Tibor Šalát

Poznámky k Riemannovej vete o divergentných radoch

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 5 (1955), No. 2, 94--100

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126507

POZNÁMKY K RIEMANNOVEJ VETE O DIVERGENTNÝCH RADOCH

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Nech

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

je divergentný rad s kladnými členmi a nech $a_n \to 0$.

Znamienkovou schémou budeme nazývať postupnosť:

$$[\varkappa] \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n, \ldots,$$

kde $\varepsilon_n = 1$ alebo -1 pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$

O rade:

$$[\varkappa]\, \xi = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots \tag{2}$$

budeme hovoriť, že vznikol aplikovaním znamienkovej schémy $[\varkappa]$ na rad (1). Označme znakom X množinu radov (2), vzniknutých aplikovaním všetkých znamienkových schém na rad (1).

Definujme na množine $X \times X$ reálnu funkciu $\varrho(x, y)$ takto: Nech $x, y \in X$.

$$x = [\varkappa]\, \xi = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$$
$$y = [\varkappa']\, \xi = \varepsilon'_1 a_1 + \varepsilon'_2 a_2 + \varepsilon'_3 a_3 + \ldots + \varepsilon'_n a_n + \ldots$$

1. Ak $x = y$, potom $\varrho(x, y) = 0$.

2. Ak $x \neq y$, potom $\varrho(x, y) = \frac{1}{\lambda}$, kde λ je prvý index taký, že $\varepsilon_\lambda \neq \varepsilon'_\lambda$. V práci [1] je dokázané, že takto definovaná funkcia ϱ je metrikou na X.

Definícia 1. a) *Nech $x = [\varkappa]\, \xi \in X$. Ak rad x je konvergentný, označme jeho súčet $S(x)$. Ak rad x diverguje k $+\infty$, resp. $-\infty$, položme $S(x) = +\infty$, resp. $-\infty$. Ak rad x osciluje, potom symbol $S(x)$ nedefinujeme.*

b) *Označme znakom X_1 množinu tých $x \in X$, pre ktoré je $S(x)$ definované, t. j. ktoré majú súčet a znakom X_2 množinu tých $x \in X$, ktoré oscilujú.*

c) Nech $x \in X$. *Znakom $S_n(x) = S_n([\varkappa]\, \xi)$ pre n prirodzené budeme značiť n-tý čiastočný súčet radu x.*

Poznámka. Na množine X_1 je teda definovaná určitá reálna funkcia $S(x)$. Ďalej zrejme platí: $X_1 \cup X_2 = X$.

Označenie. V ďalšom znakom E_1 budeme značiť množinu všetkých reálnych čísel, znakom E_1^* zase množinu: $E_1 \cup (+\infty) \cup (-\infty)$.

Známu Riemannovu vetu, vzťahujúcu sa na divergentné rady typu (1), možno vysloviť takto:

1. *Ku každému $m \in E_1^*$ existuje schéma $[\alpha]$ tak, že $S([\alpha]\ \xi) = m$* (3).

2. *Nech $\varkappa, \mu \in E_1^*$, $\varkappa < \mu$. Potom existuje schéma $[\alpha]$ tak, že: $\lim\inf_{n \to \infty} S_n([\alpha]\ \xi) = \varkappa$, $\lim\sup_{n \to \infty} S_n([\alpha]\ \xi) = \mu$, t. j. rad $x = [\alpha]\ \xi$ osciluje medzi $\varkappa$ a μ.*

Predmetom tejto práce je problém počtu schém $[\alpha]$, ktoré spĺňajú rovnicu (3) pri m konečnom reálnom, položený prof. M. Kösslerom a ďalej vyšetrovanie vlastností priestoru (X_1, ϱ) vnoreného do (X, ϱ).

Lemma 1. *Nech $\xi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i > 0$ pre každé $i = 1, 2, 3, \ldots$, $S(\xi) = +\infty$, $\lim_{i \to \infty} a_i = 0$. Potom existujú rastúce postupnosti prirodzených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{k_n'\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že:*

1. *Každé prirodzené číslo patrí práve do jednej z postupností $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{k_n'\}_{n=1}^{\infty}$.*

2. *Rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n'}$ divergujú k $+\infty$.*

Dôkaz: Nech l_1 je najmenšie prirodzené číslo také, že $\sum_{i=1}^{l_1} a_i > 1$, l_2 najmenšie prirodzené číslo $> l_1$ také, že $\sum_{i=l_1+1}^{l_2} a_i > 1$, atď. Keď už máme definované l_n, nech l_{n+1} je najmenšie prirodzené číslo také, že $l_{n+1} > l_n$, $\sum_{i=l_n+1}^{l_{n+1}} a_i > 1$. Čísla l_k vzhľadom na predpoklady lemmy existujú. Takto dostávame nekonečnú postupnosť:

$$l_1, l_2, l_3, \ldots l_k, \ldots$$

Postupnosti:

$$1, 2, \ldots l_1, l_2 + 1, l_2 + 2, \ldots l_3, l_4 + 1, l_4 + 2, \ldots l_5, \ldots$$
$$l_1 + 1, l_1 + 2, \ldots l_2, l_3 + 1, l_3 + 2, \ldots l_4, l_5 + 1, l_5 + 2, \ldots l_6, \ldots$$

zrejme spĺňajú tvrdenia lemmy.

Veta 1: *Nech $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ pre každé prirodzené n, $a_n \to 0$, $S(\xi) = +\infty$. Nech $m \in E_1$.*

Tvrdenie: Existuje nespočetne mnoho mohutností kontínua znamienkových schém $[\alpha]$ tak, že $S([\alpha]\ \xi) = m$.

Dôkaz: Podľa predošlej lemmy zostrojme rady:

$$\xi_1 = a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \ldots + a_{k_n} + \ldots \tag{4}$$
$$\xi_2 = a_{k_1'} + a_{k_2'} + a_{k_3'} + \ldots + a_{k_n'} + \ldots \tag{5}$$

Utvorme množinu X', (X'') všetkých radov $[\alpha]\ \xi_1$ ($[\alpha]\ \xi_2$), vzniknutých aplikovaním všetkých možných schém $[\alpha]$ na rad ξ_1, (ξ_2). Podľa dokázanej lemmy $S(\xi_1) = S(\xi_2) = \infty$. Znakom $S_n([\alpha]\ \xi_1)$, resp. $S_n([\alpha]\ \xi_2)$, budeme rozumieť n-tý čiastočný súčet radu $[\alpha]\ \xi_1$, resp. $[\alpha]\ \xi_2$. Aplikujme teraz Riemannovu vetu na rady (4), (5). Existujú teda schémy $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$.

$$[\alpha_1] = \varepsilon^{(1)}_{k_1}, \varepsilon^{(1)}_{k_2}, \varepsilon^{(1)}_{k_3}, \ldots, \varepsilon^{(1)}_{k_n}, \ldots$$
$$[\alpha_2] = \varepsilon^{(2)}_{k'_1}, \varepsilon^{(2)}_{k'_2}, \varepsilon^{(2)}_{k'_3}, \ldots, \varepsilon^{(2)}_{k'_n}, \ldots$$

takže

$$S([\alpha_1]\ \xi_1) = \frac{1}{2}\ m + a,\ S([\alpha_2]\ \xi_2) = \frac{1}{2}\ m - a,$$

kde $0 < a < 1$. Sčítaním napísaných rovníc dostaneme:

$$S([\alpha_1]\ \xi_1) + S([\alpha_2]\ \xi_2) = m.$$

Ukážeme, že:

$$S([\alpha_1]\ \xi_1) + S([\alpha_2]\ \xi_2) = S([\alpha]\ \xi), \tag{6}$$

kde schéma $[\alpha]$,

$$[\alpha] = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_r, \ldots$$

je definovaná takto: Ku každému prirodzenému r existuje na základe konštrukcie radov (4), (5) jediné prirodzené n tak, že $r = k_n$, resp. $r = k'_n$. Potom $\varepsilon_r = \varepsilon^{(1)}_{k_n}$, resp. $\varepsilon_r = \varepsilon^{(2)}_{k'_n}$. Dokážme teraz platnosť rovnice (6). Nech $S_n([\alpha]\ \xi)$ je n-tý čiastočný súčet radu $[\alpha]\ \xi$. Nech r, (r') je najväčší index taký, že $k_r < n$, $(k'_{r'} < n)$. Potom $S_n([\alpha]\ \xi) = S_{k_r}([\alpha_1]\ \xi_1) + S_{k'_{r'}}([\alpha_2]\ \xi_2) + A$, kde A je buď 0 alebo súčet tvaru:

$$\varepsilon^{(1)}_{k_r+1}\ a_{k_r+1} + \varepsilon^{(1)}_{k_r+2}\ a_{k_r+2} + \ldots + \varepsilon^{(1)}_{k_r+m}\ a_{k_r+m},$$

resp. $\varepsilon^{(2)}_{k'_{r'}+1}\ a_{k'_{r'}+1} + \varepsilon^{(2)}_{k'_{r'}+2}\ a_{k'_{r'}+2} + \ldots + \varepsilon^{(2)}_{k'_{r'}+m'}\ a_{k'_{r'}+m'}$. Pre dosť veľké r, (r') bude už vzhľadom na konvergenciu radov v (6) podľa Cauchy—Bolzanovho kritéria: $|A| < \frac{\varepsilon}{3}$ a (7)

$$\left|S_{k_r}([\alpha_1]\ \xi_1) - \left(\frac{1}{2}\ m + a\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3},\quad \left|S_{k'_{r'}}([\alpha_2]\ \xi_2) - \left(\frac{1}{2}\ m - a\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{8}$$

kde ε je ľubovoľné kladné číslo. Pre dostatočne veľké n bude aj r, resp. r' také veľké, že nerovnosti (7), (8) budú splnené, takže:

$$|S_n([\alpha]\ \xi) - m| \leq |S_n([\alpha]\ \xi) - S_{k_r}([\alpha_1]\ \xi_1) - S_{k'_{r'}}([\alpha_2]\ \xi_2)| +$$
$$+ \left|S_{k_r}([\alpha_1]\ \xi_1) - \left(\frac{1}{2}\ m + a\right)\right| + \left|S_{k'_{r'}}([\alpha_2]\ \xi_2) - \left(\frac{1}{2}\ m - a\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Teda:

$$\lim_{n\to\infty} S_n([\alpha]\ \xi) = S([\alpha]\ \xi) = m.$$

Zvoľme teraz $a' \neq a$, $0 < a' < 1$. Podľa Riemannovej vety existujú schémy $[\alpha_3]$, $[\alpha_4]$,

$$[\alpha_3] = \varepsilon^{(3)}_{k_1}, \varepsilon^{(3)}_{k_2}, \ldots, \varepsilon^{(3)}_{k_n}, \ldots$$
$$[\alpha_4] = \varepsilon^{(4)}_{k'_1}, \varepsilon^{(4)}_{k'_2}, \ldots, \varepsilon^{(4)}_{k'_n}, \ldots$$

takže

$$S([\alpha_3]\ \xi_1) = \frac{1}{2}\ m + a',\quad S([\alpha_4]\ \xi_2) = \frac{1}{2}\ m - a'.$$

Podobne ako predtým sa presvedčíme, že $S(|\alpha'|\,\xi) = m$, kde $|\alpha'|$, $|\alpha'| = \varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \ldots \varepsilon_r', \ldots$ sa dostane pomocou schém $|\alpha_3|$ a $|\alpha_4|$ hore uvedeným spôsobom. Ukážeme, že $|\alpha'| \neq |\alpha|$. Stačí ukázať, že $|\alpha_3| \neq |\alpha_1|$. Keby bolo $|\alpha_3| = |\alpha_1|$, potom by $S(|\alpha_3|\,\xi_1) = S(|\alpha_1|\,\xi_1) => \frac{1}{2}m + a' = \frac{1}{2}m + a => a' = a$, čo je spor.

Celkom máme teda výsledok: Ku každému $a \in (0,1)$ existuje schéma $|\alpha|$ tak, že $S(|\alpha|\,\xi) = m$ a pre každé dve $a, a' \in (0,1)$, $a \neq a'$ existujú dve rôzne schémy $|\alpha|$, $|\alpha'|$ spĺňajúce podmienku:

$$S(|\alpha|\,\xi) = S(|\alpha'|\,\xi) = m. \tag{9}$$

Množina tých $|\alpha|$, pre ktoré platí (9), má teda mohutnosť aspoň takú ako interval $(0,1)$, t. j. aspoň mohutnosť kontínua. Pretože však množina všetkých znamienkových schém má zrejme mohutnosť kontínua, aj množina tých $|\alpha|$, pre ktoré $S(|\alpha|\,\xi) = m$, má mohutnosť práve kontínua. Tým je dôkaz hotový.

Príklad: a) Vieme, že:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

t. j. $\log 2 = S(|\alpha|\,\xi)$, kde

$$\xi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

a $|\alpha| = 1, -1, 1, -1, \ldots$

Podľa dokázanej vety množina tých schém $|\alpha|$, pre ktoré $S(|\alpha|\,\xi) = \log 2$ má mohutnosť kontínua. Schéma:

$$|\alpha| = 1, -1, 1, -1, \ldots$$

je len jedna z nich.

b) Podobne existuje nespočetne mnoho mohutnosti kontínua radov $|\alpha|\,\xi$ takých, že $S(|\alpha|\,\xi) = \frac{\pi}{4}$, kde $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. Rad $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots +$

$$+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$$

je len jedným z nich.

V ďalšom sa budeme zaoberať vlastnosťami bodovej množiny X_1 vnorenej do priestoru (X, ϱ).

Definujme na množine X_1 reálnu funkciu $f(x)$ takto:

1. Ak je rad x konvergentný, potom kladieme $f(x) = \dfrac{S(x)}{1 + |S(x)|}$, kde $S(x)$ je súčet radu x.

2. Ak je rad x divergentný a $S(x) = +\infty$, potom kladieme $f(x) = 1$, ak je rad x divergentný a $S(x) = -\infty$, potom kladieme $f(x) = -1$.

Ďalej na množine X_1 definujme funkciu $f_n(x)$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ rovnicou:

$$f_n(x) = \frac{S_n(x)}{1 + |S_n(x)|}.$$

Poznámka. $f_n(x)$ je konečná reálna funkcia a $|f_n(x)| < 1$ pre každé $x \in X_1$.

Lemma 2. *Pre každé $x \in X_1$ existuje limita postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a platí:*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Dôkaz: Predovšetkým si uvedomíme, že na základe definície množiny X_1 existuje pre každé $x \in X_1$ limita (vlastná alebo nevlastná) postupnosti $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$.

Rozoznávajme tri prípady:

a) Nech $-\infty < S(x) < +\infty$.

Postupnosť $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ má teda vlastnú limitu $S(x)$. Keďže pre každé prirodzené n je $f_n(x) = \dfrac{S_n(x)}{1 + |S_n(x)|}$, má podľa známych viet o limitách postupností aj podiel vpravo limitu rovnú $\dfrac{S(x)}{1 + |S(x)|}$. Teda $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \dfrac{S(x)}{1 + |S(x)|} = f(x)$.

b) Nech $S(x) = +\infty$.

Podľa definície funkcie $f(x)$ je teda $f(x) = 1$. Máme ukázať, že $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 1$.

Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Existuje $K > 0$ tak, že $\dfrac{1}{1 + K} < \varepsilon$. Keďže ďalej $\lim S_n(x) = +\infty$, existuje n_0 tak, že pre všetky $n \geq n_0$ je $S_n(x) > K$. Teda pre všetky $n \geq n_0$ platí:

$$|f_n(x) - 1| = \left| \frac{S_n(x)}{1 + S_n(x)} - 1 \right| = \frac{1}{1 + S_n(x)} < \frac{1}{1 + K} < \varepsilon.$$

c) Nech $S(x) = -\infty$.

Tvrdenie lemmy sa v tomto prípade dokáže úplne tak ako v prípade b).

Veta 2: *Množina X_1 tých radov $x \in X$, ktoré majú súčet, je množinou prvej kategórie.*

Dôsledok. Keďže priestor (X, ϱ) je množinou druhej kategórie (je to úplný priestor — pozri [1]), množina X_2 oscilujúcich radov z X je množinou druhej kategórie.

Dôkaz: Predovšetkým ukážeme, že pre každé pevné n prirodzené je funkcia $f_n(x)$ spojitá v (X_1, ϱ). Skutočne, nech $x \in X_1$ a ε je ľubovoľné kladné číslo. Položme $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$. Pre každé $y \in X_1$, $\varrho(x, y) < \delta$ platí: $S_n(y) = S_n(x) \Rightarrow f_n(y) = f_n(x) \Rightarrow |f_n(y) - f_n(x)| = 0 < \varepsilon$.

Podľa lemmy 2 je funkcia $f(x)$ v celom priestore X_1 limitom postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, teda $f(x)$ je funkciou prvej Baireovej triedy v X_1.

Ukážeme, že funkcia $f(x)$ je nespojitá v celom priestore (X_1, ϱ). Máme teda ukázať, že $f(x)$ je nespojitá v každom bode $x \in X_1$, $x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$

Rozoznávajme tri prípady:

a) Nech $S(x) = +\infty$.

Podľa definície funkcie $f(x)$ je teda $f(x) = 1$. Nech $\varepsilon \in (0,2)$. Ukážeme: nech δ je akékoľvek kladné číslo, existuje $y \in X_1$ tak, že $\varrho(x, y) < \delta$ a $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Skutočne, nech $\delta > 0$. Zvoľme prirodzené N tak, aby $\frac{1}{N} < \delta$. K radu x zostrojme rad:

$$y = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \ldots + \varepsilon_N a_N - a_{N+1} - a_{N+2} - \ldots - a_{N+k} - \ldots$$

Zrejme je: $\varrho(x, y) < \frac{1}{N} \Rightarrow \varrho(x, y) < \delta$. Vzhľadom na divergenciu radu (1) je

$$S(y) = -\infty \Rightarrow f(y) = -1. \text{ Teda } |f(x) - f(y)| = 2 > \varepsilon.$$

b) Nech $S(x) = -\infty$.

V tomto prípade sa tvrdenie dokáže tak ako v prípade a).

c) Nech $-\infty < S(x) < +\infty$.

Potom pre číslo $f(x) = \dfrac{S(x)}{1 + |S(x)|}$ platí: $|f(x)| < 1$, teda $|1 - f(x)| > 0$. Položme $\varepsilon = \dfrac{|1 - f(x)|}{2} > 0$. Ukážeme, že v každom okolí bodu x existuje bod y tak, že $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Nech δ je ľubovoľné kladné číslo. Zostrojme δ-okolie bodu x, t. j. množinu $\Omega(x, \delta)$, $\Omega(x, \delta) = \underset{y}{E}(y \in X_1, \varrho(x,y) < \delta)$.

Nech N je prirodzené číslo také, aby $\frac{1}{N} \leqq \delta$. Zostrojme rad:

$y = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_N a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} + \ldots$ Zrejme $y \in \Omega(x, \delta)$, keďže $\varrho(x, y) \leqq \dfrac{1}{N+1} < \delta$. Ďalej vzhľadom na divergenciu radu (1) je $S(y) = +\infty \Rightarrow f(y) = 1$. Teda:

$$|f(y) - f(x)| = |1 - f(x)| > \varepsilon.$$

Podľa známych viet o funkciách prvej Baireovej triedy je množina bodov nespojitosti funkcie prvej triedy v X_1 množinou prvej kategórie v X_1, teda X_1 je množinou prvej kategórie v X_1 a tým skôr prvej kategórie v X.

Veta 3: *Množina X_1 je hustá v X.*

Dôkaz. Nech $m \in E_1$. Ukážeme, že už množina X_{1m} tých $x \in X_1$, pre ktoré $S(x) = m$, je hustá v X. Máme teda ukázať, že pre uzáver množiny X_{1m} platí: $\bar{X}_{1m} = X$. Nech $x \in X$. Stačí dokázať, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $y \in X_{1m}$ tak, že $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Nech je $x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$

Zvoľme prirodzené n tak, aby $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Označme $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n = a$.

Zostrojme schému:

$[\lambda'] = \varepsilon'_{n+1}, \varepsilon'_{n+2}, \varepsilon'_{n+3}, \ldots \varepsilon'_{n+k}, \ldots$

tak, aby rad

$$\varepsilon'_{n+1} a_{n+1} + \varepsilon'_{n+2} a_{n+2} + \varepsilon'_{n+3} a_{n+3} + \ldots + \varepsilon'_{n+k} a_{n+k} + \ldots$$

bol konvergentný a aby jeho súčet bol $m - a$. To je zrejme možné na základe Riemannovej vety. Potom rad

$$y = [\lambda]\xi = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \varepsilon'_{n+1} a_{n+1} + \ldots + \varepsilon'_{n+k} a_{n+k} + \ldots$$

je konvergentný, $\varrho(x,y) \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ a $S(y) = m$, t. j. $y \in X_{1m}$. Tým je dôkaz hotový.

Došlo 24. IX. 1954.

LITERATÚRA

1. T. Šalát: O súčtoch istých konvergentných radov. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, 4, r. 1954, str. 122

ПРИМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ РИМАНА О РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ

ТИБОР ШАЛАТ

Выводы

Предметом настоящей работы является решение некоторых вопросов, находящихся в связи с теоремой Римана о расходящихся рядах.

Последовательность: $[\lambda] = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = +1$ или -1 назовем символической схемой.

Пусть $\xi = \sum^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ для каждого $n = 1, 2, 3 \ldots$, расходящийся ряд, $a_n \to 0$.

Знаком $[\lambda]\,\xi$ обозначим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$. Если этот ряд сходится, обозначим его сумму $S([\lambda]\,\xi)$. На основании теоремы Римана к каждому реальному числу m существует схема $[\lambda]$ так, что $S([\lambda]\,\xi) = m$. В работе доказана теорема, находящаяся в связи с ней: К каждому реальному m существует бесконечно много мощности континуа схем $[\lambda]$ так, что $S([\lambda]\,\xi) = m$.

Знаком X обозначим множество всех рядов $X = [\lambda]\,\xi$, где $[\lambda]$ пробегают все возможные схемы. Само собой разумеется, что X является несчетным множеством мощности континуа. Знаком X_1 обозначим множество тех $x \in X$, которые имеют сумму (конечную или бесконечную), знаком X_2, множество тех $x \in X$, которые не имеют суммы. На множестве X определяется метрика ϱ, заведенная автором в работе [1]. В настоящей работе доказана теорема: Множество X_1 является множеством первой категории, плотным в X, множество X_2 является множеством другой категории.