Jozef Šajda

O jednom algoritme z oblasti ohodnotených grafov

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 1, 63--87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126581

Matematický časopis 19 (1969), No. 1

O JEDNOM ALGORITME Z OBLASTI OHODNOTENÝCH GRAFOV

JOZEF ŠAJDA, Bratislava

Problém riešený v tejto práci vznikol pri pokuse o aplikáciu teórie podmienených latinských obdĺžnikov [1] na mnohouholníkové siete rovinných ohodnotených grafov [2] a formuloval ho A. Kotzig. Snahou autora bolo riešiť tento problém algoritmom ľahko realizovateľným na číslicovom počítači. Algolský program uvedený na konci tohto článku bol preverený na počítači GIER, kde sa popri správnosti výpočtu sledovala i funkcia spotreby strojového času v závislosti od n. Za daných podmienok však nebolo možné vyšetriť túto závislosť podrobne.

1. ZÁKLADNÉ POJMY A DEFINÍCIE

Nech V, resp. H je konečná neprázdna množina prvkov v_i, resp. h_i, $i = 1,2, \ldots, n$; $n \geqslant 3$.

Postupnosť

$$v_1, h_1, v_2, h_2, \ldots, v_n, h_n, v_1$$

budeme nazývať n-uholníkom U_n s označením

$$U_n = \{v_1, h_1, v_2, h_2, \ldots, v_n, h_n, v_1\}. \tag{1.1}$$

Množinu V, resp. H budeme nazývať množinou vrcholov, resp. hrán n-uholníka U_n. Dohodneme sa, že n-uholníky

$$U_n' = \{v_1, h_1, v_2, h_2, \ldots, v_n, h_n, v_1\}$$

a

$$U_n'' = \{v_1, h_n, v_n, h_{n-1}, \ldots, v_2, h_1, v_1\}$$

nebudeme rozlišovať a budeme písať

$$U_n' = U_n'' = U_n.$$

Nech f je prosté zobrazenie množiny $V + H$ na množinu

$$M = \{1,2, \ldots, 2n\}. \tag{1.2}$$

Potom zobrazenie n-uholníka (1.1) týmto zobrazením zapísané v tvare

$$f(U_n) = \{f(v_1), f(h_1), f(v_2), f(h_2), \ldots, f(v_n), f(h_n), f(v_1)\}$$

nazveme ohodnoteným n-uholníkom s označením

$$O_n = f(U_n).$$

Pretože označenie O_n vyhradíme len pre ohodnotené n-uholníky, budeme v ďalšom z dôvodov stručnosti hovoriť len o n-uholníkoch O_n.

Nech

$$\{a^0\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, m \geqslant 2 \tag{1.3}$$

je ľubovoľná konečná postupnosť. Operáciu, ktorou z tejto postupnosti dostaneme postupnosť

$$\{a^1\} = \{a_m, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}, \tag{1.4}$$

nazveme prvým cyklickým posunutím postupnosti (1.3). Použitím tejto operácie na postupnosť (1.4) dostaneme postupnosť

$$\{a^2\} = \{a_{m-1}, a_m, a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}\},$$

ktorú nazveme druhým cyklickým posunutím postupnosti (1.3). Všeobecne postupnosť

$$\{a^k\} = \{a_{m-k+1}, a_{m-k+2}, \ldots, a_{m-k}\}, \ 1 \leqslant k \leqslant m$$

nazveme k-tym cyklickým posunutím postupnosti (1.3).

Na základe tejto definície je zrejmé, že

$$\{a^m\} = \{a^0\},$$

a preto

$$\{a^{m+j}\} = \{a^j\}, \quad j = 0,1,2,\ldots$$

Postupnosť

$$\{b\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$$

nazveme cyklicky podobnou postupnosti (1.3), ak existuje také k z intervalu $0 \leqslant k \leqslant m - 1$, že

$$\{b^k\} = \{a^0\}.$$

Ako je zrejmé, vlastnosť cyklickej podobnosti je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Budeme hovoriť, že n-uholníky O_n' a O_n'' sú rovnaké a písať

$$O_n' = O_n''$$

vtedy a len vtedy, ak majú nasledovné dve vlastnosti:

1) O'_n a O''_n sú cyklicky podobné,

2) buď postupnosti ich vrcholov alebo postupnosti ich hrán sú cyklicky podobné.

Definujme v n-uholníku O_n veličinu $d(O_n)$ nadobúdajúcu hodnoty δ_i definované vzorcom

$$\delta_i = f(v_i) + f(h_i) + f(v_{i+1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.5}$$

Pritom poznamenajme, že tak v tomto vzorci, ako aj všade ďalej, kladieme

$$v_{n+1} \equiv v_1. \tag{1.6}$$

Z vlastností zobrazenia f je zrejmé, že všetky δ_i sú prirodzenými číslami z intervalu

$$6 \leqslant \delta_i \leqslant 6n - 3, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Veličinu $d(O_n)$ nazveme charakteristikou n-uholníka O_n. Ak O_n bude mať vlastnosť

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \text{konšt.},$$

potom ho nazveme n-uholníkom s konštantnou charakteristikou.

Pretože v ďalšom sa budeme zaoberať len ohodnotenými n-uholníkmi, môžeme urobiť nasledovné zjednodušenie: namiesto označenia $f(v_i)$, resp. $f(h_i)$ budeme odteraz písať iba v_i, resp. h_i a hovoriť pritom o vrcholoch, resp. hranách príslušného n-uholníka O_n.

Po tomto zjednodušení ohodnoteným n-uholníkom bude každá postupnosť

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1} \tag{1.7}$$

$2n + 1$ čísel a_i z množiny (1.2), $i = 1,2, \ldots, 2n + 1$ s vlastnosťami:

$$\begin{aligned} &1)\ a_{2n+1} = a_1, \\ &2)\ a_i \neq a_j; \quad i \neq j; \quad i, j = 1,2, \ldots, 2n, \end{aligned} \tag{1.8}$$

zatiaľ čo ohodnoteným n-uholníkom s konštantnou charakteristikou d bude každá postupnosť (1.7), ktorá okrem vlastností (1.8) bude mať ešte vlastnosť

$$3)\ a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 = \ldots = a_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} = d. \tag{1.9}$$

Po týchto definíciách možno hlavnú úlohu tohto článku formulovať takto: *Konštruovať algoritmus, ktorým k ľubovoľnému prirodzenému $n \geqslant 3$ možno utvoriť všetky ohodnotené n-uholníky s príslušnou konštantnou charakteristikou,* t. j. algoritmus na vytvorenie postupnosti (1.7) s vlastnosťami (1.8) a (1.9).

2. VLASTNOSTI OHODNOTENÝCH n-UHOLNÍKOV

Označme symbolom S_n množinu všetkých n-uholníkov O_n pri pevnom $n \geqslant 3$. Ak počet prvkov ľubovoľnej konečnej množiny A označíme symbolom $p(A)$, potom zrejme platí

$$p(S_n) = (2n)! \tag{2.1}$$

Každej množine S_n priradíme číselnú charakteristiku I_n definovanú vzorcom

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} (v_i + h_i), \quad O_n \in S_n. \tag{2.2}$$

Ale pretože

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i + h_i) = 1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1),$$

veličina

$$I_n = n(2n + 1) \tag{2.3}$$

teda závisí len od n a nezávisí od vlastností n-uholníkov O_n. Veličina I_n definovaná vzťahom (2.2) je teda pre všetky $O_n \in S_n$ konštantná.

Nech $K_n \subset S_n$ je množina všetkých $O_n \in S_n$ s konštantnou charakteristikou a nech R_n je rozklad množiny K_n na podmnožiny r_k^n s vlastnosťou:

$$O_n \in r_k^n \Leftrightarrow d(O_n) = d_k = \text{konšt.}, \quad k = 1, 2, \ldots, r_n. \tag{2.4}$$

Počet r_n prvkov r_k^n množiny R_n nazveme rangom množiny K_n.

Lema 2.1. *Nech $n \geqslant 3$. Potom*

a) pre rang r_n množiny K_n platí:

$$r_n = \begin{cases} n + 1 & \textit{pre } n \textit{ nepárne} \quad (2.5) \\ n & \textit{pre } n \textit{ párne}; \quad (2.5)' \end{cases}$$

b) konštanty d_k nadobúdajú hodnoty:

$$d_k = \begin{cases} \dfrac{5n+1}{2} + k & \textit{pre } n \textit{ nepárne,} \quad (2.6) \\[2ex] \dfrac{5n+2}{2} + k & \textit{pre } n \textit{ párne,} \quad (2.6)' \end{cases}$$

pričom $k = 1, 2, \ldots, r_n$.

Dôkaz. Pre ľubovoľné $O_n \in r_k^n$ zrejme platí

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (v_i + h_i + v_{i+1}) = d_k. \tag{2.7}$$

Avšak vzhľadom na vzťahy (1.6) a (2.2) je

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i + h_i + v_{i+1}) = I_n + \sum_{i=1}^{n} v_i,$$

takže z rovnice (2.7) po použití vzťahu (2.3) máme

$$d_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i + 2n + 1. \tag{2.8}$$

Ľahko sa však možno presvedčiť, že platia odhady

$$\frac{n}{2}(n+1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} v_i \leqslant \frac{n}{2}(3n+1), \quad O_n \in K_n \tag{2.9}$$

na základe ktorých dostávame zo vzorca (2.8) nerovnosti

$$\frac{5n+3}{2} \leqslant d_k \leqslant \frac{7n+3}{2} \quad \text{pre } n \text{ nepárne} \tag{2.10}$$

a podobne, pretože d_k musí byť celé číslo,

$$\frac{5n+4}{2} \leqslant d_k \leqslant \frac{7n+2}{2} \quad \text{pre } n \text{ párne.} \tag{2.11}$$

Avšak zrejme platí

$$\frac{7n+3}{2} - \frac{5n+3}{2} = n, \quad \text{resp.} \quad \frac{7n+2}{2} - \frac{5n+4}{2} = n - 1,$$

čo znamená, že existuje práve $n + 1$, resp. n riešení nerovností (2.10), resp. (2.11) v obore prirodzených čísel, t. j. pre rang r_n množiny K_n platí vzťah (2.5). Tieto riešenia majú zrejme tvar (2.6).

Lema 2.1. dáva teda odpoveď na základnú otázku: koľko je druhov $O_n \in K_n$ pri danom $n \geqslant 3$, ktoré sa líšia iba svojou charakteristikou a aká je číselná hodnota tejto charakteristiky. O vlastnostiach jednotlivých O_n s rovnakou charakteristikou, t. j. $O_n \in r_k^n$ hovorí nasledujúca lema a veta.

Lema 2.2. *Nech O_n a O_n' sú dva ľubovoľné prvky množiny r_k^n. Nech $h(O_n, O_n')$, resp. $v(O_n, O_n')$ je počet rovnakých hrán, resp. vrcholov v O_n a O_n'. Potom*

$$h(O_n, O_n') = v(O_n, O_n'). \tag{2.12}$$

D ô k a z. Označme symbolom $V(O_n)$, resp. $V(O_n')$ množinu všetkých vrcholov n-uholníka O_n, resp. O_n' a podobne $H(O_n)$, resp. $H(O_n')$ množinu hrán v O_n, resp. O'_n. Nech O_n a O'_n majú práve k, $0 \leqslant k \leqslant n$, rovnakých vrcholov. Potom ostávajúcich $n - k$ vrcholov v O_n, resp. O'_n musí patriť do množiny $H(O'_n)$, resp. $H(O_n)$. Inými slovami, ak O_n a O'_n majú práve k rovnakých vrcholov, potom majú aspoň $n - k$ rôznych hrán. Avšak ostávajúcich k hrán v O_n a O'_n musí byť rovnakých, pretože v opačnom prípade by tak v množine $V(O_n)$ ako aj $V(O'_n)$ musel existovať okrem už uvažovaných k rovnakých a $n - k$ rôznych aspoň jeden ďalší vrchol, čo je v rozpore s definíciou O_n.

Ak počet rôznych vrcholov, resp. hrán v O_n a O'_n označíme $V(O_n, O'_n)$, resp. $H(O_n, O'_n)$, potom triviálnym dôsledkom lemmy 2.2 je rovnosť

$$H(O_n, O'_n) = V(O_n, O'_n) \tag{2.13}$$

analogická rovnosti (2.12).

Prv než uvedieme spomínanú vetu, vyšetríme ešte niekoľko užitočných vlastností n-uholníkov $O_n \in K_n$. Pritom v_i, resp. v'_i, prípadne h_i, resp. h'_i budú vrcholy, prípadne hrany O_n, resp. O'_n.

Nech O_n a O'_n sú dva ľubovoľné prvky množiny r^n_k. Zo vzorcov (2.8) a (2.3) vyplývajú pre ne vzťahy

$$d_k = I_n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i, \quad O_n \in r^n_k,$$

$$d_k = I_n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v'_i, \quad O'_n \in r^n_k,$$

z ktorých vychádza rovnosť

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} v'_i, \quad O_n, O'_n \in r^n_k. \tag{2.14}$$

Ak použijeme tento výsledok v rovnici (2.2), dostaneme podobnú rovnosť aj pre súčty hrán:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} h'_i, \quad O_n, O'_n \in r^n_k. \tag{2.15}$$

Zo vzťahov (2.7) a (2.2) vyplývajú vzťahy

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} v_i &= nd_k - I_n \\ \sum_{i=1}^{n} h_i &= 2I_n - nd_k \end{aligned}\right\} O_n \in r^n_k \tag{2.16}$$

a z nich po dosadení za I_n a d_k

(2.17) $$\sum_{i=1}^{n}(h_i - v_i) = \sum_{i=1}^{n}(h'_i - v_i) = \sum_{i=1}^{n}(h_i - v'_i) = \sum_{i=1}^{n}(h'_i - v'_i) =$$
$$= \begin{cases} n^2 - 2n(k-1) & \text{pre } n \text{ nepárne,} \\ n^2 - n(2k-1) & \text{pre } n \text{ párne,} \end{cases}$$

a to pri ľubovoľných $O_n, O'_n \in r^n_k$.

Ak $O_n \in r^n_k$ a $O'_n \in r^n_{k+1}$, potom zo vzorcov (2.16) po použití vzťahu (2.6) a (2.3) vychádza, že vzťah

(2.18) $$\sum_{i=1}^{n} v'_i - \sum_{i=1}^{n} v_i = n,$$

resp.

(2.19) $$\sum_{i=1}^{n} h'_i - \sum_{i=1}^{n} h_i = -n$$

platí pre všetky prirodzené k z intervalu $1 \leqslant k \leqslant r_n$. To znamená, že ak označíme

$$\left.\begin{aligned} V(k) &= \sum_{i=1}^{n} v_i \\ H(k) &= \sum_{i=1}^{n} h_i \end{aligned}\right\} O_n \in r^n_k,$$

potom $V(k)$ je rastúcou a $H(k)$ klesajúcou funkciou argumentu k s vlastnosťou

(2.20) $$\left.\begin{aligned} V(k+j) &= V(k) + jn \\ H(k+j) &= H(k) - jn \end{aligned}\right\} 1 \leqq k \leqq r_n,$$

pričom j je ľubovoľné celé nezáporné číslo, ktoré pri daných n a k spĺňa nerovnosť

$$k + j \leqslant r_n.$$

Veta 2.1. *Nech sú dané prirodzené čísla $n \geqslant 3$ a k z intervalu $1 \leqslant k \leqslant r_n$. Nech O_n a O'_n sú dva ľubovoľné prvky množiny r^n_k. Potom pre veličinu $v(O_n, O'_n)$ definovanú v leme 2.2 platí:*

(2.21) $$v(O_n, O'_n) \geqslant \begin{cases} \left.\begin{aligned} & n - \sqrt{2n(k-1)} && \textit{pri } 1 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2} \\ & n - \sqrt{2n(n-k+1)} && \textit{pri } \frac{n+3}{2} \leqslant k \leqslant n+1 \end{aligned}\right\} n \textit{ nepárne} \\ \left.\begin{aligned} & n - \sqrt{n(2k-1)} && \textit{pri } 1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2} \\ & n - \sqrt{n(2n-2k+1)} && \textit{pri } \frac{n+2}{2} \leqslant k \leqslant n \end{aligned}\right\} n \textit{ párne} \end{cases}$$

Dôkaz. Nech O_n a O'_n sú z množiny r^n_k. Predovšetkým ukážeme, že v O_n a O'_n existujú rovnaké vrcholy a hrany. Keby totiž platil opak, potom by musela platiť rovnosť množín

$$V(O_n) = H(O'_n) \quad \text{a podobne} \quad V(O'_n) = H(O_n)$$

a teda tiež

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} h'_i \quad \text{a podobne} \quad \sum_{i=1}^{n} v'_i = \sum_{i=1}^{n} h_i,$$

čiže

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i - h'_i) = 0 \quad \text{a podobne} \quad \sum_{i=1}^{n} (v'_i - h_i) = 0,$$

čo by bolo v rozpore so vzťahom (2.17), ktorého pravá strana sa pre prirodzené n a k nemôže rovnať nule.

Teraz určíme minimálny počet rovnakých vrcholov a hrán v O_n a O'_n. Napred však poznamenajme, že ak označíme symbolom σ_j súčet j rôznych prvkov množiny (1.2), potom je zrejmé, že

$$\frac{j(j+1)}{2} \leqslant \sigma_j \leqslant 2nj - \frac{j(j-1)}{2}. \tag{2.22}$$

Ak O_n, O'_n majú práve s rovnakých vrcholov (a teda podľa lemy 2.2 aj s rovnakých hrán), ktoré označíme

$$v_{n-s+1} = v'_{n-s+1}, \; v_{n-s+2} = v'_{n-s+2}, \; \ldots, \; v_n = v'_n, \tag{2.23}$$

resp.

$$h_{n-s+1} = h'_{n-s+1}, \; h_{n-s+2} = h'_{n-s+2}, \; \ldots, \; h_n = h'_n, \tag{2.24}$$

potom zo vzťahu (2.14), resp. (2.15) vyplýva

$$\sum_{i=1}^{n-s} v_i = \sum_{i=1}^{n-s} v'_i,$$

resp.

$$\sum_{i=1}^{n-s} h_i = \sum_{i=1}^{n-s} h'_i$$

a pre $n - s$ zostávajúcich rôznych vrcholov, resp. hrán musí platiť

$$\sum_{i=1}^{n-s} v_i = \sum_{i=1}^{n-s} h_i \tag{2.25}$$

a podobne

$$\sum_{i=1}^{n-s} v'_i = \sum_{i=1}^{n-s} h'_i.$$

Ak aplikujeme nerovnosť (2.22) na vrcholy (2.23), resp. hrany (2.24), potom bude

$$\frac{s(s+1)}{2} \leqslant \sum_{i=n-s+1}^{n} v_i \leqslant 2ns - \frac{s(s-1)}{2}, \tag{2.26}$$

resp.

$$\frac{s(s+1)}{2} \leqslant \sum_{i=n-s+1}^{n} h_i \leqslant 2ns - \frac{s(s-1)}{2} \tag{2.27}$$

a pre súčty vrcholov, resp. hrán dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n-s} v_i + \sum_{i=n-s+1}^{n} v_i \geqslant \sum_{i=1}^{n-s} v_i + \frac{s(s+1)}{2},$$

resp.

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n-s} h_i + \sum_{i=n-s+1}^{n} h_i \leqslant \sum_{i=1}^{n-s} h_i + 2ns - \frac{s(s-1)}{2}.$$

Preto

$$\sum_{i=1}^{n} (h_i - v_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n-s} (h_i - v_i) + 2ns - s^2, \tag{2.28}$$

z čoho po použití vzťahov (2.17) a (2.25) dostaneme pre s nerovnosť

$$n^2 - 2n(k-1) \leqslant 2ns - s^2 \quad \text{pre } n \text{ nepárne}, \tag{2.29}$$

prípadne

$$n^2 - n(2k-1) \leqslant 2ns - s^2 \quad \text{pre } n \text{ párne}. \tag{2.30}$$

Podobne zo vzťahov

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \leqslant \sum_{i=1}^{n-s} v_i + 2ns - \frac{s(s-1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} h_i \geqslant \sum_{i=1}^{n-s} h_i + \frac{s(s+1)}{2}$$

vyplýva, že

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i - h_i) \leqslant 2ns - s^2, \tag{2.31}$$

čo po použití vzťahu (2.17) dáva nerovnosť

$$-n^2 + 2n(k-1) \leqslant 2ns - s^2 \quad \text{pre } n \text{ nepárne}, \tag{2.32}$$

prípadne

$$-n^2 + n(2k-1) \leqslant 2ns - s^2 \quad \text{pre } n \text{ párne}. \tag{2.33}$$

Pretože $1 \leqslant s \leqslant n$ a teda tiež $2ns - s^2 = (2n - s)s > 0$, zaujímame sa, prirodzene, o riešenia s nerovnosti (2.28), resp. (2.31) pri podmienke

$$\sum_{i=1}^{n} (h_i - v_i) > 0, \tag{2.34}$$

resp.

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i - h_i) > 0. \tag{2.35}$$

Ale zo vzťahu (2.20) vyplýva, že (2.34) platí pre k z intervalu

$$1 \leqslant k \leqslant \frac{r_n}{2} \tag{2.36}$$

a (2.35) pre k z intervalu

$$\frac{r_n}{2} < k \leqslant r_n. \tag{2.37}$$

Preto riešenia nerovnosti (2.29) prípadne (2.30) platia pre k dané vzťahom (2.36) a podobne riešenia nerovnosti (2.32) prípadne (2.33) platia pre k dané vzťahom (2.37). Všetky tieto riešenia $s = v(O_n, O'_n)$ sú uvedené vo vzťahu (2.21). Tým je veta 2.1 dokázaná.

Pripomeňme ešte, že na základe rovnosti (2.12) z lemy 2.2 možno vo vzťahu (2.21) nahradiť $v(O_n, O'_n)$ veličinou $h(O_n, O'_n)$.

Ešte si všimnime, že pri nepárnom n zo vzťahu (2.21) vyplýva

$$v(O_n, O'_n) = h(O_n, O'_n) = n \quad \text{pri} \quad k = 1 \text{ a } n + 1,$$

t. j. pri nepárnom n majú každé dva n-uholníky O_n a O'_n z r_n^1, resp. r_n^{n+1} všetky vrcholy a hrany rovnaké.

3. POPIS ALGORITMU

Nech $n \geqslant 3$ je dané prirodzené číslo. Označme symbolom C_n množinu všetkých kombinácií x tretej triedy z prvkov množiny (1.2). Prvky kombinácie $x \in C_n$ budeme nazývať elementmi; označíme ich x_1, x_2, x_3 a budeme písať $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Pre ďalšie úvahy bude užitočné definovať následovné usporiadanie:

1) Indexovanie elementov x_i ľubovoľnej kombinácie $x \in C_n$ definujeme v súlade s ich hodnotami tak, aby platilo

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad x \in C_n \tag{3.1}$$

2) Za účelom usporiadania prvkov x v množine C_n, ktorých elementy sú už usporiadané v zmysle (3.1) si medzi dvoma ľubovoľnými kombináciami

$x = (x_1, x_2, x_3) \in C_n$ a $y = (y_1, y_2, y_3) \in C_n$ definujeme vzťah $x < y$ nasledujúcim spôsobom:

Budeme hovoriť, že x je menšie ako y (y je väčšie ako x) a písať $x < y$ ($y > x$) vtedy a len vtedy, ak nastane niektorý z týchto troch prípadov

(3.2)
$$\begin{aligned} &\text{a) } x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 < y_3 \\ &\text{b) } x_1 = y_1, \quad x_2 < y_2 \\ &\text{c) } x_1 < y_1. \end{aligned}$$

Z definície tohto usporiadania je zrejmé, že pre ľubovoľné $x \in C_n$ platí

$$\begin{aligned} 1 \leqslant x_1 \leqslant 2n - 2, \\ 2 \leqslant x_2 \leqslant 2n - 1, \\ 3 \leqslant x_3 \leqslant 2n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

O rovnosti $x = y$ prvkov $x \in C_n$, $y \in C_n$ budeme hovoriť vtedy a len vtedy, keď x a y pozostávajú z tých istých elementov.

Označme symbolom $s(x)$ súčet elementov x_i prvku $x = (x_1, x_2, x_3) \in C_n$,

$$s(x) = x_1 + x_2 + x_3 \tag{3.4}$$

a symbolom T_n množinu prvkov $x \in C_n$, pre ktoré existuje prirodzené číslo k s vlastnosťou

$$s(x) = d_k, \tag{3.5}$$

kde d_k je dané vzťahom (2.6), resp. (2.6)'. Zrejme je $T_n \subset C_n$ a teda tiež

$$p(T_n) < p(C_n) = \binom{2n}{3}.$$

Nech

$$x^* < x^{**} < \dots \tag{3.6}$$

je postupnosť prvkov $x \in C_n$ usporiadaných podľa (3.1) a (3.2). Označme symbolom $x_{\min}$ najmenší a $x_{\max}$ najväčší z tých členov postupnosti (3.6), pre ktoré existuje také k, že platí vzťah (3.5). Potom prvky $x \in T_n$ spĺňajú podmienku

$$x_{\min} \leqslant x \leqslant x_{\max}, \quad x \in T_n. \tag{3.7}$$

Ak množinu T_n rozložíme na podmnožiny T_{nk} s vlastnosťou:

$$x \in T_{nk} \Leftrightarrow s(x) = d_k, \quad k = 1, 2, \dots, r_n$$

a označíme symbolom $x_{\min}^k$ najmenší a $x_{\max}^k$ najväčší z členov postupnosti (3.6), pre ktoré pri danom $k = 1, 2, \dots, r_n$ platí rovnosť (3.5), potom z časti (3.7) postupnosti (3.6) možno vybrať $x \in T_n$ tak, že

(3.8) $$x_{\min} \leqslant x^k_{\min} \leqslant x \leqslant x^k_{\max} \leqslant x_{\max}, \; x \in T_{nk}, \; k = 1,2,\dots, r_n$$

pričom je zrejme

$$x^1_{\min} = x_{\min}, \quad x^{r_n}_{\max} = x_{\max}.$$

To znamená, že pri danom $n \geqslant 3$ a prípustnom $k = 1,2,\dots, r_n$ je nerovnosťou

(3.9) $$x^k_{\min} \leqslant x \leqslant x^k_{\max}$$

jednoznačne určená podmnožina množiny C_n obsahujúca množinu T_{nk}. Ako ďalej uvidíme, podstatný význam pri konštrukcii algoritmu riešenia danej úlohy budú mať práve množiny T_{nk}. Preto určenie hraničných prvkov $x^k_{\min}$ a $x^k_{\max}$ vo vzťahu (3.9) je dôležitým krokom, ktorým sa zaoberá nasledujúca veta.

Veta 3.1. *Nech n a k sú ľubovoľné prirodzené čísla, ktoré spĺňajú podmienky: $n \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant r_n$.*
Potom

(3.10), (3.10)′
$$x^k_{\min} = \begin{cases} \left(1, \dfrac{n+2k-1}{2}, 2n\right), & n \text{ nepárne} \\[2ex] \left(1, \dfrac{n+2k}{2}, 2n\right), & n \text{ párne} \end{cases}$$

a elementy x''_i prvku $x^k_{\max} = (x''_1, x''_2, x''_3)$ ležia v intervaloch

(3.11)
$$a_{k1} = \frac{5n+2k-11}{6} \leqslant x''_1 \leqslant \frac{5n+2k-5}{6} = b_{k1}$$
$$a_{k2} = \frac{5n+2k-1}{6} \leqslant x''_2 \leqslant \frac{5n+2k+3}{6} = b_{k2}$$
$$a_{k3} = \frac{5n+2k+7}{6} \leqslant x''_3 \leqslant \frac{5n+2k+13}{6} = b_{k3}$$

pre n nepárne, a podobne

(3.11)′
$$A_{k1} = \frac{5n+2k-10}{6} \leqslant x''_1 \leqslant \frac{5n+2k-4}{6} = B_{k1}$$
$$A_{k2} = \frac{5n+2k}{6} \leqslant x''_2 \leqslant \frac{5n+2k+4}{6} = B_{k2}$$
$$A_{k3} = \frac{5n+2k+8}{6} \leqslant x''_3 \leqslant \frac{5n+2k+14}{6} = B_{k3}$$

pre n párne.

Dôkaz. Vzhľadom na usporiadanie (3.1) a (3.2) postupnosti (3.6) je zrejmé že elementy x_i', resp. x_i'', prvku $x_{\min}^k$, resp. $x_{\max}^k$ majú mať vlastnosť, aby bolo

(3.12) a) x_1' a x_2' čo najmenšie, resp. x_1'' a x_2'' čo najväčšie,
b) x_3' čo najväčšie, resp. x_3'' čo najmenšie.

Z týchto podmienok vyplýva, že

$$x_1' = 1, \quad x_3' = 2n, \tag{3.13}$$

zatiaľ čo pre x_2' dostávame z podmienky (3.5) aplikovanej na $x_{\min}^k$ rovnicu

$$1 + x_2' + 2n = d_k,$$

z ktorej po použití vzťahu (2.6), resp. (2.6)′ dostávame

$$x_2' = \begin{cases} \dfrac{n + 2k - 1}{2} & \text{pre } n \text{ nepárne}, \\[2ex] \dfrac{n + 2k}{2} & \text{pre } n \text{ párne}, \end{cases}$$

čo spolu s (3.13) dokazuje tvrdenie (3.10).

Pre elementy x_i'' prvku $x_{\max}^k$ platia zrejme nasledovné relácie

$$x_1'' + x_2'' + x_3'' = d_k,$$
$$1 \leqslant x_2'' - x_1'' \leqslant 2,$$
$$1 \leqslant x_3'' - x_2'' \leqslant 2$$

s riešeniami

$$\frac{d_k - 6}{3} \leqslant x_1'' \leqslant \frac{d_k - 3}{3},$$

$$\frac{d_k - 1}{3} \leqslant x_2'' \leqslant \frac{d_k + 1}{3},$$

$$\frac{d_k + 3}{3} \leqslant x_3'' \leqslant \frac{d_k + 6}{3},$$

z ktorých po použití vzťahu (2.6), resp. (2.6)′ dostaneme nerovnosti (3.11), resp. (3.11)′. Tým je veta 3.1 dokázaná.

K nerovnostiam (3.11) a (3.11)′ pridajme nasledujúce poznámky:

(1) Je zrejmé, že pre ľubovoľné prirodzené $n \geqslant 3$ a $k = 1, 2, \ldots, r_n$ platí, že

$$\text{(3.14)}\qquad \begin{aligned} \frac{5n+2k-1}{2} &= 3a_{k2} \quad \text{je prirodzené číslo} \\ \frac{5n+2k+3}{2} &= 3b_{k2} \quad \text{je prirodzené číslo} \end{aligned}$$

pri n nepárnom, a podobne

$$\text{(3.14)}'\qquad \begin{aligned} \frac{5n+2k}{2} &= 3A_{k2} \quad \text{je prirodzené číslo} \\ \frac{5n+2k+4}{2} &= 3B_{k2} \quad \text{je prirodzené číslo} \end{aligned}$$

pri n párnom. Ďalej z nerovností (3.11) a (3.11)′ vyplýva

$$\text{(3.15)}\qquad b_{k2} - a_{k2} = B_{k2} - A_{k2} = \tfrac{2}{3} < 1 .$$

Ľahko sa môžeme presvedčiť, že podmienky (3.14), resp. (3.14)′ sa pri uvedenom n a k splnia vtedy a len vtedy, keď nastane niektorý z prípadov:

1. $a_{k2} = p$, resp. $A_{k2} = q$,
2. $a_{k2} = p + \frac{1}{3}$, resp. $A_{k2} = q + \frac{1}{3}$,
3. $a_{k2} = p + \frac{1}{3}$, resp. $A_{k2} = q + \frac{2}{3}$,

kde p, resp. q je ľubovoľné prirodzené číslo. Ale potom z príslušnej nerovnosti (3.11), resp. (3.11)′ dostávame na základe vzťahu (3.15) tiež tri možné relácie pre x_2'':

1. $p \leqslant x_2'' \leqslant p + \frac{2}{3}$, resp. $q \leqslant x_2'' \leqslant q + \frac{2}{3}$,
2. $p + \frac{1}{3} \leqslant x_2'' \leqslant p + 1$, resp. $q + \frac{1}{3} \leqslant x_2'' \leqslant q + 1$,
3. $p + \frac{2}{3} \leqslant x_2'' \leqslant p + \frac{4}{3}$, resp. $q + \frac{2}{3} \leqslant x_2'' \leqslant q + \frac{4}{3}$,

z ktorých je evidentné, že nerovnosti (3.11), resp. (3.11)′ majú pre x_2'' pri ľubovoľnom prirodzenom $n \geqslant 3$, a $k = 1,2, \ldots, r_n$ práve jedno celé riešenie.

(2) Pretože

$$\text{(3.16)}\qquad \begin{aligned} b_{k1} - a_{k1} &= B_{k1} - A_{k1} = 1 \\ b_{k3} - a_{k3} &= B_{k3} - A_{k3} = 1 , \end{aligned}$$

existujú v množine celých čísel pri ľubovoľnom $n \geqslant 3$ nanajvýš dve riešenia tak pre x_1'' ako aj pre x_3''. Z toho je zrejmé, že ak niektoré z čísel $a_{k1}, a_{k3}, A_{k1}, A_{k3}$

a) nie je celé, potom aj príslušné $b_{k1}, b_{k3}, B_{k1}, B_{k3}$ nie je celé a naopak, čo vzhľadom na (3.16) znamená, že i v tomto prípade má príslušná z nerovností (3.11) a (3.11)′ jediné celé riešenie;

b) je celé, potom aj príslušné $b_{k1}, b_{k3}, B_{k1}, B_{k3}$ je celé číslo väčšie o 1, pričom obidve tieto čísla sú riešeniami príslušnej nerovnosti. Z týchto dvoch celých riešení podmienka (3.12) pripúšťa pri x_1'' väčšie z nich a pri x_3'' menšie z nich, čím je i v tomto prípade určené jediné prípustné riešenie.

Týmito poznámkami a vetou 3.1 je jednoznačne popísaný algoritmus na určenie extremálnych prvkov $x_{\min}^k$ a $x_{\max}^k$ množiny T_{nk}. Ostatné prvky $x \in T_{nk}$ už snadno určíme analýzou vzťahu (3.9) s prihliadnutím na podmienku (3.5).

Po tomto určení množiny T_{nk} priradíme ku každému prvku $x = (x_1, x_2, x_3) \in \in T_{nk}$ množinu X usporiadaných trojíc t_s utvorených z jeho elementov x_1, x_2, x_3. Zrejme pre ľubovoľné $x \in T_{nk}$ platí $p(X) = 6$.

Postupnosť

$$t_1, t_2, \ldots, t_p$$

trojíc $t_s = (a_s, b_s, c_s)$, $s = 1, 2, \ldots, p$ nazveme reťazcom R^p o dĺžke p vtedy a len vtedy, keď platí:

(3.17) 1. ak $t_s \in X$, potom $t_r \bar{\in} X$; $r \neq s$; $r, s = 1, 2, \ldots, p$,
2. $c_s = a_{s+1}$ pre všetky $s = 1, 2, \ldots, p-1$,
3. postupnosť čísel

$$a_1, b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \ldots, b_p, c_p$$

nemá rovnaké členy.

Aby sme naznačili, z ktorých trojíc je daný reťazec R^p utvorený a ako súvisí s príslušným reťazcom R^{p-1}, budeme tiež písať

$$R^p = t_1 t_2 \ldots t_p = R^{p-1} t_p \tag{3.18}$$

a hovoriť, že reťazec R^p vychádza z prvku t_1, resp. že t_1 je počiatkom reťazca R^p. Rôzne reťazce tej istej dĺžky pri tom istom n a k odlíšime dolným indexom.

Reťazec R^p, pre ktorý

$$c_p = a_1, \tag{3.19}$$

nazveme p-kružnicou v T_{nk}. Ak $p = n$, potom príslušné p-kružnice budeme skrátene nazývať kružnicami v T_{nk}.

Pri zavedenom označovaní postupnosť (3.17) pre kružnicu bude

$$a_1, b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \ldots, b_n, a_1. \tag{3.20}$$

Z porovnania vlastností tejto postupnosti s vlastnosťami (1.8) a (1.9) postupnosti (1.7) vyplýva, že postupnosť (3.20) tvorí ohodnotený n-uholník s konštantnou charakteristikou d_k.

Tým je naša úloha transformovaná na určenie algoritmu, ktorý vytvára pri daných n a k všetky kružnice v T_{nk} a k nim patriace postupnosti typu (3.20), čo bude naším ďalším programom.

Označme pri danom prirodzenom $n \geqslant 3$ a $k = 1, 2, \ldots, r_n$ symbolom N počet prvkov množiny T_{nk}:

$$p(T_{nk}) = N.$$

Prvky množiny T_{nk} usporiadajme podľa (3.1) a (3.2) do rastúcej postupnosti

$$(3.21) \qquad x^k_{\min} = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = x^k_{\max}, \quad x_r \in T_{nk}, \quad r = 1,2, \ldots, N.$$

Ak pritom označíme

$$x_r = (x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}),$$

potom zrejme

$$x_{11} = x'_1, \quad x_{12} = x'_2, \quad x_{13} = x'_3$$

a podobne

$$x_{N1} = x''_1, \quad x_{N2} = x''_2, \quad x_{N3} = x''_3.$$

Ak si definujeme medzi ľubovoľnými množinami X, resp. Y patriacimi к prvkom $x \in T_{nk}$, resp. $y \in T_{nk}$ vzťah

$$X < Y, \quad (Y > X) \Leftrightarrow x < y, \quad (y > x),$$

potom môžeme množiny X_r usporiadať do postupnosti

$$(3.22) \qquad X_1 < X_2 < \ldots < X_N,$$

ktorá je analogická postupnosti (3.21), pričom X_r je množina trojíc t_{rs}, $s = 1,2, \ldots, 6$ patriacich k prvku $x_r \in T_{nk}$.

Ak ešte v každej množine X_r usporiadame trojice t_{rs} podľa (3.2) do postupnosti

$$(3.23) \qquad t_{r1} < t_{r2} < \ldots < t_{r6}, \quad r = 1,2, \ldots, N$$

potom množinu

$$X_{Nk} = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

môžeme znázorniť maticou

$$(3.24) \qquad T = \begin{pmatrix} t_{11}, & t_{12}, & \ldots, & t_{16} \\ t_{21}, & t_{22}, & \ldots, & t_{26} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{N1}, & t_{N2}, & \ldots, & t_{N6} \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} t_{rs} \in X_{nk}, & r = 1,2, \ldots, N, \\ s = 1,2, \ldots, 6, & \end{matrix}$$

v ktorej poloha ľubovoľného prvku $t \in X_{nk}$ je jednoznačne určená vyššie definovaným usporiadaním jej prvkov, ktoré je jednoznačne dané príslušným indexom.

Z definície reťazca a kružnice je zrejmé, že pri danom n a k množina všetkých kružníc v T_{nk} je vlastnou podmnožinou množiny všetkých reťazcov R^n. Preto je prirodzené založiť algoritmus určenia kružníc na využití reťazcov premennej dĺžky. Avšak prv než prejdeme k popisu tohto algoritmu, definujme si ešte usporiadanie reťazcov nasledujúcim spôsobom:

Dva reťazce

$$R_1^p = t_1^1 t_2^1 \dots t_p^1, \quad R_2^p = t_1^2 t_2^2 \dots t_p^2$$

o rovnakej dĺžke p budú v relácii

$$(3.25) \qquad R_1^p < R_2^p, \quad (R_2^p > R_1^p) \Leftrightarrow t_p^1 < t_p^2, \quad (t_p^2 > t_p^1).$$

Teraz pristúpime k popisu algoritmu určenia kružníc v T_{nk}. Za tým účelom zostrojíme strom S s počiatkom t_1 v ľubovoľnom prvku t_{rs} matice T. Počiatok t_1 stromu S budeme tiež nazývať vrcholom 1. stupňa stromu S. Vrcholmi 2. stupňa stromu S bude tých n_2 prvkov matice T označených $t_2^{i_2}$ a usporiadaných podľa i_2 v zmysle (3.2), z ktorých každý spolu s t_1 tvorí reťazec

$$R_{i_2}^2 = t_1 t_2^{i_2}, \quad i_2 = 1,2, \dots, n_2.$$

Všeobecne vrcholmi m-tého stupňa stromu S bude tých n_m prvkov matice T označených $t_m^{i_m}$ a usporiadaných podľa i_m v zmysle (3.2), ktoré z už utvorených reťazcov $R_{i_{m-1}}^{m-1}$, $i_{m-1} = 1,2, \dots, n_{m-1}$, vytvárajú reťazec $R_{i_m}^m$ operáciou

$$R_{i_m}^m = R_{i_{m-1}}^{m-1} t_m^{i_m}, \quad i_m = 1,2, \dots, n_m.$$

Ak z dôvodov rovnakého označovania namiesto t_1 napíšeme $t_1^{i_1}$, kde, pravda, $i_1 = n_1 = 1$, potom reťazec $R_{i_m}^m$ možno zapísať v tvare

$$(3.26) \qquad R_{i_m}^m = t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_m^{i_m}, \quad i_m = 1,2, \dots, n_m.$$

Pritom podľa definície (3.25) z usporiadania vrcholov

$$t_m^1 < t_m^2 < \dots$$

vyplýva usporiadanie reťazcov

$$R_1^m < R_2^m < \dots, \quad m = 1,2, \dots$$

Vetvy m-tého stupňa stromu S definujeme takto:

Nech A je vrchol m-tého a B vrchol $(m + 1)$-ho stupňa stromu S. Vrcholy A, B spojíme vetvou vtedy a len vtedy, ak existuje reťazec R^{m+1}, ktorý tieto vrcholy obsahuje. Z toho vyplýva, že spojenie vetvami počiatku t_1 s ľubovoľným vrcholom stromu S je navzájom jednoznačné, t. j. postupnosť vrcholov s počiatkom v t_1 spojených vetvami vytvára práve jeden určitý reťazec.

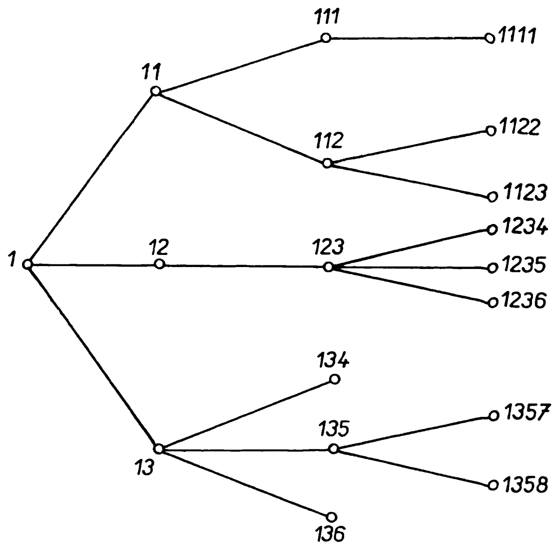
Z praktických dôvodov je užitočné označiť vrchol $t_1 = t_1^{i_1}$ symbolom i_1, vrcholy $t_2^{i_2}$ dvojicou (i_1, i_2) a všeobecne vrcholy $t_m^{i_m}$ m-ticou

$$(3.27) \qquad (i_1, i_2, \dots, i_m).$$

Potom vektor (3.27) je skráteným zápisom reťazca (3.26), takže môžeme písať

$$R^m_{i_m} = (i_1, i_2, \dots, i_m),$$

pričom $1 \leqslant i_m \leqslant n_m, \quad m = 1,2, \dots$



Obr. 1.

Napríklad strom S s hodnotami $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 6$, $n_4 = m = 4$ môže mať graf znázornený na obr. 1, v ktorom sú vrcholy rovnakého stupňa podobne ako reťazce rovnakej dĺžky usporiadané zhora nadol do rastúcej postupnosti a kde z reťazcov 134 a 136 už nemožno urobiť reťazce väčšej dĺžky. Je teda napr.

$$1111 < 1122 < 1123 < 1234 < 1235 < 1236 < 1357 < 1358.$$

Ak graf stromu S zakončíme vrcholmi n-tého stupňa, dostaneme napokon prehľadnú grafickú schému algoritmu na utvorenie všetkých reťazcov R^m dĺžky m pre všetky m z intervalu $1 \leqslant m \leqslant n$ patriacich k počiatku t_1. Aplikovaním podmienky (3.19) na reťazce R^n nájdeme už snadno množinu všetkých kružníc v T_{nk} s počiatkom t_1. Aby sme našli vôbec všetky kružnice v T_{nk}, pri ľubovoľnom počiatku, treba len zopakovať túto metódu $6N$-krát, po každý raz pri inom počiatočnom prvku matice T.

Poznamenajme, že uvedený „stromový" algoritmus na určenie kružníc s daným počiatkom t_1 má tieto hlavné výhody:

1. Nepotrebné reťazce R^m, $m < n$, t. j. také, z ktorých už v matici T nemožno utvoriť reťazce R^p, $p > m$ (na obr. 1 reťazce 134 a 136), z ďalších úvah

eliminuje a pracuje len s tými, ktoré môžu viesť ku R^n. Tým redukuje zbytočnú prácu na minimum.

2. Algoritmus používa takmer výhradne len operáciu porovnávania a jeho kroky majú šablónovitý charakter, pričom sa s nepatrnými zmenami mnohokrát opakujú. Preto je tento algoritmus nenáročný a ľahko realizovateľný najmä na počítači.

Posledným krokom algoritmu pre riešenie našej úlohy bude, že ku každej nájdenej kružnici utvoríme postupnosť typu (3.20), ktorá je, ako sme ukázali vyššie, ekvivalentná ohodnotenému n-uholníku s konštantnou charakteristikou d_k.

Pre dosiahnutie úplného riešenia našej úlohy pri danom $n \geqslant 3$ zostáva len zopakovať celý algoritmus pri všetkých $k = 1, 2, \ldots, r_n$.

4. ALGORITMUS

pre $n \geqslant 3$ nepárne, resp. párne.

1. Vypočítať r_n podľa vzorca (2.5), resp. (2.5)'.
2. Položiť $k = 1$.
3. Vypočítať členy postupnosti

$$d_1, d_2, \ldots, d_{r_n}$$

podľa vzorca (2.6), resp. (2.6)'.

3.1. Vypočítať zložky x'_1, x'_2, x'_3 prvku $x^k_{\min} = (x'_1, x'_2, x'_3) \in T_{nk}$ podľa vzorca (3.10), resp. (3.10)'.

3.2. Vypočítať zložky x''_1, x''_2, x''_3, prvku $x^k_{\max} = (x''_1, x''_2, x''_3) \in T_{nk}$ podľa vzorca (3.11), resp. (3.11)' algoritmom

3.2.1. $$x''_1 = \left[\frac{5n + 2k - 5}{6}\right], \quad \text{resp.} \quad x''_1 = \left[\frac{5n + 2k - 4}{6}\right]$$

3.2.2. $$x''_2 = \left[\frac{5n + 2k + 3}{6}\right], \quad \text{resp.} \quad x''_2 = \left[\frac{5n + 2k + 4}{6}\right]$$

3.2.3. $$x''_3 = \begin{cases} \left[\dfrac{5n + 2k + 13}{6}\right], & \text{ak} \quad \left[\dfrac{5n + 2k + 13}{6}\right] \neq \dfrac{5n + 2k + 13}{6} \\ \dfrac{5n + 2k + 7}{6}, & \text{ak} \quad \left[\dfrac{5n + 2k + 13}{6}\right] = \dfrac{5n + 2k + 13}{6} \end{cases}$$

resp.

$$x_3'' = \begin{cases} \left[\dfrac{5n+2k+14}{6}\right], & \text{ak } \left[\dfrac{5n+2k+14}{6}\right] \neq \dfrac{5n+2k+14}{6} \\ \dfrac{5n+2k+8}{6}, & \text{ak } \left[\dfrac{5n+2k+14}{6}\right] = \dfrac{5n+2k+14}{6} \end{cases}$$

3.3. Určiť a zapísať ostatné prvky

$$x_r = (x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}) \in T_{nk}$$

algoritmom:

3.3.1. Položiť $r = 2, \quad s_1 = x_1'$.
3.3.2. Položiť $s_2 = s_1 + 1$.
3.3.3. Položiť $s_3 = s_2 + 1$.
3.3.4. Utvoriť

$$s = s_1 + s_2 + s_3 .$$

Ak $s = d_k$, prejsť na 3.3.8.

3.3.5. Hodnotu s_3 nahradiť hodnotou $s_3 + 1$. Ak je $s_3 \leqslant 2n$, prejsť na 3.3.4.

3.3.6. Hodnotu s_2 nahradiť hodnotou $s_2 + 1$. Ak je $s_2 \leqslant 2n - 1$, prejsť na 3.3.3.

3.3.7. Hodnotu s_1 nahradiť hodnotou $s_1 + 1$. Ak je $s_1 \leqslant x_1''$, prejsť na 3.3.2.

3.3.8. Položiť $x_{r1} = s_1$,
$x_{r2} = s_2$,
$x_{r3} = s_3$

a zapísať v tomto poradí.

3.3.9. Ak platí

$$(x_{r1} \neq x_1'') \vee (x_{r2} \neq x_2'') \vee (x_{r3} \neq x_3''),$$

potom nahradiť hodnotu r hodnotou $r + 1$ a prejsť na 3.3.6, v opačnom prípade priradiť hodnotu r premennej N:

$$N = r,$$

čím algoritmus 3.3 končí.

3.4. Utvorenie a zápis matice T z prvkov x_r, $r = 1, 2, \ldots, N$ algoritmom:

3.4.1. Položiť $r = 1$.
3.4.2. Položiť $t_{r1} = (x_{r1}, x_{r2}, x_{r3})$,
$t_{r2} = (x_{r1}, x_{r3}, x_{r2})$,
$t_{r3} = (x_{r2}, x_{r1}, x_{r3})$,
$t_{r4} = (x_{r2}, x_{r3}, x_{r1})$,

$$t_{r5} = (x_{r3}, x_{r1}, x_{r2}),$$
$$t_{r6} = (x_{r3}, x_{r2}, x_{r1}),$$

a zapísať v tomto poradí.

3.4.3. Hodnotu r nahradiť hodnotou $r + 1$ a pokiaľ je $r \leqslant N$ prejsť na 3.4.2, v opačnom prípade algoritmus 3.4 končí.

3.5. Utvorenie reťazcov a zápis postupností typu (3.20) algoritmom:

3.5.1. Položiť $r = 1$.

3.5.2. Položiť $s = 1$.

3.5.3. Položiť $i = 1$.

3.5.4. Položiť prvok t_{rs} matice T za počiatok $t_1 = (a_1, b_1, c_1)$ stromu S a zapísať postupnosť $s_i = \{a_1, b_1, c_1\}$.

3.5.5. Postupným prezretím prvkov matice T vybrať všetky tie prvky

$$t_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}),$$

pre ktoré platí

$$a_{i+1} = c_i.$$

3.5.6. Každý element prvku t_{rs} porovnať s prvými $2i$ členmi všetkých postupností s_i. Ak aspoň raz nastane rovnosť, prejsť na 3.5.7, v opačnom prípade nahradiť postupnosť s_i postupnosťou s_{i+1}, ktorá vznikne pridaním čísel b_{i+1} a c_{i+1} ako $(2i + 2)$-ho a $(2i + 3)$-ho člena k postupnosti s_i.

3.5.7. Nahradiť hodnotu i hodnotou $i + 1$ a pokiaľ je $i \leqslant n - 1$ prejsť na 3.5.5, v opačnom prípade vybrať z postupností s_n tie, pre ktoré platí vzťah

$$c_n = a_1.$$

3.5.8. Zapísať počet a všetky členy postupností s_n.

3.5.9. Nahradiť hodnotu s hodnotou $s + 1$ a pokiaľ je $s \leqslant 6$ prejsť na 3.5.3, v opačnom prípade prejsť na 3.5.10.

3.5.10. Nahradiť hodnotu r hodnotou $r + 1$ a pokiaľ je $r \leqslant N$ prejsť na 3.5.2, v opačnom prípade algoritmus 3.5 končí.

3.6. Nahradiť hodnotu k hodnotou $k + 1$ a pokiaľ je $k \leqslant r_n$ prejsť na 3.1, v opačnom prípade algoritmus 3 a tým i celý algoritmus našej úlohy končí.

K tomuto algoritmu poznamenajme, že niektoré jeho kroky (napr. krok 3.5.5) nie sú podrobne popísané preto, aby pri existencii viacerých spôsobov ich realizácie bola ponechaná možnosť vhodného výberu.

5. PROGRAM V JAZYKU ALGOL-60

Na záver článku uvádzame k vypracovanému algoritmu i podrobný program, ktorý sme zapísali v jazyku ALGOL-60. Z dôvodov praktických vlastností tohto jazyka sa program od algoritmu miestami odlišuje. Program je zostavený úplne všeobecne a pre získanie všetkých riešení úlohy pri danom prirodzenom $n \geqslant 3$ nevyžaduje okrem tohto n nijaké ďalšie informácie.

Vnútorné bloky tohto programu sme označili symbolmi B1, B2, B3, B4 z toho dôvodu, aby sme k obsahu ich činnosti mohli na tomto mieste pripojiť nasledujúce poznámky:

Blok B1 realizuje výpočet počtu N prvkov množiny T_{nk}.

Blok B2 vypočituje a usporadúva prvky $x \in T_{nk}$.

Blok B3 určuje a usporadúva prvky matice T.

Blok B4 je programom určenia stromu S s ľubovoľným počiatkom, od tvorenia reťazcov až po tlač postupností (3.20).

Pre ľahšiu orientáciu v programe udávame vzájomnú korešpondenciu medzi niektorými veličinami v texte článku a identifikátormi, ktorými sú zobrazené v programe:

Veličina	*Identifikátor*
r_n	rn
d_k	$d[k]$
x_1', x_2', x_3'	$x$min1$[k]$, $x$min2$[k]$, $x$min3$[k]$
x_1'', x_2'', x_3''	$x$max1$[k]$, $x$max2$[k]$, $x$max3$[k]$
x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}	$x1[p]$, $x2[p]$, $x3[p]$
t_{rs}	$H[t[i], q]$

Nakoniec ešte poznamenajme, že pred použitím tohto programu treba zvolené n vložiť do programu na miesto $n0$. Riešenia počítač tlačí v tvare postupností typu (3.20) (bez posledného člena) označených poradovými číslami $h = 1,2, \ldots$

PROGRAM

```
begin integer n, k, rn, u;
      real a, v;
      integer array d, xmin1,  xmin2,  xmin3,
                       xmax1, xmax2, xmax3[1:n0 + 1];
n: = n0; if n < 3 then go to STOP; a: = n/2 − entier (n/2);
k: = 1;
A: if a ≠ 0 then
     begin rn: = n + 1;
         d[k]: = (5 × n + 1)/2 + k;
    xmin1[k]: = 1;
```

```
    xmin2[k]: = (n + 2 × k — 1)/2;
    xmin3[k]: = 2 × n;
           u: = 5 × n + 2 × k;
           v: = (u + 13)/6;
    xmax1[k]: = (u — 5)/6;
    xmax2[k]: = (u + 3)/6;
    xmax3[k]: = if entier (v) ≠ v then entier (v) else (u + 7)/6
                end else
    begin rn: = n;
        d[k]: = (5 × n + 2)/2 + k;
    xmin1[k]: = 1;
    xmin2[k]: = (n + 2 × k)/2;
    xmin3[k]: = 2 × n;
           u: = 5 × n + 2 × k;
           v: = (u + 14)/6;
    xmax1[k]: = (u — 4)/6;
    xmax2[k]: = (u + 4)/6;
    xmax3[k]: = if entier (v) ≠ v then entier (v) else (u + 8)/6
                end;
B1: begin integer b, j, y1, y2, y3, N;
           b: = 0; y1: = xmin1[k]; y2: = xmin2[k]; y3: = xmin3[k];
       A0: for j: = 1 step 1 until entier ((y3 — y2 + 1)/2) do
           b: = b + 1; y1: = y1 + 1; y2: = y2 — 1;
           if y1 ⩽ entier (xmin2[k]/2) then go to A0 else
       A1: y2: = y1 + 1; y3: = d[k] — y1 — y2;
           if y3 > y2 then
           begin for j: = 1 step 1 until entier ((y3 — y2 + 1)/2) do
                 b: = b + 1; y1: = y1 + 1; go to A1
           end else
    N: = b
    end B1;
B2: begin integer r, s, s1, s2, s3;
           integer array x1, x2, x3[1:N];
    r: = 1; s1: = xmin1[k];
    A2:s2: = s1 + 1;
    A3:s3: = s2 + 1;
    A4:s : = s1 + s2 + s3;
    if  s   = d[k] then go to A6;
       s3: = s3 + 1;
    if  s3  ⩽ 2 × n then go to A4;
    A5:s2: = s2 + 1;
```

```
        if  s2  ⩽ 2 × n − 1 then go to A3;
            s1: = s1 + 1;
        if  s1  ⩽ xmax1[k] then go to A2;
        A6:x1[r]: = s1; x2[r]: = s2; x3[r]: = s3;
        if r < N then begin r: = r + 1; go to A5 end
    end B2;
    B3: begin integer m, p;
              integer array H[1:6 × N, 1:3];
        m: = 1;
        for p: = 1 step 1 until N do begin
        H[m    ,1]: = x1[p];  H[m    ,2]: = x2[p];  H[m    ,3]: = x3[p];
        H[m + 1,1]: = x1[p];  H[m + 1,2]: = x3[p];  H[m + 1,3]: = x2[p];
        H[m + 2,1]: = x2[p];  H[m + 2,2]: = x1[p];  H[m + 2,3]: = x3[p];
        H[m + 3,1]: = x2[p];  H[m + 3,2]: = x3[p];  H[m + 3,3]: = x1[p];
        H[m + 4,1]: = x3[p];  H[m + 4,2]: = x1[p];  H[m + 4,3]: = x2[p];
        H[m + 5,1]: = x3[p];  H[m + 5,2]: = x2[p];  H[m + 5,3]: = x1[p];
                                   m: = m + 6 end;
    end B3;
    B4: begin integer i, h, g, f, q, z, T, T1, P, Q, R, M;
              integer array t[1:n], K[1:n, 1:3];
        h: = 0; i: = 1; t[i]: = 1;
    A7: for q: = 1, 2, 3 do K[i, q]: = H[t[i], q];
        if i = n then
           begin h: = h + 1; print (h);
                 for f: = 1 step 1 until n do
                     for g: = 1, 2 do print (K[f, g]);
                         i: = i − 1; go to A11
           end;
        z: = 1;
    A8: T: = K[i, 3] − H[z, 1];
        if T ≠ 0 then
    A9: begin z: = z + 1; if z ⩽ 6 × N then go to A8 else
                             if i = 1 then
        A10: begin t[i]: = t[i] + 1; if t[i] ⩽ 6 × N then
                              go to A7 else go to END
             end else
        A11: begin z: = t[i] + 1;
             A12: T1: = H[t[i], 1] − H[z, 1];
                  if T1 ≠ 0 then
             begin z: = z + 1; if z ⩽ 6 × N then go to A12 else
                   begin i: = i − 1; if i = 1 then go to A10;
```

```
                    go to A11
                end
            end else begin i: = i − 1; go to A13 end
        end A11
    end A9 else
    A13: begin for R: = 2, 3 do
                    for P: = 1 step 1 until i do
                        for Q: = 1, 2 do
                begin M: = K[P, Q] − H[z, R];
                    if M = 0 then go to A9 else
                        if i = n − 1 ∧ K[1,1] = H[z, 3] then go to A14
                end;
            A14: begin i: = i + 1; t[i]: = z;
                    if i ⩽ n then go to A7
                end
end A13;
END: k: = k + 1; if k ⩽ rn then go to A;
STOP:
end B4
end programu
```

LITERATÚRA

[1] Ryser H. J., *A combinatorial theorem with an application to Latin rectangles*, Proc. Amer. Math. Soc., 2, 1951.

[2] Ore O., *Graphs and their uses*, New York, 1963.

Došlo 15. 2. 1967.

Výskumné výpočtové stredisko
s účasťou programu OSN pre rozvoj,
Bratislava

ОБ ОДНОМ АЛГОРИФМЕ В ОБЛАСТИ ГРАФОВ С ОЦЕНКОЙ ВЕРШИН И РЕБЕР

Йозеф Шайда

Резюме

Эта статья занимается решением следующей проблемы: Найти простое отображение множества вершин и ребер n — угольника на множество чисел 1, 2, ..., $2n$ — такое, для которого сумма чисел соответствующих двум любым соседным вершинам и ребру лежащему между ними в заданном n — угольнике — постоянное число. Найден алгорифм для решения этой задачи на быстродействующей вычислительной машине.