1 = 0 \qquad k_{14}^3 - k_{15}^2 = 0,$$

из которых первый столбец совпадает с (2,11). Не уменьшая число параметров от E_1, E_2, система (2,12) определяет 10 коэффициентов k_i^3, Значит, элемент E_3 зависит от $r_3 = 5$ параметров.

Характери рассматриваемой системы Пфаффа $s_1 = r_1 - r_2 = 5$ $s_2 = r_2 - r_3 = 5$, $s_3 = r_3 = 5$. Число Картана $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 30$; но точно такое же число коеффициентов $N = 30$ после выражения форм (2,9) из (2,8) по лемме Картана. Следовательно, критерий Картана (см. [4], стр. 247) удовлетворен, а поэтому система (1,5), $(\overline{1,5})$, (2,1) — в инволюции.

Вывод.

Рассматриваемые тройки существуют и зависят от 5 функций трех аргументов.

A_2. Совпадающие особые точки, это значит $D = 0$. Благодаря специализации реперов матрица (λ_{ij}) коэффициентов уравнений (2,1) имеет вид

(2,13)
$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{Vmatrix}.$$

Теперь из равенства (2,6) вытекает $t_{1,2} = 0$ и особые точки совпадают с точкой A. Используя критерий Картана проверяем, что *рассматриваемые здесь тройки* $(K, C, \overline{K})$ *существуют с произволом 4 функций трех аргументов.*

A_3. Благодаря специализации реперов, матрица (λ_{ij}) имеет вид

(2,14)
$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{Vmatrix}.$$

Опять $D = 0$ и особые точки совпадают в точке A. Более того, конусу лучей комплекса в точке A соответствует цилиндрическая поверхность $\bar{\omega}_1^2 = \bar{\omega}_1^3 = 0$.

Рассмотренные тройки $(K, C, \overline{K})$ *существуют с произволом 3 функций трех аргументов.*

B_1. Матрицу (λ_{ij}) коэффициентов λ_{ij} можно писать в виде

(2,15)
$$\begin{Vmatrix} \lambda_{11} & 1 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & 1 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Это означает, что одна собственная особая точка и вторая совпадает с точкой I_1.

Рассмотренные тройки $(K, C, \bar{K})$ существуют с произволом 4 функций трех аргументов.

B_2. Матрицу (λ_{ij}) коэффициентов уравнений (2,1) можем писать в виде

$$\begin{Vmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & 1 \\ \lambda_{31} & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2,16}$$

Это значит $D = 0$ и особые точки совпадают с точкой I_1.
Рассмотренные тройки $(K, C, \bar{K})$ существуют с произволом 3 функций трех аргументов.

B_3. Матрицу (λ_{ij}) коэффициентов уравнений (2,1) можем писать в виде

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{Vmatrix}. \tag{2,17}$$

Это значит, что одна собственная особая точка (в точке A) и вторая совпадает с точкой I_1. Более того, цилиндрические поверхности комплексов K, $\bar{K}$ соответствуют.
Назовем такие соответствия $C : K \to \bar{K}$ *цилиндрическими.*
Рассмотренные тройки $(K, C, \bar{K})$ существуют с произволом 3 функций трех аргументов.

B_4. Матрицу (λ_{ij}) коэффициентов уравнений (2,1) можно писать в виде

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & \lambda_{33} \end{Vmatrix}. \tag{2,18}$$

Следовательно, $D = 0$ и особые точки совпадают с точкой I_1. Более того, цилиндрические поверхности комплексов K, $\bar{K}$ соответствуют и имеем второй случай цилиндрических соответствий.
Рассмотренные тройки $(K, C, \bar{K})$ существуют с произволом 2 функций трех аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] КОВАНЦОВ Н. И.: Теория комплексов. Издательство Киевского университета 1963.

[2] ФАВАР Ж.: Курс локальной дифференциальной геометрии. Издательство иностранной литературы, Москва, 1960.

[3] ЧЕХ Э.: О точечных изгибаниях конгруэнций прямых. Чехосл. матем. ж. 5 (80), 1955, 234—273

[4] ФИНИКОВ С. П.: Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.

Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва 1948 Ленинград.

[5] Гейны М.: Многообразие $V_3 \subset P_5$ и его применение к изучению комплекса прямых P_3. Чехосл. мат. ж. т. 18 (93), 1968, 4, 633—665.

[6] Švec A.: Projective Differential Geometry of Line Congruences. Prague 1965.

[7] Гринцевичус К. И.: Комплекс прямых в аффинном пространстве. Докл. АН СССР, 92, 1953, 695—698.

[8] ЩЕРБАКОВ Р. Н.: Основной цилиндроид линейчатого комплекса. Известия вузов, математика, 3 (28), 1962, 177—188.

[9] ОНИЩУК Н. М.: К аффиной теории линейчатого комплекса. Известия вузов, Математика, 6, 1963, 123—132.

[10] ИВЛЕВ Е. Т.: Некоторые вопросы эквиаффинной теории пары комплексов трехмерного пространства. Тр. Томского ун-та, 168, 1963, 120—131.

Поступило 29. 7. 1974

Bělohorská 70 615 00 Brno