

Matematický časopis

Ján Jakubík; Milan Kolibiar
K šesťdesiatke akademika Štefana Schwarzza

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 2, 99--111

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126604>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

K ŠEŠŤDESIATKE AKADEMIKA ŠTEFANA SCHWARZA

J. JAKUBÍK—M. KOLIBIAR

Dňa 18. mája 1974 dožíva sa 60 rokov popredný československý matematik akademik Štefan Schwarz. S jeho menom sa spája nielen rozvoj matematiky na Slovensku, výchova a usmerňovanie vedeckého dorastu v matematike, ale aj rozvoj širších oblastí našej národnej kultúry.

Prof. Schwarz sa narodil v Novom Meste nad Váhom. Stredoškolské štúdium ukončil v roku 1932 vo svojom rodisku na tamojšom reformnom reálnom gymnáziu. Vznik svojho záujmu o matematiku opísal sám nedávno v spomienkovom článku [C48], ktorý okrem toho aj sugestívnym spôsobom zachycuje atmosféru začínajúcich matematikov (a nielen matematikov) začiatkom tridsiatych rokov.

Akademik Š. Schwarz začal svoju vedeckú činnosť na Karlovej univerzite v Prahe, kde v r. 1936 ukončil štúdiá a pôsobil do roku 1939 ako asistent. V roku 1939 prešiel ako asistent na novozriadenú Slovenskú vysokú školu technickú do Martina. Na tejto škole, ktorá sa neskôr presťahovala do Bratislavy, pôsobí dodnes. R. 1946 sa habilitoval za docenta na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského a r. 1947 bol menovaný profesorom matematiky. Roku 1952 bol zvolený za člena-korešpondenta Československej akadémie vied. Za riadneho člena — akademika Slovenskej akadémie vied — bol menovaný pri uzákonení Slovenskej akadémie vied — v roku 1953. V roku 1960 bol zvolený za akademika Československej akadémie vied. V Slovenskej akadémii vied a Československej akadémii vied zastával rad významných funkcií. V rokoch 1965—1970 bol predsedom Slovenskej akadémie vied a podpredsedom Československej akadémie vied. Od 1. januára 1964 je externým riaditeľom Matematického ústavu Slovenskej akadémie vied.

Životné jubileum zastihuje akademika Schwarza v období intenzívnej vedeckej práce. Vzhľadom na hĺbku a rozsah výsledkov jeho vedeckej práce nie je možné v tomto krátkom článku podať súborné zhodnotenie jeho vedeckých prác; dajú sa stručne zaznamenať len najdôležitejšie tematické okruhy, do vývoja ktorých v podstatnej miere zasiahol, a ukážky niektorých typických výsledkov akademika Schwarza z týchto tematických oblastí.

Vedecké práce akademika Schwarza sa sústreďujú na algebru a teóriu čísel.

K orientácii na algebraické otázky súvisiace s teóriou čísel inšpiroval Š. Schwarz jeho učiteľ, významný matematik Karel Petr, profesor Karlovej univerzity.

Nadväzujúc na výsledky K. Petra zaoberal sa Š. Schwarz vo svojich prvých prácach otázkami, týkajúcimi sa ireducibility polynómov nad obormi integrity. Do tejto skupiny patria práce [1], [4], [7], [9], [11], [15]. Išlo o problematiku, ktorú je možné v rámci vývinu matematiky považovať za klasickú; získať nové výsledky v tejto do značnej hĺbky prebadanej oblasti bolo, prirodzene, náročnou a obťažnou úlohou.

Ďalšie práce akademika Schwarza sú venované problematike rozložiteľnosti polynómov nad konečným telesom na súčin ireducibilných polynómov. Sú to články [2], [3], [10], [16], [38], [49], [50], [55], [56]. Jednou z hlavných úloh, ktoré si v týchto prácach Š. Schwarz položil, bolo stanovenie explicitných formúl pre určenie počtu σ_k navzájom rôznych ireducibilných činiteľov stupňa k pre daný polynóm $f(x)$ nad konečným telesom. V tomto smere najprv zovšeobecnil výsledky, vzťahujúce sa na binomické polynómy mod p , ako aj výsledky Radosa, Hurwitza a Turána. Potom riešil (najmä v prácach [38] a [50]) túto otázku celkom všeobecne.

Nech $f(x)$ je polynóm stupňa m nad konečným telesom $GF(q)$. Uvažujme o systave

$$x^{ia} \equiv \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} x^j \pmod{f(x)} \quad (0 \leq i \leq m-1)$$

a nech \mathbf{C} je matica (c_{ij}) . V citovaných prácach akademika Schwarza je odvodený rad výsledkov o vzťahoch medzi maticou \mathbf{C} a hodnotami σ_k .

Otázka rozložiteľnosti polynómov nad konečným telesom na súčin ireducibilných polynómov nadobudla v posledných rokoch mimoriadnu aktuálnosť v súvislosti s teóriou kódovania, ako aj s radarovou technikou. E. Berlekamp vypracoval v rokoch 1967–71 metódy strojového riešenia tejto úlohy. V práci [D7] uvádza, že Š. Schwarz našiel (v roku 1956) ako prvý zásadné riešenie a objavil význam matice \mathbf{C} , ktorá je podkladom metódy pre strojové riešenie uvedenej úlohy.

Značný ohlas v matematickej literatúre mali články [12], [13], [14], [17], [19], [35], v ktorých sa študuje riešiteľnosť rovnice

$$(1) \quad a_1 x_1^k + \dots + a_s x_s^k + b = 0$$

nad konečnými, resp. lokálnymi telesami. Špeciálne sa skúmal prípad $a_1 = \dots = a_s = 1$ (ide o tzv. Waringov problém); pre tento prípad dosiahol Š. Schwarz zostrenie výsledkov Tornheima a Rédeiho. Ako typický uveďme nasledujúci výsledok dokázaný v [12]: Nech n, k sú prirodzené čísla a nech p je prvočíslo, $\delta = (p^n - 1, k) \leq p - 1$. Nech $a_1 = \dots = a_s = 1$. Potom

existuje najmenšie prirodzené číslo s s tou vlastnosťou, že rovnica (1) má riešenie s hodnotami $x_i \in GF(p^n)$ pre každé $b \in GF(p^n)$; pritom $1 \leq s \leq \delta$.

Podstatná časť vedeckých prác akademika Schwarza je venovaná teórii pologrúp. Š. Schwarz patrí medzi matematikov, ktorí vybudovali základy tejto teórie. V období, keď vyšla jeho prvá práca z tejto oblasti (1943), neexistovala ešte nijaká teória pologrúp. Existovala kniha A. K. Suškeviča [D6] a v rokoch 1941—43 vyšlo niekoľko málo prác A. H. Clifforda, P. Dubreila a D. Reesa. Netreba zdôrazňovať, že tieto práce boli v tom čase u nás celkom neprístupné. Už prvá práca Š. Schwarza o pologrupách [8] prináša nielen aktuálne výsledky, ale aj rad metodických prostriedkov na skúmanie špeciálnych otázok teórie pologrúp, ktoré sa neskôršie dobre osvedčili. V tejto práci sa po prvý raz objavuje v literatúre pojem maximálnych grúp danej pologrupy, pojem radikálu pologrupy a v podstate aj pojem ideálu pologrupy, vedome použitý na štúdium štruktúry pologrúp. V celom rade prác objasnil Š. Schwarz význam idempotentov a ideálov pre štruktúru pologrúp. Obzvlášť detailne sa zaoberal pologrupami, ktoré sa dajú rozložiť tak, že príslušné triedy rozkladu tvoria pologrupy špeciálnych vlastností (napr. grupy, ideály určitých typov, pologrupy spĺňajúce pravidlá o krátení, a pod.). Od štúdia konečných pologrúp prešiel na skúmanie periodických pologrúp [22], ktoré majú s konečnými pologrupami niektoré analogické vlastnosti. Pre uvedené triedy pologrúp získal rad hlbokých štruktúrnych viet.

V práci [20] je dokázaná táto základná veta. Jednoduchá pologrupa, ktorá má idempotent, je úplne jednoduchá práve vtedy, keď má aspoň jeden minimálny ľavý ideál. V práci [21] sa po prvý raz študuje podrobne soker pologrupy. (Výsledky tejto práce sú z veľkej časti prevzaté do kapitoly 6 knihy [D1, Vol. 2.]

Ďalšími triedami pologrúp, ktoré akademik Schwarz podrobne prebádal, sú duálne pologrupy [46], [75], [76]. Duálnymi pologrupami sa nazývajú pologrupy s nulovým prvkom, v ktorých systémy pravých a ľavých ideálov splývajú so systémami uzavretých množín pri Galoisovej konexii danej reláciou $xy = 0$. Ako typický výsledok uvedme nasledujúcu vetu o duálnych pologrupách, dokázanú v [76]. Nech S je duálna pologrupa bez nilpotentných ideálov. Potom sa S dá vyjadriť vo tvare

$$S = \cup M_\lambda, M_\alpha \cdot M_\beta = M_\alpha \cap M_\beta = 0 \quad \text{pre } \alpha \neq \beta,$$

pričom každá z množín M_λ je minimálny ideál v S a zároveň je M_λ duálnou pologrupou. Každá z pologrúp M_λ je pritom tzv. Brandtova pologrupa. V prácach [46] a [76] je dokázaný aj rad viet pre duálne pologrupy, ktoré majú nenulový radikál.

Algebraické výsledky získané Schwarzom (predovšetkým v prácach [8],

[20]—[25]) použil neskôr A. D. Wallace (a jeho žiaci) pri rozvinutí teórie topologických pologrúp.

Ďalšia séria prác akademika Schwarza sa týka charakterov pologrúp. Charakterom komutatívnej pologrupy S sa rozumie zobrazenie χ pologrupy S do množiny všetkých komplexných čísel, také, že $\chi(a \cdot b) = \chi(a)\chi(b)$ pre každé $a, b \in S$. Ak pre charakter χ , ψ položíme $(\chi\psi)(a) = \chi(a)\psi(a)$, potom množina všetkých charakterov na S tvorí pologrupu S^* . Pre viaceré triedy pologrúp podarilo sa Š. Schwarzovi popísať štruktúru alebo dôležité vlastnosti pologrupy S^* (pre konečné komutatívne pologrupy v článkoch [26], [27], [28], pre topologické kompaktné pologrupy v článkoch [32], [36], pre multiplikatívnu pologrupu zvyškových tried mod n v práci [43]).

Ako príklad uvedme niektoré z výsledkov článku [26]. Nech S je konečná komutatívna pologrupa a nech $E = \{e_i\}$ je množina všetkých idempotentov pologrupy S . Pripomeňme najprv, že každému idempotentu e_i zodpovedá maximálna podpologrupa P_i a každá pologrupa P_i obsahuje maximálnu grupu G_i (porov. [8]). V práci [26] sa dokazuje, že množina E^* všetkých idempotentov v S^* je polozväz, duálne izomorfný s polozväzom $P = P' \cup \{S\}$, kde P' je množina všetkých prvoideálov pologrupy S . Ďalej Š. Schwarz dokazuje, že S^* je zjednotením disjunktných grúp G_i^* (pričom každá grupa G_i^* je izomorfná s G_i) a grupy $\{\chi_0\}$, kde χ_0 je jednotkový prvok pologrupy S^* . Odvodzuje sa tiež explicitné pravidlo pre násobenie idempotentov pologrupy S^* s grupami G_i^* . Schwarzove výsledky z teórie charakterov (podrobne reprodukované napr. v knihe [D1], Vol. 1, Chap. 5) sa stali východiskom radu prác viac ako 20 zahraničných autorov. Medzičasom boli nájdené aj široké triedy pologrúp, pre ktoré platia vety analogické klasickým vetám Pontrjaginovým z teórie lokálne kompaktných grúp.

Od štúdia charakterov pologrúp prešiel Š. Schwarz k špeciálnejšej, ale dôležitej problematike, a to k štúdiu mier na konečných pologrupách a na topologických Hausdorffových kompaktných pologrupách. Množina mier na pologrupe s operáciou konvolúcie tvorí pologrupu. Štúdium vlastností tejto pologrupy tvorí obsah prác [40], [41], [54], [53] a [57]. Schwarzove výsledky v tejto oblasti zasadené do rámca neskoršieho vývinu sú podrobne zhodnotené napr. v prehľadnej práci Williamsona [D8]. Ako typické výsledky v tomto smere spomeňme niektoré výsledky práce [40].

Nech S je kompaktná Hausdorffova pologrupa. Predpokladajme, že pre každú otvorenú podmnožinu X je množina Xa tiež otvorenou množinou. Nech μ je miera na Borelových podmnožinách množiny S , $\mu(S) = 1$. Miera μ sa nazýva sprava invariantnou, ak platí $\mu(E) = \mu(Ea)$ pre každú Borelovu množinu za predpokladu, že aj Ea je Borelovou množinou; analogicky sa definuje zľava invariantná miera. V práci [40] sa dokazuje, že ak S má ľavú invariantnú mieru aj pravú invariantnú mieru, potom už S musí byť grupou. Sú nájdené

nutné a postačujúce podmienky pre existenciu pravej invariantnej miery na S formulované pomocou existencie pravého ideálu s určitými vlastnosťami. V obsiahlej práci [53] sú popísané (okrem iného) všetky idempotentné miery na konečných nekomutatívnych pologrupách.

Výsledky, ktoré Š. Schwarz získal pre rozličné triedy abstraktných pologrúp, využíva pri štúdiu dôležitých typov špeciálnych pologrúp. V prácach [61]—[70] študuje pologrupy matíc s nezápornými prvkami a pologrupy stochastických matíc. U prvého typu pologrúp vyšetruje najmä rozloženie nulových prvkov v postupnosti mocnín danej matice. Pre druhú z uvedených tried pologrúp okrem výsledkov o rozložení nenulových prvkov dokazuje rad viet limitného typu. Výsledky týchto prác majú početné aplikácie.

V článkoch [72], [73], [74], [77] [79] sa skúmajú pologrupy binárnych relácií. O tejto tématike existuje v literatúre pomerne veľký počet prác. Články akademika Schwarza prinášajú do tejto problematiky zovšeobecňujúci pohľad a zaraďujú jednotlivé problémy do rámca teórie pologrúp. Aktuálnosť tématiky zdôrazňujú jej aplikácie v teórii automatov.

Spomeňme tu niektoré z výsledkov práce [72], ktorá — hoci vyšla len pred tromi rokmi — našla už veľký ohlas v literatúre. Väčšina výsledkov práce má kombinatorický charakter. Nech S je pologrupa všetkých binárnych relácií na konečnej množine M obsahujúcej n prvkov. Pre $\varrho \in S$ označme $d(\varrho)$ počet prvkov maximálnej grupy, ktorá je obsiahnutá v pologrupe generovanej prvkom ϱ . Nech $r(\varrho)$ je najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré ϱ^r je idempotentným prvkom v S . Binárna relácia ϱ sa nazýva reducibilnou, ak príslušná booleovská matica je reducibilná. Dokazuje sa, že ϱ je ireducibilná práve vtedy, keď jej tranzitívny uzáver je kvadratická binárna relácia. Relácia ϱ sa dá jednoznačným spôsobom rozložiť na disjunktný súčet svojich maximálnych ireducibilných podrelácií a takých podrelácií, ktoré neobsahujú žiadne ireducibilné relácie. Relácia ϱ neobsahuje ireducibilné podrelácie práve vtedy, keď jej tranzitívny uzáver je nilpotentným prvkom v S . Ak ϱ je ireducibilná, potom ľubovoľné dve z $d(\varrho)$ po sebe nasledujúcich mocnín relácie ϱ sú navzájom disjunktné. Číslo $r(\varrho)$ sa v tomto prípade rovná najmenšiemu z prirodzených čísiel s , pre ktoré ϱ^s je ekvivalencia na množine M . Výsledky tejto práce majú úzky vzťah k teórii nezáporných matíc.

V práci [73] bol rozriešený problém kombinatorického rázu týkajúci sa binárnych relácií, ktorý zostával dlho nerozriešeným.

Veľká časť Schwarzových výsledkov z teórie pologrúp je dnes prístupná v knižnej forme najmä v monografiách E. S. Ljapin [D3], A. H. Clifford—G. B. Preston [D1], A. B. Paalman—de Miranda [D4], ako i v ďalších knihách z teórie pologrúp ([D2], [D5]). Mnohé z nich sa stali medzičasom všeobecným majetkom špecialistov.

Jeho výsledky sa citujú vo viac ako 250 prácach iných matematikov z mno-

hých krajín sveta. Niektoré jeho výsledky sa uvádzajú aj v učebniciach (napr. v knihách A. A. Alberta, P. Dubreila, L. Rédeiho, A. A. Costu) alebo monografiách z iných oblastí (R. H. Bruck, E. Hewitt—K. A. Ross, G. Moisil, U. Grenander).

Charakteristickou črtou vedeckých prác Š. Schwarza je úsilie doviest výsledky do tvaru čo najviac explicitného. Tým úsilím je poznamenaná aj metóda prof. Schwarza: dôsledne dáva prednosť postupom konštruktívnym a dopracováva úvahy až do stavu čo najviac uzavretého a k úplnému popisu štruktúry skúmaných objektov.

Táto črta sa prejavuje aj v knihách a popularizačných článkoch akademika Schwarza, ktoré sledujú pedagogické ciele. Čitateľovi ukazuje „zadné myšlienky“ teórie a dovádza ho až k aplikáciám teórie. Štýl vykladu v týchto prácach je svieži a nákazlivý, dokáže vzbudiť záujem čitateľa. Táto metodika sa ešte znásobuje pri jeho praktickej pedagogickej činnosti. Jeho prednášky sa považujú za jedny z najlepších. (Písatelia týchto riadkov vďaka tejto metóde prof. Schwarza za mnohé podnety a podnietenie záujmu.)

Prof. Schwarz vedel okolo seba za posledných 20 rokov sústrediť rad slovenských matematikov, ktorí publikovali práce z teórie pologrúp (J. Abrhan, J. Bosák, I. Fabrici, R. Hrmová, J. Ivan, J. Kajan, B. Kolibiarová, D. Krajňáková, F. Krňan, B. Parížek, L. Satko, R. Šulka). Udržiava osobný a písomný styk s mnohými matematikmi v zahraničí a má tak aj rad nepriamych žiakov vo viacerých krajinách sveta.

Ako človek so širokým matematickým rozhľadom, presahujúcim ďaleko hranice algebry a teórie čísel, bol školiteľom viac ako 20 kandidátov vied, často aj z odborov dosť vzdialených jeho užšej špecializácii. Treba výslovne poznamenať, že i keď jeho vlastná vedecká tvorba je zameraná skôr teoreticky, má rozsiahle znalosti z aplikácií matematiky na fyzikálne a technické vedy. Nejde len o klasickú mechaniku a matematickú fyziku, z ktorých konal po roky prednášky, ale aj o rozsiahle partie diskkrétnej matematiky, ktoré sa v súvislosti s rozvojom počítačov dostávajú do popredia záujmu širokých kruhov matematikov i inžinierov. Po roky koná prednášky postgraduálneho charakteru pre pracovníkov vysokých škôl, vedeckých a výskumných ústavov a pomáha tak šíriť matematickú kultúru medzi širšie vrstvy vedeckých pracovníkov, ktorí sa dnes bez matematiky sotva zaobídu.

Pedagogická činnosť profesora Schwarza sa neobmedzuje na činnosť na Slovenskej vysokej škole technickej. Prednášal dlhé roky na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského, a to v čase, keď to bolo najviac potrebné — v začiatkoch. Nemalý vplyv na výchovu matematikov majú aj už spomenuté jeho knihy a veľký rad článkov v časopisoch. Ako hlavný redaktor Matematického časopisu, člen redakčnej rady Czechoslovak Mathematical Journal a Semigroup Forum recenzoval, doplňoval, opravoval desiatky prác iných

autorov. Pre *Mathematical Reviews* napísal viac ako 160 recenzií. Ďalšie recenzie napísal pre *Referativnyj žurnal* a *Zentralblatt für Mathematik*.

Aktívne sa zúčastnil na mnohých matematických kongresoch, konferenciách a zjazdoch. Na pozvania predniesol viac ako 70 prednášok vlastných výsledkov na celom rade univerzít a vedeckých inštitúcií v 12 štátoch.

Akademik Schwarz venoval mnoho času a energie aj organizácii nášho školského a vedeckého života. Pôsobil v rozličných funkciách v rámci Akadémie, v školských a iných kultúrnych a kultúrno-politických inštitúciách. Ako človek hlboko spoločensky angažovaný, žil a žije s problémami celej spoločnosti. V rokoch 1966–1971 bol členom Ústredného výboru KSČ.

Je obdivuhodné – a málokomu sa to tak úspešne podarí – ako dokáže akademik Schwarz zvládnuť všetky tieto práce. Naša spoločnosť ocenila všestrannú a spoločensky veľmi dôležitú činnosť akademika Schwarza mnohými prejavmi uznania. R. 1951 mu bola udelená cena mesta Bratislava a r. 1955 Štátna cena Klementa Gottwalda I. stupňa. V roku 1964 mu bol udelený Rad práce. Je čestným členom Jednoty československých matematikov a fyzikov. Viaceré inštitúcie ho poctili pri rozličných príležitostiach medailami (Univerzita Komenského, Slovenská vysoká škola technická, Československá akadémia vied).

Naša matematická obec a všetci žiaci akademika Schwarza mu srdečne gratulujú k 60. narodeninám a prajú mu veľa zdravia a mnoho zdaru v ďalšej práci pre rozvoj československej matematiky.

ZOZNAM PUBLIKÁCIÍ

A. Pôvodné práce

- [1] Ueber die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzen algebraischen Koeffizienten nach einem Primideal. *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 63, 1939, 112–127.
- [2] Contribution à la réductibilité des polynômes dans la théorie des congruences. *Věstník Král. české spol. nauk*, 1939, č. 7, 1–9.
- [3] Sur le nombre des racines et des facteurs irréductibles d'une congruence donnée. *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 69, 1940, 128–146.
- [4] Ueber einen Satz von S. Lubelski. *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 69, 1940, 147–150.
- [5] Príspevok k číselnej teórii konečných telies. *Prírodovedecká príloha technického obzoru slovenského*, roč. I č. 8, 1940, 75–82.
- [6] Príspevok k teórii kongruencií. *Prírodovedecká príloha technického obzoru slovenského*, roč. II č. 8 a č. 9, 1941, 89–92 a 95–100.
- [7] Príspevok k teórii Galoisových telies. *Prírodovedecká príloha technického obzoru slovenského*, roč. III č. 6, 1942, 1–4.
- [8] Teória pologrúp. *Sborník prác Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity*, č. VI, Bratislava 1943, strán 64.

- [9] A hyperkomplex proof of the Jordan — Kronecker's Principle of reduction. *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 71, 1946, 17—21.
- [10] Príspevok k reducibilite binomických kongruencií. *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 71, 1946, 21—32.
- [11] On the extension of the Jordan—Kronecker's Principle of reduction for inseparable polynomials. *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 73, 1947, 61—64.
- [12] On Waring's Problem for finite fields. *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford, 19, 1948, 123—128.
- [13] On Generalization of Jordan—Kronecker's Principle of reduction. *Věstník Král. české spol. nauk*, 1948, č. 2, 1—29.
- [14] On the equation $a_1x_1^k + \dots + a_kx_k^k + b = 0$ in finite fields. *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford, 19, 1948, 160—164.
- [15] Príspevok k teórii cyklických telies. *Sborník prác SVŠT*, Bratislava, 1948, strán 7.
- [16] On the reducibility of binomial congruences and the least bound of an integer belonging to a given exponent mod p . *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 74, 1949, 1—17.
- [17] On universal forms in finite fields. *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 75, 1950, 45—50.
- [18] O zovšeobecneniach pojmu grupy. *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 74, 1949, 95—113.
- [19] O rovniciach tvaru $c_1x_1^k + \dots + c_sx_s^k = c$ v konečných telesiach. *Časopis pro pěst. mat. a fys.* 74, 1949, 175—176.
- [20] Структура простых полугрупп без нуля. *Чехослов. мат. ж.* 1 (76), 1951, 51—65.
- [20a] On the structure of simple semigroups without zero. *Czechosl. Math.J.* 1 (76), 1951, 41—53.
- [21] О полугруппах имеющих ядро. *Чехослов. мат. ж.* 1 (76), 1951, 259—301.
- [21a] On semigroups having a kernel. *Czechosl. Math. J.* 1 (76), 1951, 229—264.
- [22] К теории периодических полугрупп. *Чехослов. мат. ж.* 3 (78), 1953 7—21.
- [23] О максимальных идеалах в теории полугрупп I. *Чехослов. мат. ж.* 3 78, 1953, 139—153.
- [24] Maximálne ideály a štruktúra pologrúp. *Mat.-fyz. čas. SAV* 3, 1953, 17—39.
- [25] О максимальных идеалах в теории полугрупп II. *Чехослов. мат. ж.* 3 78, 1953, 365—383.
- [26] Теория характеров коммутативных полугрупп. *Чехослов. мат. ж.* 4 (79, 1954, 219—247.
- [27] Характеры коммутативных полугрупп как функции классов. *Чехослов. мат. ж.* 4 (79), 1954, 291—295.
- [28] О некоторой связи Галуа в теории характеров полугрупп. *Чехослов. мат. ж.* 4 (79), 1954, 296—313.
- [29] Characters of commutative semigroups. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954*, Vol. I, Amsterdam 1957, 438.
- [30] К теории Хаусдорфовых бикомпактных полугрупп. *Чехослов. мат. ж.* 5 (80, 1955, 1—23.
- [31] О топологических полугруппах с односторонними единицами. *Чехослов. мат. ж.* 5 (80), 1955, 153—163.
- [32] Характеры бикомпактных полугрупп. *Чехослов. мат. ж.* 5 (80), 1955, 24—28.
- [33] Poznámky k teórii bikompaktných pologrúp. *Mat.-fyz. čas. SAV*, 5, 1955, 86—89.
- [34] Об увеличительных элементах в теории полугрупп. *Доклады Акад. Наук СССР*, 102, Но 4, 1955, 697—698.
- [35] On a type of universal forms in discretely valued fields. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged*, Tom XVII, Fasc. 1—2, 1956, 5—29.

- [36] The theory of characters of commutative Hausdorff bicomact semigroups. Чехослов. мат. ж. 6 (81), 1956, 330—364.
- [37] Ještě o kvadratických polynomech nabývajících mnoha provočíselných hodnot. Časopis pro pěst. mat. 81, 1956, 241—243. (Spolu s J. Maříkom.)
- [38] On the reducibility of polynomials over a finite field. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, 7, 1956, 110—124
- [39] O pologrupách splňujících zoslabené pravidlá krátenia. Mat.-fyz. čas. SAV 6, 1956, 149—158.
- [40] О существовании инвариантных мер на некоторых типах бикомпактных полугрупп. Чехослов. мат. ж. 7 (82), 1957, 165—182.
- [41] On the structure of the semigroup of measures on finite semigroups. Чехослов. мат. ж. 7 (82), 1957, 358—373.
- [42] An elementary semigroup theorem and congruence relation of Rédei. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, Tom XIX, Fasc. 1—2, 1958, 1—4.
- [43] O multiplikatívnej pologrupe zvyškových tried modulo m . Mat.-fyz. čas. SAV 8, 1958, 136—150. (Spolu s B. Parížkom.)
- [44] Remarks on compact semigroups. Colloquium Mathematicum, Wroclaw, Vol. VI, 1958, 265—270. (Spolu s J. Losom.)
- [45] O totálne nekomutatívnych pologrupách. Mat.-fyz. čas. SAV 9, 1959, 92—100. (Spolu s D. Krajiňákovou.)
- [46] On dual semigroups. Czech. Math. Journal 10 (85), 1960, 201—230.
- [47] A theorem on normal semigroups. Czech. Math. Journal 10 (85), 1960, 197—200.
- [48] Semigroups, in which every proper subideal is a group. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, Tom XXI, Fasc. 3—4, 1960, 125—134.
- [49] Об одном классе полиномов над конечным полем. Mat.-fyz. čas. SAV 10, 1960, 68—80.
- [50] О числе неприводимых множителей многочлена над конечным полем. Чехослов. мат. ж. 11 (86), 1961, 213—225.
- [51] Semicharacters of the multiplicative semigroup of integers modulo m . Mat.-fyz. čas. SAV, 11, 1961, 63—74. (Spolu s B. Parížkom.)
- [52] Subsemigroups of simple semigroups. Czech. Math. Journal 13 (88), 1963, 226—239.
- [53] Probabilities on non-commutative semigroups. Czech. Math. Journal 13 (88), 1963, 372—426.
- [54] Probability measures on non-commutative semigroups. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. Proceedings of the Symposium held in Prague in September 1961, pp. 312—315.
- [55] Циклические матрицы и алгебраические уравнения над конечным полем. Mat.-fyz. čas. SAV, 12, 1962, 38—48. (Spolu s K. Horákovou.)
- [56] Заметка об алгебраических уравнениях над конечным полем. Mat.-fyz. čas. SAV 12, 1962, 224—229.
- [57] Convolution semigroup of measures on compact non-commutative semigroups. Czech. Math. Journal 14 (89), 1964, 95—115.
- [58] Product decomposition of idempotent measures on compact semigroups. Czech. Math. Journal 14 (89), 1964, 121—124.
- [59] Homomorphisms of completely simple semigroups onto a group. Mat.-fyz. čas. SAV 12, 1962, 293—300.
- [60] O jednej sústave kongruencií. Poznámka k predchádzajúcemu článku J. Sedláčka. Mat.-fyz. čas. SAV 13, 1963, 103—104.

- [61] A semigroup treatment of some theorems on non-negative matrices. Czech. Math. Journal 15 (90), 1965, 212—229.
- [62] On the structure of the semigroup of stochastic matrices. Publ. of the Math. Inst Hungarian Acad. Vol IX, Series A, Fasc. 3, 1965, 297—311.
- [63] On powers of non-negative matrices. Mat.-fyz. čas. SAV 15, 1965, 215—228.
- [64] Заметка к теории неотрицательных матриц. Сибир. мат. ж. 6, 1955, 207—211.
- [65] A new approach to some problems in the theory of non-negative matrices. Czech. Math. Journal 16 (91), 1966, 274—284.
- [66] New kinds of theorems on non-negative matrices. Czech. Math. Journal 16 (91), 1966, 285—295.
- [67] Some estimates in the theory of non-negative matrices. Czech. Math. Journal 17 (92), 1967, 399—407.
- [68] A note on the structure of the semigroup of doubly stochastic matrices. Mat. čas. 16, 1967, 308—316.
- [69] On the index of imprimitivity of a non-negative matrix. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged 28, 1967, 185—189.
- [70] Algebraic considerations on powers of stochastic matrices. Mat. čas. 18, 1968, 218—228.
- [71] Prime ideals and maximal ideals in semigroups. Czech. Math. Journal 19 (94), 1969, 72—79.
- [72] On the semigroup of binary relations on a finite set. Czech. Math. Journal 20 (95), 1970, 632—679.
- [73] On a sharp estimate in the theory of binary relations on a finite set. Czech. Math. Journal 20 (95), 1970, 703—714.
- [74] On idempotent relations on a finite set. Czech. Math. Journal 20 (95), 1970, 696—702.
- [75] Any 0-simple dual semigroup is completely 0-simple. Semigroup Forum 2, 1971, 90—92.
- [76] On the structure of dual semigroups. Czech. Math. Journal 21 (96), 1971, 461—483.
- [77] The semigroup of fully indecomposable relations and Hall relations. Czech. Math. Journal 23 (98), 1973, 151—163.
- [78] A note on small categories with zero. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, 35, 1973, 161—164.
- [79] Суммы степеней бинарных отношений. Mat. čas. 24, 1974, 161—171.
- [80] Circulant Boolean relation matrices. Czech. Math. Journal. 24 (99), 1974.

B. Knižné publikácie

- [1] O rovnicih. Cesta k vedení č. 1. Nákladem JČMF. Prvé vydanie, Praha 1940., strán 96.
- [2] O rovnicih. Tretie vydanie, Praha 1947, strán 160.
- [3] Algebraické čísla. Přírodovědecké nakl. Edícia Kruh, Praha 1950, strán 292.
- [4] Základy nauky o riešení rovnic. NČSAV, Praha 1958, strán 348.
- [5] Základy nauky o riešení rovnic. Vydavateľstvo SAV, 1967, strán 440.
- [6] Základy nauky o riešení rovnic. Vydavateľstvo SAV, vydanie druhé, 1968, strán 456.

C. Iné publikácie

Referáty, recenzie, popularizačné články a iné

- [1] Niekoľko poznámok k určeniu čísla π . *Rozhledy matematicko-přírodovědecké* 13, 1934, 31–35.
- [2] O Heronových trojuholníkoch. *Rozhledy matematicko-přírodovědecké* 13, 1934, 7–9.
- [3] O jednej úlohe z teórie kuželosečiek. *Rozhledy matematicko-přírodovědecké* 14, 1935, 80–82 a 101–106.
- [4] Algebraické a transcendentné čísla. *Rozhledy matematicko-přírodovědecké* 17, 1937, 133–142.
- [5] Maxima a minima v elementárnej geometrii. *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*, 18, 1938, 87–89, 109–113.
- [6] Cesty a ciele dnešnej matematiky. *Technik*, roč. I, 1940, 20–23.
- [7] Problém štyroch farieb. *Příroda*, roč. I, 1947, 40–43.
- [8] O operátorovej metóde riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc. *Technik*, roč. IV, 1947/48, 81–87.
- [9] Kniha o veľkej tradícii sovietskej teórie čísel (Referát o knihe Б. Н. Делоне, Петербургская школа теории чисел). *Časopis pro pěst. mat.* 76, 1951, 291–300.
- [10] O súčasnej situácii matematiky na Slovensku. *Mat.-fyz. čas. SAV* 3, 1953, 6–8.
- [11] K problematike našich matematických pracovísk. *Časopis pro pěst. matematiky* 3 (78), 1953, 13–16.
- [12] Spolupráca slovenskej a českej vedy. Sborník „Slovenská akadémia vied, jej uzákonenie a ustanovenie“, SAV, 1954, 108–111.
- [13] Akademik Jur Hronec vyznamenaný Radom práce. *Časopis pro pěst. matematiky* 80, 1955, 503–504.
- [14] O katedrách matematiky na vysokých školách v SSSR. *Vysoká škola*, r. 1955, 345–352.
- [15] Matematika a vedecký pokrok. *Naša veda*, roč. 1956, 162–168.
- [16] Bikompakt félesoportok karaktereiról. *Mathematikai Lapok* VI, 1955, 280–281. (Výťah z prednášky v Budapešti.)
- [17] Bikompakt félesoportok maximális ideáljairól. *Mathematikai Lapok* VI, 1955, 281–282. (Výťah z prednášky v Budapešti.)
- [18] Ueber die Existenz invarianter Masse bei kompakten Halbgruppen. *Nachrichten der Österreichischen Math. Gesellschaft* 47/48, 1957, 27. (Výťah z prednášky vo Viedni.)
- [19] Sjazd rakúskych matematikov vo Viedni. *Časopis pro pěst. mat.* 82, 1957, 123–124.
- [20] Akademik Vojtěch Jarník šedesátnikom. *Časopis pro pěst. mat.* 82, 1957, 463–492. (Spolu s Vl. Knichalom.)
- [21] Zpráva o pobyte v Polskej ľudovej republike. *Časopis pro pěst. mat.* 83, 1958, 254.
- [22] Valné zhromaždenie Medzinárodnej matematickej únie v St. Andrews. *Věstník ČSAV* 67, 1958, 673–674.
- [23] Medzinárodný matematický kongres v Edinburghu. *Věstník ČSAV*, 67, 1958, 674–675.
- [24] Akademik Vladimír Kořínek šesťdesiatnikom. *Časopis pro pěst. mat.* 84, 1959, 222–235.
- [25] Kolokvium o teórii grúp a ich zovšeobecneniach v Jánosforrás (v Maďarsku). *Časopis pro pěst. mat.* 85, 1960, 122–123.

- [26] Desiate výročie smrti prof. K. Petra. Pokroky matematiky, fyziky a astronómie 5, 1960, 598—603.
- [27] Azon félesoportok, amelyeknek minden valódi ideálja csoport. Matematikai Lapok X, No 3—4, 1960, 354. (Výťah z referátu v Jánosforrás, 2.—4. septembra 1959.)
- [28] Teória poznania a matematika. Technika (Závodný časopis SVŠT), roč. III, č. 4 a č. 5 (október 1960).
- [29] Sto rokov od smrti Jána Bolyaiho. Práca, 27. januára 1960.
- [30] O ideologických otázkach matematických vied. Otázky marxistickej filozofie 16, 1961, 29—41.
- [31] Na záver diskusie o matematike. Technika (Závodný časopis SVŠT), roč. III, č. 19, máj 1961.
- [32] Sur la réductibilité des polynômes dans les corps finis. Lucrarele celui de al IV-lea Congres al Matematicienilor Romini, Bucuresti 1960, str. 29—30. (Výťah z prednášky na kongrese v Bukurešti v r. 1956.)
- [33] Sur les caractères des demi-groupes compacts. Seminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres); 14 e année, 1960/61. Exposé no 23, 8 pp. Secrétariat mathématique, Paris 1962. (Mimeographed.)
- [34] Les mesures dans les demi-groupes. Seminaires Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres); 14 e année, 1960/61. Exposé no 23 bis, 9 pp. Secrétariat mathématique, Paris 1962. (Mimeographed.)
- [35] O úlohe matematiky v rozvoji modernej vedy. Rudé právo, 2. decembra 1962.
- [36] K nášmu jubileu. Technika, ročník VI (XXIV), október 1963.
- [37] Recenzia knihy: L. Rédei „Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen.“ Acta Sci. Szeged, Tom 25, 1964, 175—176.
- [38] Applications de la théorie des demi-groupes à l'étude des matrices non-négatives. Seminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres) 20 e année 1966 67, no 2. (Strán 8.)
- [39] Sedemdesiatiny akademika Vojtěcha Jarníka. Mat. čas. 17, 1967, 318.
- [40] Halbgruppen und nicht-negative Matrizen. (Výťah z prednášky vo Viedni dňa 12. 1. 1968.) Nachrichten der Österreichischen Math. Gesellschaft, Nr. 89, Mai 1968, p. 70.
- [41] Vedecká práca prof. Karla Petra v oblasti teórie čísel. Časopis pro pěst. mat. 94, 1969, 358—361.
- [42] Spomienka na prof. Jur Hronca. Revue Technika, október—december 1968, str. 19.
- [43] Príhovor na slávnostnom zasadnutí Ukrajinskej Akad. nauk. Vestnik Ukraj Akad. nauk, No. 2, 1969, str. 56.
- [44] On powers of binary relations on a finite set (abstract). Colloquia Mathematica societatis János Bolyai, 4. Combinatorial theory and its applications. Balatonfüred (Hungary), 1969, 997—998.
- [45] On the structure of dual semigroups. Séminarie P. Dubreil, 23 e année, 1970, Fascicule 2, Algèbre et théorie des nombres, Exposé no 2, 5 pp. Secrétariat mathématique, Paris 1970.
- [46] O binárnych reláciách na konečnej množine. Zborník Elektrotechnickej fakulty SVŠT, Bratislava 1971, str. 177.
- [47] Nekrolog. Academician Vojtěch Jarník (22. 12. 1897—22. 9. 1970). Acta Arithmetica 20, 1972, 107—123. (Spolu s B. Novákom.)
- [48] Zamyslenie nad 50. ročníkom Rozhľadov. Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 50, 1972, č. 6, 241—245.

- [49] On some semigroups in combinatorics. Proceedings Mini-conference on Semigroup theory in Szeged, August 29-September 1, 1972, 24–31. (Vyšlo 1973.)
- [50] Recenzia knihy: Gécség—Peák, Algebraic theory of automata. Mat. čas. 23, 1973, 191.
- [51] Matematika a inžinierske štúdium. (Vyjde v Zborníku ved. ped. konferencie SVŠT, ktorá sa konala v septembri 1973.)

Poznámka. Tento zoznam je neúplný. Akademik Schwarz napísal rad článkov a poskytol rad rozhovorov dennej a týždennej tlači, rozhlasu a televízii. Týkali sa z veľkej časti úlohy matematiky v dnešnej spoločnosti. Ako zodpovedný funkcionár SAV a ČSAV predniesol na Valných zhromaždeniach SAV a ČSAV rad prejavov (väčšinou publikovaných vo Věstníku ČSAV) kultúrno-spoločenskej povahy a týkajúcich sa rozvoja vedy ako celku v ČSSR a najmä na Slovensku.

D. Citovaná literatúra

- [1] A. H. Clifford—G. B. Preston: The algebraic theory of semigroups. Vol. I, 1964, strán 224, Vol. II, 1967, strán 350. Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (Ruský preklad vyšiel v Izd. Mir, 1972.)
- [2] K. H. Hofmann—P. S. Mostert: Elements of compact semigroups. Ch. E. Merrill Publishing Comp. Columbus, Ohio 1966, strán 384.
- [3] E. С. Ляпин: Полугруппы. Госиздат физ. мат. лит. Москва 1960, strán 592. (Anglický preklad: Amer. Math. Soc., 2. vydanie 1968, strán 487.)
- [4] A. B. Paalman—de Miranda: Topological semigroups. Math. Centrum Amsterdam 1964, 174 strán. (Druhé vydanie 1970.)
- [5] M. Petrich: Introduction to semigroups. Ch. E. Merrill Publishing Comp. Columbus, Ohio 1973, 198 strán.
- [6] A. K. Сушкевич: Теория обобщенных групп. ГИИИ, Харьков—Киев. 1937, 176 strán.
- [7] E. R. Berlekamp: Factoring polynomials over large finite fields. Math. Comp. 24, 1970, 713—735.
- [8] J. H. Williamson: Harmonic analysis on semigroups. Journal London Math. Soc. 42, 1967, 1—41.