Matematicko-fyzikálny časopis

Robert Karpe

O rozkladoch množiny na k nepárných množín

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 16 (1966), No. 3, 213--214

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126623`

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

O ROZKLADOCH MNOŽINY NA k NEPÁRNYCH MNOŽÍN

ROBERT KARPE, Brno

Definícia. *Párnou resp. nepárnou množinou nazveme množinu o párnom resp. nepárnom počte prvkov*; ďalej *párnym resp. nepárnym rozkladom na množine nazveme jej rozklad na párne resp. nepárne podmnožiny.*

Ako vieme, Stirlingovo číslo 2. druhu, ktoré označíme ${}^1S(n, k)$, udáva počet všetkých možných rozkladov množiny n rôznych prvkov na k neprázdnych podmnožín.

V našom článku riešime analogickú úlohu, vznikajúcu za dodatočnej podmienky, aby všetky podmnožiny rozkladu boli nepárne. Nech teda znak ${}^2S(n, k)$ označuje počet rozkladov množiny n rôznych prvkov na k nepárnych podmnožín.

Definujeme ${}^2S(0, 0) = 1$, ${}^2S(r, 0) = {}^2S(0, s) = 0$ pre $r > 0$, $s > 0$.

Pre ${}^2S(n, k)$ platí vzorec analogický ku známemu vzorcu: ${}^1S(n, k) = {}^1S(n - 1, k - 1) + k \, . \, {}^1S(n - 1, k)$, pozri napríklad [1], str. 33.

Veta. *Pre ľubovoľné prirodzené čísla $n \geq 2$, $k \geq 2$ platí:*

$${}^2S(n, k) = {}^2S(n - 2, k - 2) + k^2 \, . \, {}^2S(n - 2, k).$$

Dôkaz. Nech $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je množina n od seba rôznych prvkov. Položme $N = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ a označme $R(X, s)$ rozklad množiny X na s neprázdnych podmnožín.

Nech $R(N, k - 2)$ je nepárny rozklad. Potom bude nepárnym rozkladom tiež $R(M, k)$, utvorený pridaním dvoch jednoprvkových podmnožín (x_{n-1}), (x_n) ku $R(N, k - 2)$.

Zvoľme teraz istý nepárny rozklad $R(N, k)$. Ak začleníme do množín rozkladu $R(N, k)$ prvky x_{n-1}, x_n (a to je možné spolu k^2 spôsobmi), môžu nastať dva prípady:

1. x_{n-1}, x_n, ležia v tej istej množine,
2. x_{n-1}, x_n, ležia každý v inej množine.

V prvom prípade je výsledný rozklad $R(M, k)$ nepárny. V druhom prípade je možné výsledný rozklad $R(M, k)$ urobiť nepárnym takto: Nech $x_{n-1} \in M_1$, $x_n \in M_2$, $M_1 \neq M_2$ (množiny rozkladu), takže M_1, M_2 sú párne. Ak je x_i prvok s najnižším indexom v množine $M_1 \cup M_2$, a ak platí napríklad $x_i \in M_1$, preradíme x_i do M_2. Vidno, že aspoň jeden z prvkov x_{n-1}, x_n, nebude sám vytvárať podmnožinu nového rozkladu, vzniknutého preradením prvku x_i.

Pretože všetkých nepárnych rozkladov $R(N, k-2)$, resp. $R(N, k)$ je ${}^2S(n-2, k-2)$, resp. ${}^2S(n-2, k)$, vyplýva odtiaľ bezprostredne veta pre $n \geq 3$, $k \geq 3$. Rozšírenie platnosti vety pre $n \geq 2$, $k \geq 2$, je vzhľadom na uvedené definície triviálne.

Položme teraz pre stručnosť ${}^2S(n, k) = S_n^k$. Potom $F_k(x) = S_k^k + S_{k+2}^k \cdot x^2 + S_{k+4}^k \cdot x^4 + \ldots$ je vytvárajúca funkcia pre ${}^2S(n, k)$.

Analogickým postupom ako v [2], str. 168–170, dostaneme vzhľadom na uvedenú vetu:

$$(1 - k^2x^2) \cdot F_k(x) = F_{k-2}(x);$$

odtiaľ vyplýva pre nepárne k:

$$F_k(x) = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - 9x^2)(1 - 25x^2) \ldots (1 - k^2x^2)}$$

a pre párne k:

$$F_k(x) = \frac{1}{(1 - 4x^2)(1 - 16x^2)(1 - 36x^2) \ldots (1 - k^2x^2)}.$$

Číslo ${}^2S(n, k)$ je vo $F_k(x)$ koeficientom pri x^{n-k}.

LITERATÚRA

[1] Riordan J., *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New York–London 1958.
[2] Netto E., *Lehrbuch der Combinatorik*, Leipzig 1901.

Došlo 18. 11. 1963.

Katedra matematiky strojní fakulty
Vysokého učení technického,
Brno

THE PARTITION OF A SET INTO k ODD SETS

Robert Krape

Summary

The well-known definition of Stirling's number of the second kind is supplemented by a condition, stating that every set of the partition must contain an odd number of elements.

For numbers so defined and denoted by the symbol ${}^2S(n, k)$ an analogous basic relation holds good, and their generating function can also be found in an analogous way.