Pavel Bartoš

O niektorých diofantických rovniciach

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 4, 334--335

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126664

Matematický časopis 19 (1969), No. 4

O NIEKTORÝCH DIOFANTICKÝCH ROVNICIACH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Nech n, a_0, a_1, ..., a_n sú prirodzené čísla. Ak prirodzené čísla x_1, x_2, ..., x_{n+1} splňujú vzťah

$$(1) \qquad a_0 + a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_1^2x_2^2 \ldots x_n^2 = x_1x_2 \ldots x_nx_{n+1} ,$$

musí zrejme platiť $x_1|a_0$. Ak (1) vydelíme hodnotou x_1, dostaneme rovnicu rovnakého typu pre $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$, ktorej koeficienty závisia od x_1. Z toho indukciou ľahko dostaneme:

Veta 1. *Prirodzené čísla x_1, x_2, ..., x_{n+1} splňujú rovnicu* (1) *práve vtedy, keď platí*

$$x_1|b_1, x_2|b_2, \ldots, x_n|b_n, x_{n+1} = b_{n+1} ,$$

kde $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ určíme rekurentne vzťahmi $b_1 = a_0$, $b_{k+1} = b_{k+1}(x_1, \ldots, x_k) = b_k : x_k + a_kx_1x_2 \ldots x_k (k = 1,2, \ldots, n)$.

Rovnica (1) má teda vždy riešenie v prirodzených číslach a počet týchto riešení je zrejme konečný. (Analogický postup vedie k riešeniu rovnice $a_0 + a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_1^2x_2^2 \ldots x_n^2 = bx_1x_2 \ldots x_nx_{n+1}$, ak ono existuje.) Voliac $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_n = b_n$, dostaneme riešenie rovnice (1), ktoré nazveme maximálnym. Je teda určené vzťahmi $x_i = \beta_i (i = 1,2, \ldots, n + 1)$, kde

$$(2) \qquad \beta_1 = a_0, \quad \beta_{k+1} = 1 + a_k\beta_1\beta_2 \ldots \beta_k .$$

Maximálne riešenie rovnice (1) určuje súčasne jedno riešenie tzv. zovšeobecnenej optickej rovnice

$$(3) \qquad \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{a_n}{x_n - 1} = \frac{1}{a_0}.$$

Veta 2. *Ak sú čísla β_1, β_2, ..., β_{n+1} určené podľa* (2), *sú čísla $x_i = \beta_{i+1}$, $i = 1,2, \ldots, n$ riešením rovnice* (3).
Dôkaz možno ľahko vykonať indukciou.

Pomocou tejto vety ľahko odvodíme existenciu a tvar jedného riešenia rovnice

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{a_n}{x_n - a_n} = \frac{1}{a_0},$$

ktoré splňuje podmienky $a_i | x_i (i = 1,2, \ldots, n)$. Ak je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, splňuje tieto podmienky už každé riešenie rovnice (3). Ak je navyše $a_0 = 1$, potom položiac $x_i = \xi_i (i = 1,2, \ldots, n - 1)$, $x_n = \xi_n + 1$, prejde (3) do tzv. optickej rovnice

$$\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \cdots + \frac{1}{\xi_n} = 1 \tag{4}$$

a riešenie získané podľa druhej vety prejde do tzv. extrémneho riešenia rovnice (4) vyšetrovanej v [1], ktoré je určené vzťahmi

$$\xi_1 = 2, \ \xi_i = 1 + \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{i-1} (i = 2,3, \ldots, n - 1), \ \xi_n = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n-1}.$$

LITERATÚRA

[1] Erdös P., *Az* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{a}{b}$ *egyenlet egészszámu megoldásairól*, Mat. Lapok *1* (1950), 192—210.

Došlo 4. marca 1968.

ON CERTAIN DIOPHANTINE EQUATIONS

Pavel Bartoš

Summary

Let the natural numbers n, $a_i (i = 0,1, \ldots, n)$ be given. If the numbers $\beta_i (i = 1, \ldots, n + 1)$ are given by the recurrent relations

$$\beta_1 = a_0, \quad \beta_{k+1} = 1 + a_k \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k,$$

then the numbers $x_i = \beta_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ form a solution of the equation

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{a_n}{x_n - 1} = \frac{1}{a_0}.$$