Matematicko-fyzikálny časopis

Miloš Ráb

O jistém zobecnění Sansonovy věty o neoscilaci integrálů diferenciální rovnice $y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + \omega(x)]y = 0$

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 10 (1960), No. 1, 3--8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126925

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK X ČÍSLO 1

O JISTÉM ZOBECNĚNÍ SANSONOVY VĚTY O NEOSCILACI INTEGRÁLŮ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0$

MILOŠ RÁB, Brno

V práci je zobecněna Sansonova postačující podmínka pro to, aby každý integrál diferenciální rovnice $y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0$ měl v intervalu $\langle a, b\rangle$ nejvýše dva nulové body.

V práci [1] uvádí Sansone následující větu:

Jsou-li v diferenciální rovnici

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0 \tag{1}$$

$A'(x)$ a $\omega(x)$ *funkce spojité v intervalu* $\langle a, b\rangle$, $A(x) \leq 0$, $\omega(x) \leq 0$ *nebo* $\omega(x) \geq 0$, *při čemž není v žádném částečném intervalu* $\omega(x) \equiv 0$, $|A(x)| \geq \int_a^x |\omega(t)|\, \mathrm{d}t$, *pak každý integrál diferenciální rovnice* (1) *má v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *nejvýše dva nulové body eventuálně splývající.*

Důkaz se opírá o Mammanovu větu [2]:

Nutná a postačující podmínka pro to, aby levá strana diferenciální rovnice (1) *byla rozložitelná v symbolický součin tří lineárních diferenciálních operátorů, tj. aby každý integrál diferenciální rovnice* (1) *měl v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *nejvýše dva nulové body eventuálně splývající, jest, aby integrály diferenciální rovnice* (1) *a diferenciální rovnice adjungované* $y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) - \omega(x)]\, y = 0$, *které mají dvojnásobný nulový bod v* a, *neměly v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *žádný další nulový bod.*

Důkaz věty, kterou uvedu, opírá se také o Mammanovu větu.

Věta. *Nechť* $A'(x)$ *a* $\omega(x)$ *jsou funkce spojité v intervalu* $\langle a, b\rangle$ {*uvažovaný interval může být též tvaru* $\langle a, \infty)$} *a*

$$A(x) + \sup_{\xi \in (a, x)} \left| \int_\xi^x \omega(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2(x - a)^2} \quad \textit{pro } x \in (a, b). \tag{2}$$

Pak má každý integrál diferenciální rovnice (1) *v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *nejvýše dva jednoduché nulové body nebo jeden dvojnásobný.*

Důkaz. Podle Mammanovy věty stačí ukázat, že integrál $y(x)$ diferenciální rovnice

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \varepsilon\omega(x)]\,y = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{3}$$

který splňuje v čísle a počáteční podmínky

$$y(a) = y'(a) = 0, \qquad y''(a) \neq 0, \tag{4}$$

nemá v intervalu $\langle a, b\rangle$ žádný další nulový bod.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y''(a) > 0$.

Násobíme-li rovnici (3) $y(x)$ a integrujeme od a do x, obdržíme vzhledem ke (4)

$$y(x)\,y''(x) - \frac{1}{2}\,y'^2(x) + A(x)\,y^2(x) = -\varepsilon \int_a^x \omega(t)\,y^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Protože jest $y''(a) > 0$, jest $y''(x) > 0$ v jistém okolí bodu a zprava, a $y(x)$ je tam konvexní. Ukážeme, že $y(x)$ je konvexní v celém intervalu $\langle a, b\rangle$.

Předpokládejme, že tomu tak není a označme x_1 infimum všech x, pro něž $y''(x) \leq 0$. Číslo x_1 leží uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$ a $y''(x_1) = 0$. Položíme-li v (5) $x = x_1$, obdržíme

$$\frac{1}{2}\,y'^2(x_1) = A(x_1)\,y^2(x_1) + \varepsilon \int_a^{x_1} \omega(t)\,y^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Podle věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (a, x_1)$ takové, že $y(x_1) - y(a) = (x_1 - a)\,y'(\xi)$, tj.

$$y'(\xi) = \frac{y(x_1)}{x_1 - a}. \tag{7}$$

Protože je $y''(x) > 0$ pro $x \in (a, x_1)$, je $y'(x)$ v tomto intervalu rostoucí, a tedy podle (7) $y'(x_1) > \dfrac{y(x_1)}{x_1 - a}$. Užitím tohoto odhadu dostaneme z (6)

$$\frac{1}{2}\,\frac{y^2(x_1)}{(x_1 - a)^2} < \frac{1}{2}\,y'^2(x_1) = A(x_1)\,y^2(x_1) + \varepsilon \int_a^{x_1} \omega(t)\,y^2(t)\,\mathrm{d}t,$$

tedy

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \varepsilon \int_a^{x_1} \omega(t)\,\frac{y^2(t)}{y^2(x_1)}\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Funkce $\psi(t) = \dfrac{y(t)}{y(x_1)}$ jest v intervalu (a, x_1) rostoucí a $\psi(a) = 0$, $\psi(x_1) = 1$, takže podle druhé věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (a, x_1)$ takové, že

$$\int_a^{x_1} \omega(t)\,\frac{y^2(t)}{y^2(x_1)}\,\mathrm{d}t = \int_\xi^{x_1} \omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vztah (8) se tedy redukuje na nerovnost

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \varepsilon \int_\xi^{x_1} \omega(t)\, dt;$$

odtud však plyne

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \sup_{\xi \in (a, x_1)} \varepsilon \int_\xi^{x_1} \omega(t)\, dt,$$

čili

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \sup_{\xi \in (a, x_1)} \left| \int_\xi^{x_1} \omega(t)\, dt \right|,$$

což je ve sporu s předpokladem. Má tedy $y(x)$ v bodě a dvojnásobný nulový bod a jest v celém intervalu $\langle a, b \rangle$ konvexní, takže nemá v tomto intervalu žádný další nulový bod a věta je dokázána.

Poznámka. Jestliže $\omega(x)$ nemění v intervalu (a, b) znaménko, jest

$$\sup_{\xi \in (a, x)} \left| \int_\xi^{x} \omega(t)\, dt \right| = \int_a^x |\omega(t)|\, dt$$

a předpoklad (2) se dá nahradit předpokladem

$$\frac{1}{2} \geq A(x)\,(x - a)^2 + \int_a^x (t - a)^2\, |\omega(t)|\, dt. \tag{9}$$

Vskutku, v intervalu (a, x_1) je graf funkce $y(x)$ pod úsečkou $\eta(x) = \dfrac{y(x_1)}{x_1 - a}$ $(x - a)$, $x \in (a, x_1)$, takže jest pro každé x tohoto intervalu

$$y(x) < \eta(x). \tag{10}$$

Nerovnost (8) můžeme nyní vzhledem k tomu, že $\omega(x)$ nemění v intervalu $\langle a, b \rangle$ znaménko, psát ve tvaru

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \int_a^{x_1} |\omega(t)|\, \frac{y^2(t)}{y^2(x_1)}\, dt.$$

Podle (10) jest

$$\int_a^{x_1} |\omega(t)|\, \frac{y^2(t)}{y^2(x_1)}\, dt < \int_a^{x_1} |\omega(t)|\, \frac{(t - a)^2}{(x_1 - a)^2}\, dt,$$

takže

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \int_a^{x_1} |\omega(t)|\, \frac{(t - a)^2}{(x_1 - a)^2}\, dt,$$

a to je ve sporu s nerovností (9).

Je-li například $I = \langle a, \infty)$, $a > 0$, $A(x) \equiv 0$, $\omega(x) = kx^s$, je nerovnost (2) splněna jen pro $\omega(x) \equiv 0$. Podle (9) však k tomu, aby každý integrál diferenciální rovnice $y''' + kx^s y = 0$ měl v intervalu I nejvýše dva nulové body, stačí předpokládat $s < -3$ a $|k| \leq \frac{|s+1|\,|s+2|\,|s+3|}{4a^{s+3}}$.

Vskutku

$$A(x)(x-a)^2 + \int_a^x (t-a)^2 |\omega(t)|\,\mathrm{d}t = |k| \int_a^x (t^{2+s} - 2at^{1+s} + a^2t^s)\,\mathrm{d}t =$$
$$= |k|\,\{F(x) - F(a)\},$$

kde

$$F(x) = \frac{x^{s+3}}{s+3} - 2a\frac{x^{s+2}}{s+2} + a^2\frac{x^{s+1}}{s+1}.$$

Protože

$$F'(x) = x^s(x-a)^2 > 0 \quad \text{pro} \quad x > a \text{ a } F(a) = \frac{2a^{s+3}}{(s+1)(s+2)(s+3)} < 0,$$

jest $F(x)$ záporná pro všechna x, neboť konverguje s rostoucím x k nule. Pro všechna $x \geq a$ platí tedy nerovnost

$$|k|\,\{F(x) - F(a)\} \leq |k| \frac{2a^{s+3}}{|s+1|\,|s+2|\,|s+3|} \leq \frac{1}{2},$$

takže předpoklad (9) je splněn.

LITERATURA

[1] Sansone G., Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale, Revista, ser. A, 6 (1947), 195–253.

[2] Mammana G., Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari, Mathematische Zeitschrift 33 (1931), 186–231.

Došlo 14. 7. 1959.

Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty university v Brně

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ САНСОНЕ О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \omega(x)]\,y = 0$$

МИЛОШ РАБ

Выводы

В настоящей работе обобщается достаточное условие Дж. Сансоне для того, чтобы решения дифференциального уравнения третьего порядка

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \omega(x)]\,y = 0 \tag{1}$$

не колебялись.

Доказывается: Пусть $A'(x)$ и $\omega(x)$ непрерывные функции в интервале $\langle a, b\rangle$ $[\langle a, \infty)]$ и пусть

$$A(x) + \sup_{\xi \in (a, b)} \left| \int_{\xi}^{x} \omega(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqq \frac{1}{2(x-a)^2} \quad \text{для} \quad x \in (a, b). \tag{2}$$

Потом всякое решение дифференциального уравнения (1) имеет в интервале $\langle a, b\rangle$ больше всего два простых корня или один двойной корень.

Если функция $\omega(x)$ в интервале $\langle a, b\rangle$ не меняет знака, можно условие (2) заменить следующим:

$$\frac{1}{2} \geqq A(x)\,(x-a)^2 + \int_{a}^{x} (t-a)^2\,|\,\omega(t)\,|\,\mathrm{d}t.$$

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG EINES SATZES VON SANSONE ÜBER NICHTOSZILLATION DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \omega(x)]\,y = 0$$

MILOŠ RÁB

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine hinreichende Bedingung von G. Sansone für die Nichtoszillation der Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \omega(x)]\,y = 0 \tag{1}$$

verallgemeinert.

Es wird bewiesen:

Seien $A'(x)$ und $\omega(x)$ zwei im Intervall $\langle a, b\rangle$, $\{\langle a, \infty)\}$ stetige Funktionen und

$$A(x) + \sup_{\xi \in (a, x)} \left| \int_{\xi}^{x} \omega(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2(x-a)^2} \quad \text{für} \quad x \in (a, b). \tag{2}$$

Dann hat jede Lösung der Differentialgleichung (1) im Interval $\langle a, b\rangle$ höchstens zwei einfache Nullstellen oder eine zweifache Nullstelle.

Wenn die Funktion $\omega(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ ihr Vorzeichen nicht wechselt, kann man die Voraussetzung (2) durch folgendes ersetzen:

$$\frac{1}{2} \geq A(x)(x - a)^2 + \int_a^x (t - a)^2 \, |\, \omega(t) \,|\, \mathrm{d}t.$$