Václav Havel

Poznámka o zobecnění direktního součinu částečně uspořádaných množin

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 5 (1955), No. 1, 3--10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126456`

POZNÁMKA O ZOBECNĚNÍ DIREKTNÍHO SOUČINU ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

VÁCLAV HAVEL, Praha

Nejprve zavedeme několik pojmů, které budeme potřebovat v pozdějších úvahách.

Symbolem $M(r)$ označme množinu M s binární relací r, definovanou mezi prvky množiny M. Relaci částečného uspořádání budeme označovat $\leqq$ (s příslušným indexem). Dále zavedeme dvě odvozené binární relace:

a) Kontrakce: buď dáno $M(r)$. Pak odvoďme $M(^C r)$ podle ekvivalence $x\, ^C r\, y \Leftrightarrow x\, r\, y,\ x \neq y$, kde $x, y \in M$.

b) Extense: buď dáno $M(r)$. Odvoďme $M(^E r)$ podle ekvivalence $x\, ^E r\, y \Leftrightarrow x\, r\, y$ anebo $x = y$, kde $x, y \in M$.

Je-li relace r částečným uspořádáním, pak budeme místo $^C r$ psát $<$.

Připomeňme, že z každé nereflexivní transitivní relace r dostaneme extensí částečné uspořádání a že naopak $<$ je nereflexivní transitivní relace.

Pojmu homomorfismu a isomorfismu budeme užívat v tomto smyslu: Nechť jsou dány: $A_1(r_1)$, $A_2(r_2)$. Pak symbolem $A_1 \sim A_2$ ($A_1 \simeq A_2$) označíme homomorfismus (isomorfismus), který převádí relaci r_1 v relaci r_2.

Uspořádanou množinu nazveme také řetězcem. Řetězec o n prvcích označíme $\boldsymbol{n}$.

Obě množinové operace (sjednocení a průnik) označíme $\cup$, $\cap$, obě svazové operace (spojení a průsek) označíme $\vee$, $\wedge$.

Direktním součinem $A_1 \times A_2$ množin $A_1(\leqq_1)$, $A_2(\leqq_2)$ budeme rozumět množinu $\underset{(x_1, x_2)}{E}$ ($x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$) s částečným uspořádáním $\leqq$, daným podle ekvivalence $(x_1, x_2) \leqq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leqq_1 y_1,\ x_2 \leqq_2 y_2$.

Poučka 1. Předpoklady. *Buď dáno*: $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$, $S(r)$ *tak, že jsou splněny podmínky*:

P 1 $S = \bigcup_{b \in B} A_b$, *kde* $A_b(\leqq_b)$ *jsou množiny definované pro každé* b *z množiny* B *tak, že platí isomorfie* $A_b \simeq A$ *a pro* $x, y \in A_b$ *platí* $X <_b y \Leftrightarrow x\, r\, y$ *(pro každé* $b \in B$*)*.[0]

[0] V dalším nebudeme již rozlišovat symboly $\leqq_b$, $\leqq$.

P 2 *Implikace $a \geqq x \in A_b$, $a' \leqq y \in A_{b'} \Rightarrow x\,r\,y$ platí pro každou dvojici prvků b, b', splňujících relace $b \in B \ni b' >_B b$, a pro každý vzor a s obrazem a' v isomorfismu $A_b \simeq A_{b'}$, určeném podle isomorfismů $A_b \simeq A \simeq A_{b'}$.*[1] *Pro každou dvojici b, b', splňující relace $b \in B \ni b' >_B b$, a pro každou dvojici x, y, splňující relace $A_b \ni x\,r\,y \in A_{b'}$, existuje vzor a s obrazem a' v isomorfii $A_b \simeq A_{b'}$ tak, že platí $x \leqq a$, $y \geqq a'$.*

P 3a *Jsou-li b, b' dva různé prvky z množiny B a existují-li prvky x, y, pro něž platí $A_b \ni x\,r\,y \in A_{b'}$, pak platí $b <_B b'$.*

P 3b *Množiny A_b, $A_{b'}$ jsou disjunktní pro každou dvojici různých prvků b, b', ležících v množině B.*

Závěr: *Platí isomorfismus $S(^E r) \simeq A \times B$.*

Důkaz:

Ke každému prvku x z množiny S přiřaďme uspořádanou dvojici (a_x, b_x) tak, že a_x je vzor prvku x v isomorfii $A \simeq A_{b_x}$ pro jistý jednoznačně určený prvek b_x z množiny B. Nyní jde o to, dokázat ekvivalenci $a_x \leqq a_y$, $b_x \leqq_B b_y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^E r\,y$.

Nechť tedy platí levá strana této (zatím nedokázané) ekvivalence. Je-li $b_x = b_y$, pak z **P 1** plyne ihned $x^E r\,y$. Je-li $b_x < b_y$, pak odvodíme $x\,r\,x' \leqq y$, kde x' je obraz prvku x v isomorfismu $A_{b_x} \simeq A_{b_y}$. Podle **P 2** platí tedy xry.

Nechť nyní platí relace $x^E r\,y$. Je-li $b_x = b_y$, pak z podmínky **P 1** plyne $a_x \leqq a_y$. Případ $b_x >_B b_y$ nemůže nastat (vzhledem k **P 3a**). Je-li $b_x <_B b_y$, pak podle **P 2** plyne také $a_x < a_y$. Ekvivalence je tím dokázána.

Důsledek. Jsou-li $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$ svazy, pak také $S(^E r)$ je svaz. Modularita (distributivita) svazů A, B implikuje modularitu (distributivitu) svazu S.

Poznámka 1. Je-li dáno $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$ a platí-li dále $S \simeq A \times B$, jsou splněny podmínky **P 1**, **P 2**, **P 3** (relace r je určena z předchozí isomorfie).

Důkaz je snadný.

Poučka 2. 1. Existují svazy $A(\leqq)$, $B(\leqq)$[2] *a množina $S(r)$, pro něž platí:*

a) **P 1**, **P 2**, *non* **P 3a**, **P 3b**, *respektive*

b) **P 1**, **P 2**, *non* **P 3a**, *non* **P 3b**

a množina S není relací $^E r$ částečně uspořádána.

2. *Existují svazy $A(\leqq)$, $B(\leqq)$ a množina $S(\leqq)$,*[2] *pro něž platí* a), *respektive* b), *avšak $S(\leqq)$ není svaz.*

Důkaz:

Ad 1a. Na obr. 1 jsou diagramy svazů A, B a orientovaný graf množiny S s relací r. (Připomeňme, že existence orientované hrany $\overrightarrow{xy}$ je ekvivalentní s relací $x\,r\,y$.) Platí a); množina S není však relací $^E r$ částečně uspořádána.

---

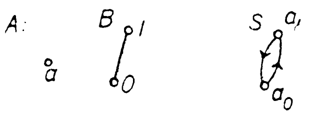
[1] V dalším budeme isomorfismem $A_b \cong A_{b'}$ rozumět právě takovýto isomorfismus.

[2] Částečná uspořádání nerozlišujeme, neboť není třeba se obávat nedorozumění.

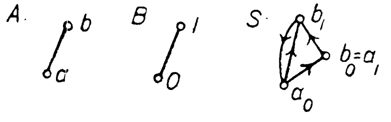
Ad 1b. Na obr. 2 jsou diagramy svazů A, B a orientovaný graf množiny $S(r)$. Platí b); avšak množina S není relací $^E r$ částečně uspořádána.

Ad 2a. Na obr. 3 jsou diagramy svazů A, B a množiny $S(\leqq)$. Platí a): množina $S(\leqq)$ však není svaz.

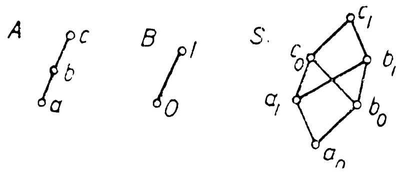
Ad 2b. Na obr. 4. jsou diagramy svazů A, B a množiny $S(\leqq)$. Platí b), přesto však množina $S(\leqq)$ není svaz.



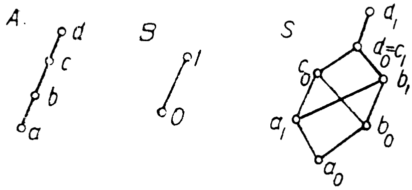
Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 4.

Poučka 3. a) *Nechť pro množiny $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$, $S(r)$ platí podmínky* **P 1**, **P 2**, **P 3a**. *Pak $^E r$ je částečné uspořádání na množině S.*

b) *Jsou-li $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$ svazy, je také $S(^E r)$ svaz.*

Důkaz:

a) Nechť platí předpoklady v části a), dokažme, že množina S je relací $^E r$ částečně uspořádána. Pro relaci r není třeba dokazovat nereflexivnost, neboť platí podmínka **P 1**. Ještě tedy dokážeme transitivnost relace r. Buďte x, y, z prvky z množiny S, pro něž platí $x r y r z$. Rozlišujme několik případů:

1. V množině B existuje prvek b tak, že prvky x, y, z patří do množiny A_b. Pak podle podmínky **P 1** dostáváme ihned $x r z$.

2. V množině B existují různé prvky b, b' tak, že prvky x, y leží v množině A_b a prvek z leží v množině $A_{b'}$. Podle **P 3a** platí $b <_B b'$. Podle **P 2** je pak $x r z$. Obdobně pro případ $x \in A_b$, $y \in A_{b'} \ni z$, $b \neq b'$.

3. V množině B existují různé prvky b, b', pro něž platí $x \in A_b \ni z$, $y \in A_{b'}$. Podle **P 3a** je $b <_B b' <_B b$; to však není možné. Tento případ nemůže tedy nastat.

4. V množině B existují navzájem různé prvky b, b', b'' tak, že $x \in A_b$, $y \in A_{b'}$, $z \in A_{b''}$. Podle **P 3a** platí relace $b <_B b' <_B b''$. Z toho plyne $x r z$ podle podmínek **P 2**, **P 1**.

Transitivita relace r je tím dokázána. Množina S je tedy relací $^E r$ částečně uspořádána.[3]

[3] V dalším nerozlišujeme již symboly $\leqq$, $\leqq_B$, $^E r$.

b) Nechť $A(\leqq)$, $B(\leqq)$ jsou svazy. V poučce 1 byl projednán případ, kdy pro každou dvojici různých prvků b, b' z množiny B platí $A_b \cap A_{b'} = 0$. Omezíme se tedy na případ, kdy existují různé prvky b, b' v množině B tak, že platí $c \in R = A_b \cap A_{b'}$ (pro jistý prvek c). Platí-li v R relace $d < c$, pak z relací $d \in A_b$, $c \in A_{b'}$, $b \neq b'$ plyne podle **P 1** a podle **P 3a** relace $b < b'$. Obdobně odvodíme $b > b'$ z relací $d \in A_{b'}$, $c \in A_b$, $b \neq b'$. To je však spor; tedy $R = \{c\}$.

I. Je-li $A_b = A_{b'} = \{c\}$ (t. j. $A \simeq \mathbf{1}$), pak prvky b, b' nejsou srovnatelné (v množině B). Kdyby totiž platilo $b < b'$, pak by platilo $c < c$ podle podmínek **P 2**, **P 1**; to je však spor.

Nyní platí homomorfie $B \sim S$, určená podle podmínek **P 1**, **P 2**, **P 3a**. Označíme-li x' obraz prvku x v této homomorfii, pak tedy platí implikace $x \leqq y \Rightarrow x' \leqq y'$. Podle **P 3a** platí však také implikace $x' < y' \Rightarrow x < y$.

Z toho již plyne, že množina $S(\leqq)$ je svaz.

II. Obsahuje-li množina A nejméně dva různé prvky, pak existuje aspoň v jedné z množin A_b, $A_{b'}$ (dejme tomu v A_b) prvek e, pro nějž platí $e < c$. Podle **P 3a** plyne ze vztahů $e \in A_b$, $c \in A_{b'}$, $b \neq b'$ relace $b < b'$. Ale pak nemůže v A_b existovat prvek c_0, pro nějž by platilo $c_0 > c$. Kdyby tomu tak bylo, pak z relací $c_0 \in A_b$, $c \in A_{b'}$, $b \neq b'$ by plynulo podle **P 3a** $b > b'$, což je ve sporu s předchozím. Tedy c je největší v A_b. Obdobně se dokáže, že c je nejmenší v $A_{b'}$.

Předpokládejme, že v A_b existuje řetězec $c_2 < c_1 < c$. Označme c_1' obraz prvku c_1 v isomorfii $A_b \sim A_{b'}$. Platí relace $c_1' > c$ (podle toho, že c je nejmenší v $A_{b'}$ a podle **P 1**.)[4] Poněvadž platí vztahy $c \in A_b$, $c < c_1'$, musí být podle druhé části podmínky **P 2** také $c \leqq c_1$. To však odporuje relaci $c > c_1$. Z toho plyne isomorfie $A \sim \mathbf{2}$.

Dokážeme, že v S existuje ke každým dvěma prvkům x, y spojení (vzhledem k relaci $\leqq$). Je-li $x \leqq y$, pak zřejmě y je hledaným spojením. Nechť tedy prvky y, x nejsou srovnatelné. Vyberme prvky b, b' v množině B tak, aby platilo $x \in A_b$, $x \in A_{b'}$. Rozlišujme několik případů.

1. Případ $b = b'$ není možný, protože platí $A \simeq \mathbf{2}$.

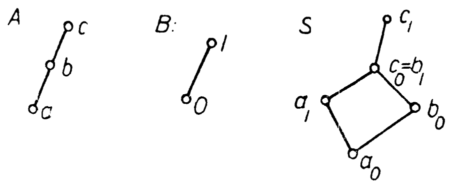
2. Vyšetřujme případ $b < b'$. Všimněme si těch prvků p z množiny S, pro něž platí $x < p > y$. Nechť platí incidence $p \in A_c$ (pro jistý prvek c z množiny B). Případ $b = c = b'$ nemůže nastat (platí přece $b < b'$). Rovněž případ $b = c \neq b'$ nemůže nastat; kdyby nastal, znamenalo by to, že $b > b'$ (podle **P 3a**), a to je opět ve sporu s předpokládanou relací $b < b'$. Zbývají tedy případy $b \neq c = b'$, $b \neq c \neq b'$. V prvním z nich odvodíme podle **P 2** relaci $p \geqq x_1 \smile y(A_{b'})$, kde x_1 je obrazem prvku x v isomorfismu $A_b \cong A_b$.[5] V druhém případě platí $c > b'$ (podle **P 3 a**); podle **P 2** dostaneme $p \geqq x_2 \smile y_2(A_c)$, kde x_2 (y_2) je obraz prvku x (y) v isomorfii $A_b \cong A_c$ ($A_{b'} \cong A_c$). Podle **P 2** plyne konečně hledaný

[4] Kdyby platilo $c_1' = c$, pak pro obraz c_2' prvku c_2 v isomorfii $A_b \cong A_{b'}$ by platilo $c_2' < c$. A to odporuje té skutečnosti, že c je nejmenší v $A_{b'}$.

[5] Závorkou budeme vždy značit, ve které množině A_b je spojení uvažováno.

závěr $p \geqq x_1 \vee y(A_{b'})$ pro každé vyšetřované p. Tedy $x_1 \vee y(A_{b'})$ je spojením prvků x, y v S.

3. Nechť prvky b, b' nejsou srovnatelné. Podobně jako v případě 2 dokážeme i zde, že platí $b \neq c \neq b'$ pro každý prvek p z množiny S, pro nějž platí $x < p > y$ a pro každý prvek c z množiny B, pro který platí incidence $p \in A_c$. Podle **P2** je pak $p \geqq x_1 \vee y_2(A_{b \vee b'})$, kde x_1 je obraz prvku x v isomorfii $A_b \simeq A_{b \vee b'}$ a prvek y_2 je obraz prvku y v isomorfismu $A_{b'} \simeq A_{b \vee b'}$. Tedy $x_1 \vee y_2(A_{b \vee b'})$ je spojením prvků x, y v S.



Obr. 5.

Obdobné jsou důkazy pro průsek. Tedy i v tomto případě je množina $S(\leqq)$ svaz, který je zobecněním součinu $\mathbf{2} \times B$ (pro daný svaz B).

V dalším budeme vyšetřovat podmínky:

P4a *Existují-li prvky* x, y, b, b', *pro něž platí* $b \in B \ni b'$, $y \in A_b \ni x r y \in A_{b'}$, *pak platí relace* $b <_B b'$.

P4b *Existují-li prvky* x, y, b, b', *pro něž platí* $b \in B \ni b'$, $A_b \ni x r y \in A_{b'} \not\ni x$, *pak platí relace* $b <_B b'$.

Poznámka 2. Na obr. 5 jsou diagramy svazů $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$, $S({}^E r)$. Platí pro ně podmínky **P1**, **P2**, **P4a**, avšak neplatí podmínka **P4b** (neboť je $a_I r c_0 \in A_0 \ni a_I \in A_I$, $I >_B 0$).

Poučka 4. Buď dáno: $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$, $S(r)$ *tak, že platí* **P1**, **P2**, **P4a** (*nebo* **P4b**). *Pak* ${}^E r$ *je částečné uspořádání na* S.

Důkaz:

Vzhledem k podmínce **P1** není třeba pro relaci r dokazovat nereflexivnost. Zbývá tedy dokázat transitivitu. Jsou-li v S dány prvky x, y, z, pak nastává aspoň jeden z těchto případů:

1. V množině B existuje prvek b tak, že prvky x, y, z patří do A_b.
2. V množině B existují prvky b, b' tak, že platí $x \in A_b \ni y$, $A_b \ni x \in A_{b'}$.
3. V množině B existují prvky b, b' tak, že platí $x \in A_b \not\ni z \in A_{b'} \ni y \notin A_b$.
4. V množině B existují prvky b, b', tak, že platí $x \in A_b \ni z \in A_{b'} \ni y \notin A_b$.
5. V množině B existují prvky b, b', b'' tak, že platí $x \in A_b \not\ni y \in A_{b'} \not\ni z \in A_{b''}$.

Předpokládejme, že jsou splněny relace $x r y r z$.

Ad 1. Podle podmínky **P1** dostaneme ihned $x r z$.

Ad 2. Aplikujeme-li **P4a** pro $y \in A_b \not\ni z \in A_{b'}$, dostaneme $b <_B b'$. Opět podle **P2** plyne $x r z$.

Ad 3. Aplikujeme **P4a** pro $x \in A_b \ni y \in A_{b'}$. Platí tedy opět $b <_B b'$. Podle **P2** odvodíme i zde $x r z$.

Ad 4. Jako v případě 3 platí i zde $b <_B b'$. Podmínku **P4a** užijeme ještě na případ, kdy $y \in A_{b'} \ni z \in A_b$. Dostaneme tak $b >_B b'$, což je ve sporu s předchozím. Tento případ nemůže tedy nastat.

Ad 5. Tak jako v případě 3, je i zde $b <_B b'$. Podmínky **P4a** užijeme ještě v případě, kdy $y \in A_{b'} \ni z \in A_{b''}$. Dostáváme $b' <_B b''$. Tedy platí $b <_B b''$; podle **P2** odvodíme konečně $x r z$.

Transitivnost je tím dokázána. Tedy množina S je relací r částečně uspořádána. Duálně postupujeme v případě, když platí místo **P4a** podmínka **P4b**.

Poznámka 3. Předpokládejme, že množiny $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$ v poučce 4 jsou svazy a že platí jak **P4a**, tak **P4b**. Jsou-li b, b' nesrovnatelné prvky z množiny B a není-li průnik $A_b \cap A_{b'}$ prázdný, pak $A_b = A_{b'}$.

Důkaz:

V opačném případě existuje (při vhodném označení) v A_b prvek e, který nepatří do $A_{b'}$, a prvek e_0, který patří též do $A_{b'}$ a je srovnatelný s prvkem e. Ale pak buď podle **P4a**, anebo podle **P4b** je prvek b srovnatelný s prvkem b'. A to je spor s předpokladem.

Poučka 5. Nechť pro svazy $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$ a množinu $S(\leqq)$ platí **P1**, **P2**, **P4**. *Pak množina $S(\leqq)$ je svaz.*

Důkaz:

Navazujíce na předchozí poučku dokážeme, že v S existuje ke každým dvěma prvkům spojení. Platí-li $x \leqq y$, pak zřejmě y je hledaným spojením prvků x, y. Nechť tedy v dalším jsou prvky x, y nesrovnatelné. Rozlišujme několik možností:

I. V B existuje prvek b tak, že oba prvky x, y patří do A_b. Vyšetřujme v S ty prvky p, pro něž platí $x < p > y$. Předpokládejme, že platí $A_b \ni p \in A_c$ (pro jistý prvek c z množiny B). Podle **P4a** je pak $b < c$. Je-li dále p_1 vzor prvku p v isomorfii $A_b \cong A_c$, pak podle druhé části podmínky **P2** platí implikace $p > x \Rightarrow p_1 \geqq x$, $p > y \Rightarrow p_1 \geqq y$. Tedy platí $p_1 \geqq x \vee y(A_b)$. Podle první části podmínky **P2** je $p > x \vee y(A_b)$. Tedy platí $p \geqq x \vee y(A_b)$ pro každý prvek p z S, pro nějž je $x < p > y$ (případ $p \in A_b$ je totiž zřejmý). Tedy $x \vee y(A_b)$ je spojením prvků x, y v množině S.

II. Prvky x, y nepatří současně do A_v pro žádné v z množiny B.

1. V B existují prvky b, b', splňující relace $b < b'$, $x \in A_b$, $y \in A_{b'}$. Vyšetřujme v S ty prvky p, pro něž platí $x < p > y$, $p \in A_{b'}$. Nechť platí dále $p \in A_c$ pro jistý prvek c z množiny B. Podle **P4a** je $c > b'$, a tedy $p \geqq x_2 \vee y_2(A_c)$, kde x_2 (y_2) je obraz prvku x (y) v isomorfii $A_b \cong A_c$ $(A_{b'} \cong A_c)$.

Vyšetřujme dále v $A_{b'}$ ty prvky p, pro něž platí $x < p > y$. Podle **P2** je $p \geqq x_1 \vee y(A_{b'})$, kde x_1 je obraz prvku x v isomorfii $A_b \cong A_{b'}$. Tedy celkem platí $p \geqq x_1 \vee y(A_{b'})$ pro každý prvek p z množiny S, pro který platí $x < p > y$ (podle podmínky **P 2**).[6] Tedy $x_1 \vee y(A_{b'})$ je spojením prvků x, y v množině S.

2. Ze vztahů $x \in A_b$, $y \in A_{b'}$ plyne, že prvky b, b' jsou nesrovnatelné. Vyšetřujme opět v S ty prvky p, pro něž platí $x < p > y$. Nechť dále platí $p \in A_c$ pro jistý prvek c z množiny B. Je-li pro každé takové p platný vztah $p \notin A_b \cup A_{b'}$, pak $c \geqq b \vee b'$ (podle **P 4a**) a $p \geqq x_1 \vee y_2(A_{b \vee b'})$ (podle **P 2**); při tom x_1 je obraz prvku x v isomorfii $A_{b'} \cong A_{b \vee b'}$ a y_2 je obraz prvku y v isomorfii $A_{b'} \cong A_{b \vee b'}$.[7] Tedy $x_1 \vee y_2(A_{b \vee b'})$ je spojením prvků x, y v S.

Leží-li prvek p v A_b a neleží-li v $A_{b'}$, pak z relace $p > y$ plyne podle **P 4a** $b > b'$ a dostáváme spor s předpokladem, že prvky b, b' jsou nesrovnatelné. Obdobné je to v případě, kdy $A_b \ni p \in A_{b'}$. Platí-li $p \in A_b \cap A_{b'}$, pak z poznámky 3 plyne $A_b = A_{b'}$, což je spor s předpokladem, že x, y neleží v témže A_v pro žádné v z množiny B.

Tedy spojení je v S definováno. Duálně se dokáže, že také průsek je v S definován. Tedy $S(\leqq)$ je svaz, jak jsme měli dokázat.

Všecky úvahy z této poznámky jsou spjaty s tímto problémem: *Buďte dány svazy $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$ a množina $S(r)$ tak, že platí* **P 1**, **P 2**. *Jaká je nutná a postačující podmínka pro to, aby $S(^E r)$ byl svaz (zejména pro $B \simeq$* **2**)?

Poznámka 2 ukazuje, že **P 4** touto podmínkou není.

Došlo 8. IV. 1954.

ЗАМЕТКА К ОБОБЩЕНИЮ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

В. ГАВЕЛ

Выводы

Пусть $M(r)$ множество M с бинарным отношением r между его элементами. Отношение частичного упорядочения будем обозначать $\leqq$. Пару элементов p_1, p_2, для которых справедливо свойство V, обозначаем кратко $p_1, p_2(V)$. Пусть теперь $A(\leqq)$, $B(\leqq_B)$, $S(r)$ данные множества с соответствующими отношениями. В статье исследованы следующие условия:

P 1: Пусть $S = \bigcup_{b \in B} A_b$ и при том для каждого $b \in B$, $A_b(\leqq)$ множества изоморфны с $A(\leqq)$ и для $x, y \in A_b$ справедливо отношение эквивалентности $x < y \Leftrightarrow x r y$.

P 2: В изоморфизме $A_b \cong A_{b'}$ (заданном через изоморфизмы $A_b \cong A \cong A_{b'}$) справедливо для каждого b, b' ($b, b' \in B$, $b <_B b'$) и для каждого прообраза a с образом a' следствие $a \geqq x \in A_b$, $a' \leqq y \in A_{b'} \Rightarrow x r y$. Для каждого b, b' ($b, b' \in B$, $b <_B b'$) и для каждого x, y ($x \in A_b$, $y \in A_{b'}$, $x r y$) существует прообраз a и образ a' в упомянутом изоморфизме $A_b \cong A_{b'}$, так что $x \leqq a$, $y \leqq a'$.

[6] Podrobně: prvky $x_1 \vee y$, $x_2 \vee y_2$ jsou vzor a obraz v isomorfii $A_{b'} \cong A_c$; podle první části podmínky **P 2** platí v případě $p \notin A_{b'}$ relace $p > x_1 \vee y(A_{b'})$.

[7] Podrobná argumentace je obdobná jako v poznámce 6.

P 3a: Для любых различных элементов $b, b' \in B$ и для всякого x, y ($x \in A_b$, $y \in A_{b'}$, xry) справедливо отношение $b <_B b'$.

P 3b: Для любых различных элементов $b, b' \in B$, $A_b \cap A_{b'} = 0$.

P 4a: Для $b, b' \in B$ и для x, y ($x \in A_b$, $y \in A_{b'}$, $y \notin A_b$, xry) справедливо $b <_B b'$.

P 4b: Для $b, b' \in B$ и для x, y ($x \in A_b$, $x \notin A_{b'}$, $y \in A_{b'}$, xry) справедливо $b <_B b'$.

В статье доказано, что из условий **P 1**, **P 2**, **P 3a**, **P 3b** следует, что множество S с отношением ${}^E r$ (заданным по отношению эквивалентности $x\,{}^E r\,y \Leftrightarrow xry$ или $x = y$) изоморфно с произведением $A x B$. Далее показано, что из условий **P 1**, **P 2**, **P 3a** следует, что упомянутое отношение частично упорядочено на S; если $A(\leq)$, $B(\leq_B)$ структуры, то и $S({}^E r)$ структура. Наконец показано, что также из условий **P 1**, **P 2**, **P 4a** следует, что ${}^E r$ частично упорядочено на S; если кроме того имеет еще место **P 4b** и если $A(\leq)$, $B(\leq_B)$ структуры, то $S({}^E r)$ также структура.

TOPOLOGICKÉ GRUPOIDY

ROBERT ŠULKA, Bratislava

Podobne ako definujeme topologickú grupu, môžeme definovať aj topologický grupoid a dokázať platnosť viet podobných vetám pre topologické grupy. Keďže však pri topologickom grupoide nemáme jednotku a nemáme ani jednotkovú grupu ako pri topologických grupách, dôkazy pri topologických grupoidoch v niektorých prípadoch sa musia robiť iným spôsobom. V ďalšom uvádzam definíciu topologického grupoidu a dôkazy niektorých viet o topologických grupoidoch.

Množinu, ktorá neobsahuje žiaden prvok, budeme označovať 0 a budeme jej hovoriť prázdna množina. Nech G znamená vždy neprázdnu množinu v celej tejto práci.

Majme množinu G. Každej usporiadanej dvojici prvkov $a, b \in G$ nech je priradený nejaký prvok $c \in G$, ktorý označujeme $c = ab$ a nazývame ho súčinom prvkov a a b. Takúto množinu G spolu s uvedeným násobením nazývame grupoidom.

Nech je daná množina G . Σ nech je systém jej podmnožín, ktoré spĺňajú tieto podmienky:

a) Pre každé dva rôzne prvky a a b z G existuje množina U zo systému Σ taká, že $a \in U$, $b \notin U$.

b) Pre každé dve množiny U a V systému Σ, ktoré obsahujú prvok $a \in G$, existuje množina W zo systému Σ, ktorá je taká, že $a \in W \subset U \cap V$.

Potom množinu G nazývame topologickým priestorom a systém Σ úplným systémom okolí priestoru G.

Dohodnime sa, že úplný systém okolí v G budeme stále označovať Σ.