Pavel Goralčík

О сдвигах полугрупп. III. Преобразования с увеличительной и преобразования с неправильной сюръективной частю

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 4, 273--282

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126862

Matematický časopis 18 (1968), No. 4

О СДВИГАХ ПОЛУГРУПП III ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С УВЕЛИЧИТЕЛЬНОЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С НЕПРАВИЛЬНОЙ СЮРЪЕКТИВНОЙ ЧАСТЬЮ

ПАВЕЛ ГОРАЛЬЧИК (PAVEL GORALČÍK), Praha

В этой работе заканчивается описание структуры сдвигов полугрупп с единицей, начатое в [1] и [2]. Не рассмотренными остались по существу преобразования двух типов; их изучению отведены соответственно первый и второй пункты работы. В конце приводится теорема, которая, избавляясь от требования наличия единицы, дает описание внутренних сдвигов полугрупп вообще.

1. В вопросе о том, является ли данное преобразование f множества X сдвигом некоторой полугруппы с единицей, важную роль играет множество Q_f, состоящее из тех элементов $x \in X$, для которых существует в X бесконечная последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$f(x_1) = x,\ f(x_{k+1}) = x_k \text{ для всех } k \geqslant 1. \tag{1}$$

Множество Q_f может быть как пустым, так и непустым, в зависимости от преобразования f. Назовем это множество сюръективной частью преобразования f.

Для любого преобразования g, перестановочного с f, будет

$$g[Q_f] \subset Q_f. \tag{2}$$

Действительно, с каждым $x \in Q_f$ содержится в Q_f последовательность $\{x_k\}_1^{\infty}$, удовлетворяющая (1), причем

$$f(g(x_1)) = g(f(x_1)) = g(x),\ f(g(x_{2+1})) = g(f(x_{k+1})) = g(x_k)$$

для всех $k \geqslant 1$, следовательно, $g(x) \in Q_f$.

В частности, $f[Q_f] \subset Q_f$, но прямо из определения следует, что

$$f[Q_f] = Q_f \tag{3}$$

Предположим сейчас, что на X дана полугруппа с единицей e, для которой F и G системы соответственно левых и правых сдвигов, и пусть $f \in F$.

Обозначим $Q_f(e)$ пересечение Q_f с компонентой единицы $E_f(e)$.

Если $Q_f(e) \neq \emptyset$, то также $Q_f(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in X$, где $Q_f(x) = E_f(x) \cap \cap Q_f$. Действительно, для $g_x \in G$ такого, что $g_x(e) = x$, имеет место $g_x[E_f(e)] \subset E_f(x)$, откуда, в сочетании с (2), $g_x[Q_f(e)] \subset Q_f(x)$.

Таким образом, предположение непустоты $Q_f(e)$ позволяет ввести для всех $x \in X$ характеристику

$$u(x) = \min \{n : f^n(x) \in Q_f,\ n \geqslant 0\}. \tag{4}$$

В силу (2) для всех $x \in X$ должно быть

$$u(e) \geqslant u(x). \tag{5}$$

Лемма 1. *Если $Q_f(e) \neq \emptyset$, то для каждого $n \geqslant 0$*

$$G(f^{u(e)+n}(e)) = Q_f. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из Q_f. Вместе с x содержится в Q_f последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, подчиняющаяся (1). Для g из G такого, что $g(e) = x_{u(e)+n}$, будет

$$g(f^{u(e)+n}(e)) = f^{u(e)+n}(g(e)) = f^{u(e)+n}(x_{u(e)+n}) = x,$$

тем самым $Q_f \subset G(f^{u(e)+n}(e))$.

Обратное включение непосредственно следует из (2).

Преобразование f отображает каждую из своих компонент в себя, поэтому, в силу (3)

$$f[Q_f(e)] = Q_f(e). \tag{7}$$

Лемма 2. *Если для некоторого h из F и $x \in H_0 = \bigcup\limits_{k\ 0}^{\infty} [f^{u(e)+k}(e)]$ имеет место*

$$h \circ f(x) = f \circ h(x) = x, \tag{8}$$

то равенство (8) *верно для всех $x \in Q_f$, и f взаимно однозначно на Q_f.*

Докозательство. По лемме 1 $G(x) = Q_f$, если $x = f^{u(e)+k}(e)$ для некоторого $k \geqslant 0$, т. е., если $x \in H_0$, следовательно, для произвольного y из Q_f найдется g из G такое, что $g(x) = y$. Но тогда $h \circ f(y) = h \circ f(g(x)) = g(h \circ f(x)) = g(x) = y$ и также $f \circ h(y) = y$.

Отсюда в частности следует, что, если $E_f(e)$ содержит цикл Z_e, то $Z_e = Q_f(e)$, и все множество Q_f состоит из циклов, порядки которых являются делителями порядка Z_e.

Сдвиги этого типа подробно рассматривались в [1].

Чтобы исчерпать класс преобразований, все компоненты которых пересекаются с Q_f, остается рассмотреть случай преобразования f не взаимно однозначного на Q_f, и не являющегося отображением X на себя, так как класс сюръективных преобразований рассматривался в [2].

Теорема 1. *Пусть f — преобразование множества X, все компоненты которого пересекаются с Q_f, причем f не взаимно однозначно на Q_f и не является отображением X на себя.*

Для того, чтобы f было сдвигом полугруппы с единицей, необходимо и достаточно, чтобы существовал элемент $e \in X$ такой, что

1) *компонента $E_f(e)$ не содержит цикла,*
2) *$u(e) \geqslant u(x)$ для всех $x \in X$,*
3) *$f[Q_f(e) \backslash H_0] = Q_f(e)$, где $H_0 = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} [f^{u(e)+m}(e)]$.*

Доказательство. Необходимость. Отсутствие цикла в $E_f(e)$ является следствием леммы 2, необходимость второго условия отмечалась в (5).

Третье условие состоит в том, чтобы для каждого $m \geqslant 1$ существовал в $Q_f(e)$ элемент t, отличный от $f^{u(e)+m-1}(e)$, и такой, что $f(t) = f^{u(e)+m}(e)$. Допустим, что оно нарушается, т. е.

(9) для определенного $p \geqslant 1$ предположение $f(t) = f^{u(e)+p}(e)$ для $t \in Q_f(e)$ влечет $t = f^{u(e)+p-1}(e)$.

Для g из G такого, что $g(e) = f(e)$, будет

$$g(f^k(e)) = f^{k+1}(e) = f(f^k(e)) \tag{10}$$

для всех $k \geqslant 0$.

Пусть $\{x_k\}_1^{\infty}$ — последовательность со свойством (1) для элемента $x = f^{u(e)}(e) \in Q_f(e)$. Для x_1 будет, в силу (2), $g^p(x_1) \in Q_f(e)$, поэтому из

$$f \circ g^p(x_1) = g^p \circ f(x_1) = g^p \circ f^{u(e)}(e) = f^{u(e)+p}(e) \tag{11}$$

вытекает, в силу допущения (9), что

$$g^p(x_1) = f^{u(e)+p-1}(e). \tag{12}$$

Далее, $f^{u(e)} \circ g^p(x_{u(e)+1}) = g^p \circ f^{u(e)}(x_{u(e)+1}) = g^p(x_1) = f^{u(e)+p-1}(e)$, следовательно,

$$g^p x_{u(e)+1} \in f^{\,u(e)}[f^{u(e)+p-1}(e)] \cap Q_f(e). \tag{13}$$

Обозначим $V_k = f^{-k}[f^{u(e)+p-1}(e)] \cap Q_f(e)$. Для $t \in V_1$ из $f \circ g(t) = g \circ f(t) = g \circ f^{u(e)+p-1}(e) = f^{u(e)+p}(e)$ вытекает, в силу (9), что $g(t) = f^{u(e)+p-1}(e)$.

Пусть для $k > 1$ и для всех $t \in V_k$ будет $g(t) \in V_{k-1}$. Для $t \in V_{k+1}$ имеем $f \circ g(t) = g \circ f(t) \in V_{k-1}$, так как $f(t) \in V_k$, то $g(t) \in V$. Значит, $g[V_1] = [f^{u(e)+p-1}(e)]$ и $g[V_{k+1}] \subset V_k$ для всех $k \geqslant 1$. Отсюда следует, что

(14) $$g^k[V_k] = f^{u(e)+p-1}(e)$$

для всех $k \geqslant 0$.

Пусть сейчас преобразование h из F такое, что $h(e) = x_{u(e)+1}$. Для него будет, учитывая (13) и (14),

$$h(f^{u(e)+p}(e)) = h(g^{u(e)+p}(e)) = g^{u(e)} \circ g^p(x_{u(e)+1}) = f^{u(e)+p-1}(e).$$

Таким образом, для $t = f^{u(e)+p}(e) \in H_0$

$$f \circ h(t) = f \circ f^{u(e)+p-1}(e) = f^{u(e)+p}(e) = t, =$$

$$h \circ f(t) = h \circ g(t) = g \circ h(t) = g \circ f^{u(e)+p-1}(e) = t.$$

В силу леммы 2 преобразование f взаимно однозначно на Q_f, что противоречит предположению теоремы.

Достаточность. Условие 3) теоремы равносильно существованию определенного на Q_f преобразования h такого, что

(15) $$f \circ h(t) = t \text{ для всех } t \in Q_f,$$

причем

(16) $$h[Q_f] \subset Q_f \backslash H_0.$$

Определим рекуррентно множества
$H_1 = f^{-1}[H_0] \backslash H_0$, $H_{n+1} = f^{-1}[H_n]$ для $n \geqslant 1$, и пусть $T_{m,n}$ означает множество тех t из H_n, для которых $f^n(t) = f^{u(e)+m}(e)$.

Для h, удовлетворяющего (15) и (16), имеет место

(17) $$h[T_{m,n} \cap Q_f] \subset T_{m,n+1} \text{ для всех } m, n \geqslant 0,$$

и для преобразования f будет

(18) $$f[T_{m,n}] \subset T_{m,n-1} \text{ вдля } m \geqslant 0 \text{ и } n \geqslant 1,$$

(19) $$f[T_{m,0}] = T_{n+1,0} \text{ вдля всех } m \geqslant 0.$$

Обозначим далее через K множество всех элементов t таких, что $f^{u(t)}(t) \in H_0$. Значит, $t \in K$ тогда и только тогда, если $f^{u(t)}(t) = f^{u(e)+m}(e)$ для некоторого $m \geqslant 0$.

В таком случае положим

(20) $$d(t) = u(e) + m - u(m).$$

Легко видно, что $f^{u(e)}(t) = f^{u(e)+d(t)}(e)$ для каждого $t \in K$.

Пусть L_m для $m \geqslant 0$ означает множество всех $t \in K$ таких, что $d(t) = m$. Наконец, пусть $W_n = \bigcup f^{-k}[f^n(e)] \cap K$ для всех $n \geqslant 0$. Очевидно, если $m \leqslant n$, то $W_m \subset W_n$.

Определим сейчас по нидукции порядок P на K: **I.** Полагаем ePe, тем самым упрядочено по P множество $W_0 = [e]$.

II. Пусть P определен уже на W_n. Рспространим P на W_{n+1} рекуррентно, полагая $f^{n+1}(e)\ P\ f^{n+1}(e)$, п ири предположении, что P определен уже на $W_{n+1} \cap L_k$ для всех k, для которых $n + 1 \geqslant k \geqslant s + 1$ и $(W_{n+1} \backslash W_n) \cap \cap L_s \neq \emptyset$, для всех $x \in W_n \cap L_s$ и $y \in (W_{n+1} \backslash W_n) \cap L_s$ полагаем xPy, для x, $y \in (W_{n+1} \backslash W_n) \cap L_s$ таких, что $f(x) \neq f(y)$ полагаем xPy, если $f(x) P f(y)$, и yPx в противном случае. Наконец, для $Z \in (W_{n+1} \backslash W_n) \cap L_{s+1}$, в случае непустоты $f^{-1}[z]$ пусть P будет произвольный линейный прядок на $f^{-1}[z]$.

Таким образом построенное отношение частичной упрядоченности P на множестве K согласованно с f, т. е. xPy влечет всегда $f(x)Pf(y)$, кроме того для всех $m \geqslant 0$ множество L_m упорядочено по P линейно, и $f^m(e)$ наименьший по P элемент в L_m.

Определим сейчас на основании P квазипорядок A на множестве K: Положим xAy в том случае, если при $d(x) \geqslant d(y)$ имеет место $xPf^{d(x)-d(y)}(y)$, и при $d(x) > d(y)$ имеет место $f^{d(y)-d(x)}(x)Py$.

Ясно, что любые два элемента сравнимы по A. Кроме того, xAy влечет $f^m(x)Af^n(y)$ для любых m, $n \geqslant 0$.

Если xAt и tAx, то

$$f^{d(t)}(x) = f^{d(x)}(t) \tag{22}$$

Действительно, пусть $d(x) \geqslant d(t)$. Тогда одновременно $xPf^{d(x)-d(t)}(t)$ и $f^{d(x)-d(t)}(t)Px$, следовательно, $x = f^{d(x)-d(t)}(t)$, откуда получается (22).

Отметим попутно, что, если $t \in H_0$ и $x \in K$, то также имеет место

$$f^{d(x)}(t) = f^{d(t)}(x). \tag{23}$$

Действительно, если $t \in H_0$, то $t = f^{d(t)}(e)$, поэтому $f^{d(x)}(t) = f^{d(t)+d(x)}(e) = f^{d(t)-u(e)} \circ f^{u(e)+d(x)}(e) = f^{d(t)-u(e)} \circ f^{u(e)}(x) = f^{d(t)}(x)$, учитывая, что $d(t) \geqslant u(e)$.

Сейчас уже можно в явном виде определить системы преобразований $F = \{f_x\}$ и $G = \{g_y\}$, служащие системами сдвигов для полугруппы с единицей e, т. е. преобразования из F будут перестановочными с преобразованиями из G, и для элемента e будет $F(e) = G(e) = X$. Притом наше преобразование f будет элементом F.

Для $x \in K$

$$f_x(t) = \begin{cases} f^{d(t)}(x) & \text{если } tAx, \\ f^{d(x)}(t) & \text{если } xAt \text{ или } t \in X \backslash K. \end{cases}$$

(Совместимость вытекает из (22).)

Для $x \in T_{p,q} \backslash K$

$$f_x(e) = x,$$
$$f_x(t) = h^q \circ f^{u(e)+p}(t) \text{ для } t \neq e.$$

Для $x \in X \backslash E_f(e)$

$$f_x(t) = x \quad \text{для всех} \quad t \in X.$$

Для $y \in K$, $y \neq e$

$$g_y(t) = \begin{cases} f^{d(t)}(y) & \text{если} \quad tAy, \\ f^{d(y)}(t) & \text{если} \quad yAt, \\ h^n \circ f^{u(e)+m}(y) & \text{для} \quad t \in T_{m,n} \backslash K, \\ t & \text{для} \quad t \in X \backslash E_f(e). \end{cases}$$

Преобразование g_e тождественно на X.

Для $y \in X \backslash K$

$$g_y(t) = \begin{cases} f^{d(t)}(y) & \text{для} \quad t \in K, \\ h^n \circ f^{u(e)+m}(y) & \text{для} \quad t \in T_{m,n} \backslash K, \\ t & \text{для} \quad t \in X \backslash E_f(e). \end{cases}$$

Легко видеть, что $f_x(e) = g_x(e) = x$ для всех $x \in X$, причем $f = f_{f(e)}$. Остается показать, что при любых $x, y \in X$ преобразования f_x и g_y перестановочны.

(I) Пусть $x, y \in K$, и, ради определенности, xAy.

а) Если tAy, то $f_x(t)Ay$, $d(f_x(t)) = d(x) + d(t)$, поэтому $g_y \circ f_x(t) = f^{d(x)+d(t)}(y)$. С другой стороны, $g_y(t) = f^{d(t)}(y)$, и, так как $xAf^{d(t)}(y)$, то $f_x \circ g_y(t) = f^{d(x)} \circ g_y(t) = f^{d(x)+d(t)}(y)$.

б) Если yAt, то также xAt, поэтому $xAg_y(t)$ и $yAf_x(t)$, следовательно, $f_x \circ g_y(t) = f^{d(x)+d(y)} = g_y \circ f_x(t)$.

в) Если $t \in T_{m,n} \backslash K$, то $n \geqslant 1$, $g_y(t) = h^n \circ f^{u(e)+m}(y)$ и, в силу (16), $g_y(t) \notin K$, поэтому

$$f_x \circ g_y(t) = f^{d(x)} \circ h^n \circ f^{u(e)+m}(y) = \begin{cases} h^{n-d(x)} \circ f^{ue+m}(y) & \text{если } n > d(x), \\ f^{u(e)+m+d(x)-n}(y) & \text{если } n \leqslant d(x). \end{cases}$$

Если $n > d(x)$, то $f_x(t) = f^{d(x)}(t) \in T_{m,n-d(x)} \backslash K$, поэтому

$$g_y \circ f_x(t) = h^{n-d(x)} \circ f^{u(e)+m}(y).$$

Если $n \leqslant d(x)$, то $f_x(t) \in T_{m+d(x)-n,0}$, т. е. $f_x(t) \in K$ и $d(f_x(t)) = u(e) + m + d(x) - n$, поэтому

$$g_y \circ f_x(t) = f^{u(e)+m+d(x)-n}(y).$$

г) Если $t \in X \backslash E_f(e)$, то $f_x(t) \in X \backslash E_f(e)$, и перестановочность f_x и g_y тривиально следует из тождественности g_y на $X \backslash E_f(e)$.

(II) Пусть $x \in K$, $y \in X \backslash K$.

а) Если $t \in K$, то также $f_x(t) \in K$, $d(f_x(t)) = d(x) + d(t)$, и $g_y \circ f_x(t) = f^{d(x)+d(t)}(y)$. В то же время $g_y(t) = f^{d(t)}(y)$, и, так как $f^{d(t)}(y) \in K$ только тогда, когда $f^{d(t)}(y) \in H_0$, то будет

$$f_x \circ g_y(t) = f^{d(x)} \circ g_y(t) = f^{d(x)+d(t)}(y).$$

б). Для $t \in T_{m,n} \backslash K$ в точности повторяется (I, в).

в) Для $t \in X \backslash E_f(e)$ рассуждаем, как в (I, г).

(III) Пусть $x \in T_{p,q} \backslash K$, $y \in K$, $y \neq e$.

В силу того, что тождественное преобразование перестановочно с любым преобразованием, оставляем в стороне случай $y = e$.

а) $f_x \circ g_y(e) = f_x(y) = h^q \circ f^{u(e)+p}(y) = g_y(x) = g_y \circ f_x(e)$.

б) Если $t \in K$, $t \neq e$, то $f_x(t) = h^q \circ f^{u(e)+p}(t) \notin K$, $f_x(t) \in T_{p+d(t),q}$, поэтому $g_y \circ f_x(t) = h^q \circ f^{u(e)+p+d(t)}(y)$. С другой стороны,

$$g_y(t) = \begin{cases} f^{d(t)}(y) & \text{если } tAy, \\ f^{d(y)}(t) & \text{если } yAt, \end{cases}$$

$$f_x \circ g_y(t) = \begin{cases} h^q \circ f^{u(e)+p+d(t)}(y) & \text{если } tAy, \\ h^q \circ f^{u(e)+p+d(y)}(t) = h^q \circ f^{u(e)+p+d(t)}(y) & \text{если } yAt, \end{cases}$$

так как, учитывая (21),

$$f^{u(e)+d(y)}(t) = f^{u(e)+d(y)+d(t)}(e) = f^{u(e)+d(t)}(y).$$

в) Если $t \in T_{m,n} \backslash K$, то

$$f_x(t) = h^q \circ f^{u(e)+p}(t) \in \begin{cases} T_{m,n+q-u(e)-p} & \text{если } n > u(e) + p, \\ T_{m+p+u(e)-n,q} & \text{если } n \leqslant u(e) + p. \end{cases}$$

В том и другом случае $f_x(t) \notin K$, поэтому

$$g_y \circ f_x(t) = \begin{cases} h^{n+q-u(e)-p} \circ f^{u(e)+m}(y) & \text{если } n > u(e) + p, \\ h^q \circ f^{2u(e)+m+p-n}(y) & \text{если } n \leqslant u(e) + p. \end{cases}$$

С другой стороны,

$$f_x \circ g_y(t) = h^q \circ f^{u(e)+p} \circ h^n \circ f^{u(e)+m}(y) = \begin{cases} h^{n+q-u(e)-p} \circ f^{u(e)+m}(y) & \text{если } n > \\ > u(e) + p, & \\ h^q \circ f^{2u(e)+m+p-n}(y) & \text{если } n \leqslant u(e) + p. \end{cases}$$

г) Для $t \in X \backslash E_f(e)$ рассуждаем, как в (I, г)

(IV) Пусть $x \in T_{p,q} \backslash K$, $y \in X \backslash K$.

Проверка этого случая по существу ничем не отличается от предыдущего, даже немного упрощается в пункте б).

(V) Пусть $x \in X \backslash E_f(e)$, y-произвольное.

В силу того, что f_x постоянная из множества $X \backslash E_f(e)$, на котором все g_y тождественны, для всех $t \in X$ будет $f_x \circ g_y(t) = x = g_y(x) = g_y \circ f_x(t)$.

Теорема 1 доказана.

2. Остается рассмотреть класс тех преобразований f, не все компоненты которых пересекаются с Q_f. Начнем со следующего вспомогательного утверждения:

Лемма 3. *Пусть f-преобразование множества X. Если $f^m(x) = f^n(y)$ при $m < n$, и для некоторого преобразования g, перестановочного с f, имеет место $g(x) = y$, то множество $Q_f(x) = E_f(x) \cap Q_f$ непусто.*

Доказательство. Для преобразования $h = f^{n-m-1} \circ g$, перестановочного с f, и элемента $z = f^{m+1}(x)$ будет

$$f \circ h(z) = f \circ f^{n-m-1} \circ g \circ f^{m+1}(x) = f^{n+1}(y) = f^{m+1}(x) = z,$$

$$f \circ h^{k+1}(z) = h^k \circ f \circ h(z) = h^k(z),$$

следовательно, $z \in Q_f$.

Теорема 2. *Преобразование f множества X, не все компоненты которого пересекаются с Q_f, является сдвигом некоторой полугруппы с единицей тогда и только тогда, если существует элемент e такой, что для любого $x \in X$ равенство $f^m(e) = f^n(x)$ влечет $m \geqslant n$.*

Доказательство. Пусть f является левым сдвигом полугруппы с единицей e на множестве X. Если для элемента x выполняется $f^m(e) = f^n(x)$, то $x \in E_f(e)$, и, так как $Q_f(e) = \emptyset$, и для правого сдвига g_x имеем $g_x(e) = x$, в силу леммы 3 должно быть $m \geqslant n$.

Покажем сейчас достаточность условия теоремы.

Если $f^m(e) = f^n(x)$, то разность $m - n$ определяется элементом x однозначно; обозначм ее через $d(x)$.

Совершенно одинаково, как в доказательстве теоремы 1, можно определить на $E_f(e)$ отношение частичной упорядоченности P и совершенный квазипорядок A. Тогда системами сдвигов $F = \{f_x\}$ и $G = \{g_y\}$ для требуемой полугруппы могут служить, например, следующие преобразования:

для $x \in E_f(e)$

$$f_x(t) = \begin{cases} f^{d(t)}(x) & \text{если } tAx, \\ f^{d(x)}(t) & \text{если } xAt \text{ или } t \in X \backslash E_f(e), \end{cases}$$

для $x \in X \backslash E_f(e)$

$$f_x(t) = x \qquad \text{для всех } t \in X;$$

для $y \in E_f(e)$

$$g_y(t) = \begin{cases} f^{d(t)}(y) & \text{если } tAy, \\ f^{d(y)}(t) & \text{если } yAt, \\ t & \text{для } t \in X \backslash E_f(e), \end{cases}$$

для $y \in X \backslash E_f(e)$

$$g_y(t) = \begin{cases} f^{d(t)}(y) & \text{для } t \in E_f(e), \\ t & \text{для } t \in X \backslash E_f(e). \end{cases}$$

Проверка перестановочности опять сводится к прямым выкладкам. Теорема 2 доказана.

Таким образом, вопрос о том, когда данное преобразование является сдвигом полугруппы с единицей, решен полностью. Сейчас мы в состоянии избавиться от требования единицы.

Теорема 3. *Преобразование φ множества X являестя внутренним сдвигом некоторой полугруппы S с множеством элементов X тогда и только тогда, если оно или является сдвигом полугруппы с единицей, или может быть продолжено до такого путем присоединения одного элемента ξ к множеству X и подходящего доопределения преобразования φ на этом элементе.*

Доказательство. Необходимость непосредственно вытекает из возможности внешнего присоединения единицы к полугруппе S.

С другой стороны, предположим, что преобразование $\bar{\varphi}$ множества $X = X \cup \{\xi\}$ является сдвигом полугруппы е единицей, но преобразование φ само не является внутренним сдвигом никакой полугруппы.

Заметим сначала, что $Q_\varphi = Q_{\bar{\varphi}}$, $r(x) = \bar{r}(x)$, и также, в случае существования $u(x) = \min \{n : \varphi^n(x) \in Q_\varphi\}$, будет $u(x) = \overline{u}(x)$ для всех $x \in X$, причем чертой отмечены порядки и уровни, соответствующие преобразовфнию $\bar{\varphi}$. Покажем, что только присоединеный элемент ξ может быть единицей полугруппы со сдвигом $\bar{\varphi}$.

а) Пусть не все компоненты преобразования $\bar{\varphi}$ пересекаются с $Q_{\bar{\varphi}}$. Тогда по теореме 2 существует элемент $e \in X$ такой, что равенство $\bar{\varphi}^m(e) = \bar{\varphi}^n(x)$ влечет всегда неравенство $m \geqslant n$. Если $e \in X$, то тем более $\varphi^m(e) = \varphi^n(x)$ влечет $m \geqslant n$ для всех $x \in X$, т. е. φ является, в противоречке нашему предположению, сдвигом полугруппы с единицей. Следовательно, $e = \xi$.

б) Если $\bar{\varphi}$ (квази)периодично, то для некоторого $e \in \overline{X}$ имеет место $\overline{u}(e) \geqslant \overline{u}(x)$ и $\bar{r}(e)$ делится на $\bar{r}(x)$ для всех $x \in \overline{X}$. Опять, в случае $e \in X$

было бы преобразование φ сдвигом полугруппы с единицей, значит, $e = \xi$.

в) Если все компоненты преобразования $\bar{\varphi}$ пересекаются с $Q_{\bar{\varphi}}^{-}$ и притом $\bar{\varphi}$ не взаимно однозначно на $Q_{\bar{\varphi}}^{-}$, то опять для некоторого $e \in \bar{X}$ выполняются условия 1.—3. теоремы 1. Притом в случае $e \in X$ выполнение условий 1. и 3. равносильно их выполнению для φ, и выполнение сверх того условия 2. означало бы, что φ является сдвигом полугруппы с единицей. В силу нашего предположения опять $e = \xi$.

Таким образом, преобразование $\bar{\varphi}$ является сдвигом некоторой полугруппы $(\bar{X},)$ с внешней единицей ξ. Имеет место $\bar{\varphi}(\xi) \in X$, так как иначе преобразование φ было бы тождественным и, таким образом, опять сдвигом полугруппы с единицей. Следовательно, для всех $t \in X$ имеет место

$$\varphi(t) = \bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}(\xi \,.\, t) = \bar{\varphi}(\xi) \,.\, t,$$

т. е. φ является сдвигом полугруппы $(X;)$, определяемым элементом $\bar{\varphi}(\xi)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гедрлин З., Горальчик П., *О сдвигах полугрупп I*, *Периодические и квазипериодические преобразования*, Mat. časop. *18* (1968), 161—176.

[2] Горальчик П., Гедрлин З., *О сдвигах полугрупп II*, *Сюръективные преобразования*, Mat. časop. *18* (1968), 263—272.

Поступило 17. 11. 1966.

Katedra základních matematických disciplin
na matematicko-fysikální fakultě
Karlovy university,
Praha