Pavel Bartoš

O niektorých kombinatorických nerovnostech

Matematický časopis, Vol. 21 (1971), No. 3, 219--220

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126493

Matematický časopis 21 (1971), No. 3

O NIEKTORÝCH KOMBINATORICKÝCH NEROVNOSTIACH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Veta. *Nech je n prirodzené číslo, a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ nezáporné čísla. Platia nerovnosti*

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \geqq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}} \geqq 2^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \sqrt[2^2]{a_k^{\binom{2}{0}} a_{k+1}^{\binom{2}{1}} a_{k+2}^{\binom{2}{2}}} \geqq$$

$$\geqq 2^3 \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} \sqrt[2^3]{a_k^{\binom{3}{0}} a_{k+1}^{\binom{3}{1}} a_{k+2}^{\binom{3}{2}} a_{k+3}^{\binom{3}{3}}} \geqq \ldots \geqq 2^n \sqrt[2^n]{a_0^{\binom{n}{0}} a_1^{\binom{n}{1}} \ldots a_n^{\binom{n}{n}}},$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dôkaz. Dokážeme nerovnosť

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \geqq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}}.$$

(2) platí, keď $n = 1$, lebo vtedy platí $a_0 + a_1 \geqq 2\sqrt{a_0 a_1}$ a rovnosť platí práve vtedy, keď $a_0 = a_1$. Nech platí (2) pre ľubovoľné nezáporné čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a určité prirodzené n. Potom (2) tiež platí pre ľubovoľné nezáporné čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, a teda platí

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+1} \geqq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_{k+1} a_{k+2}}.$$

Sčítaním nerovností (2) a (3) dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a_k \geqq 2 \Bigg[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \sqrt{a_k a_{k+1}} \Bigg],$$

odkiaľ vyplýva

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k \geqq 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}},$$

čiže (2) platí aj pre $n + 1$. Tým je nerovnosť (2) dokázaná. Rovnosť zrejme platí práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$.

Opätovným použitím nerovnosti (2) dostaneme nerovnosti

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}} \geqq 2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \sqrt[2^2]{a_k^{\binom{2}{0}} a_{k+1}^{\binom{2}{1}} a_{k+2}^{\binom{2}{2}}},$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \sqrt[2^2]{a_k^{\binom{2}{0}} a_{k+1}^{\binom{2}{1}} a_{k+2}^{\binom{2}{2}}} \geqq 2 \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} \sqrt[2^3]{a_k^{\binom{3}{0}} a_{k+1}^{\binom{3}{1}} a_{k+2}^{\binom{3}{2}} a_{k+3}^{\binom{3}{3}}},$$

až po nerovnosť

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \sqrt[2^{n-1}]{a_k^{\binom{n-1}{0}} a_{k+1}^{\binom{n-1}{1}} \ldots a_{k+n-1}^{\binom{n-1}{n-1}}} \geqq 2 \sqrt[2^n]{a_0^{\binom{n}{0}} a_1^{\binom{n}{1}} \ldots a_n^{\binom{n}{n}}},$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$. Tým je nerovnosť (1) dokázaná.

Poznámka. Nerovnosť

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \geqq 2^n \sqrt[2^n]{a_0^{\binom{n}{0}} a_1^{\binom{n}{1}} \ldots a_n^{\binom{n}{n}}}$$

vyplýva z nerovnosti medzi váženým aritmetickým a geometrickým priemerom, ak je váhou $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}\right)$.

ON SOME COMBINATORIAL INEQUALITIES

Pavel Bartoš

Summary

Theorem. *Let n be a natural number, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — non-negative numbers. Then the inequalities* (1) *hold. The equalities in* (1) *take place if and only if* $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Došlo 12. 11. 1969