Ivan Úlehla

K theorii rovnic pro částice s jediným spinem $\frac{3}{2}$ a s jedinou vlastní hmotou

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 4 (1954), No. 1, 11--27

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126455`

K THEORII ROVNIC PRO ČÁSTICE S JEDINÝM SPINEM $\frac{3}{2}$ A S JEDINOU VLASTNÍ HMOTOU

IVAN ÚLEHLA

ÚVOD

Elementární částice, které dnes známe, mají spin nula, jedna polovina a jedna. Nejsou zatím známy částice, které by měly vyšší spin než jedna. Přesto nelze možnost existence takovýchto částic vyloučit. Je možné, že některé z částic v posledních letech objevených mají spin vyšší než jedna.

V této práci se omezíme pouze na částice se spinem $\frac{3}{2}$ a s jedinou vlastní hmotou. Je to totiž problém, který je nejbližší známým případům.

Kusaka [1] první poukázal na to, že μ meson by mohl mít spin $\frac{3}{2}$. Caianiello [2] propočítal rozpad μ mesonu na elektron a dvě neutrina ν:

$$\mu - e + 2\nu$$

a vazbový parametr pro vazbu π mesonů a nukleonů za předpokladu, že μ mesony jsou částice se spinem $\frac{3}{2}$. Rozpadová spektra mají kvalitativně stejný průběh, jaký obdrželi Tiomno a Wheeler [3] z theorie μ mesonu se spinem $\frac{1}{2}$. Pro vazbový parametr obdržel hodnotu, která neodporuje dosavadním měřením. O tom, zda je μ meson částicí se spinem $\frac{1}{2}$ či $\frac{3}{2}$, mohou rozhodnout pouze podrobnější a přesnější experimentální data. V závěru práce se vracíme ještě jednou ke Caianiellovu zpracování těchto procesů.

Po theoretické stránce není vyjasněna otázka, jaké rovnice máme pro částice s vyšším spinem než jedna použít. Tímto problémem se zabývalo více autorů. V roce 1936 Dirac [4] zobecnil theorii elektronu, částice se spinem $\frac{1}{2}$, na theorii částic s vyšším spinem než jedna a s jedinou vlastní hmotou. Vlnové rovnice, které pro částice se spinem $\frac{3}{2}$ nalezl:

$$\partial^{\dot{\alpha}\varrho}\,\psi^{\dot{\beta}}_{\gamma\varrho} = \mu\,\psi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}_{\gamma}, \qquad \partial^{\alpha\dot{\varrho}}\,\psi^{\beta}_{\dot{\varrho}\dot{\gamma}} = \mu\,\psi^{\alpha\beta}_{\dot{\gamma}} \tag{1}$$

$$\partial^{\dot{\alpha}\beta}\,\psi_{\dot{\alpha}\beta\gamma} = 0\,, \qquad \partial^{\dot{\alpha}\beta}\,\psi_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}\beta} = 0\,, \tag{2}$$

mohou však, jak ukázali při podrobnějším rozboru Pauli a Fierz [5], popisovat pouze volné částice[1]. V případě, že bychom je použili také

[1] Pravidla pro spinorový počet jsou uvedena v příloze I.

tehdy, když se částice se spinem $\frac{3}{2}$ pohybuje v elektromagnetickém poli, dospěli bychom k takovým podmínkám, které nelze splnit.

Kromě toho mají tyto rovnice další nevýhodu. Nedají se odvodit z variačního principu na rozdíl od rovnic, popisujících dosud známé částice. Znemožňují to rovnice (2), které jsou v Diracově formulaci vlastně vedlejšími podmínkami pro vlnové funkce. Jejich význam je v tom, že zaručují, aby částice měly jedinou hmotu a jediný spin $\frac{3}{2}$.

Aby byly odstraněny nevýhody Diracových rovnic, postupovalo se dvěma směry. Na jedné straně se se zdarem pokusili Rarita a Schwinger [6] formulovat vedlejší podmínky tak, aby se soustava rovnic i s vedlejšími podmínkami pro částice se spinem $\frac{3}{2}$ a jedinou vlastní hmotou dala odvodit z variačního principu. Jejich rovnic, které jsou fysikálně ekvivalentní rovnicím (1) a (2), použil Caianiello v citované práci. Avšak zavedení elektromagnetické interakce do těchto rovnic naráží na potíže při druhém kvantování. Na druhé straně Pauli a Fierz [5] doplnili Diracovy rovnice „pomocnými potenciály", které nejen umožňují odvození rovnic pro částice se spinem $\frac{3}{2}$ a s jedinou vlastní hmotou z variačního principu, ale dovolují také popis pohybu těchto částic v elektromagnetickém poli obvyklým způsobem, t. j. nahrazením operátorů

$$\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ operátory } \partial_k - ie\,\Phi_k\,.$$

Rovnice Pauliho a Fierze mají tvar:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\partial_{\dot\alpha\beta}\,\psi^{\beta\gamma}_{\dot\varrho} + \partial_{\dot\varrho\beta}\,\psi_{\dot\alpha}{}^{\beta\gamma}\right) + \sqrt{\frac{1}{6}}\left(\partial^{\gamma}_{\dot\alpha}\chi_{\dot\varrho} + \partial^{\gamma}_{\dot\varrho}\chi_{\dot\alpha}\right) = \mu\,\psi^{\gamma}_{\dot\alpha\dot\varrho}\\
&\frac{1}{2}\left(\partial_{\dot\alpha\beta}\,\psi^{\dot\alpha\dot\varrho}_{\gamma} + \partial_{\dot\alpha\gamma}\,\psi^{\dot\alpha\dot\varrho}_{\beta}\right) + \sqrt{\frac{1}{6}}\left(\partial^{\dot\varrho}_{\beta}\,\chi_{\gamma} + \partial^{\dot\varrho}_{\gamma}\,\chi_{\beta}\right) = \mu\,\psi^{\dot\varrho}_{\gamma\beta}\\
&\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}\,\partial_{\dot\alpha\beta}\,\psi^{\dot\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}\partial^{\dot\alpha\gamma}\,\chi_{\dot\alpha} = \mu\,\chi^{\gamma}\\
&\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}\,\partial_{\dot\alpha\beta}\,\psi^{\beta\dot\alpha\dot\gamma} + \frac{1}{2}\partial^{\dot\gamma\alpha}\,\chi_{\alpha} = \mu\,\chi^{\dot\gamma}
\end{aligned} \qquad (3)$$

Jsou v nich zavedeny „pomocné potenciály" χ^{γ}, $\chi^{\dot\gamma}$. Pro částice, které se nenacházejí v elektromagnetickém poli, představují operátory $\partial_{\dot\alpha\beta}$ prosté derivace. V takovém případě jsou χ^{γ} a $\chi^{\dot\gamma}$ rovny nule, jak se můžeme lehce přesvědčit. Druhé dvě rovnice pak představují vedlejší podmínky (2). Poněvadž se tyto podmínky dají převést na tvar:

$$\partial^{\dot\alpha\varrho}\,\psi^{\dot\beta}_{\gamma\varrho} = \delta^{\dot\beta\varrho}\,\psi^{\dot\alpha}_{\gamma\varrho}\,, \qquad \partial^{\alpha\dot\varrho}\,\psi^{\beta}_{\dot\gamma\dot\varrho} = \partial^{\beta\dot\varrho}\,\psi^{\alpha}_{\dot\gamma\dot\varrho}\,,$$

vyplývají z prvních dvou rovnic soustavy (3) rovnice (1).

Hlavní námitka proti Pauli—Fierzovým rovnicím (3) spočívá v tom, že obsahují „pomocné potenciály", které, jak se zdá, jsou zavedeny bez dostatečného odůvodnění. V práci [7] jsme odvodili pomocí relativistické theorie vlnových polí úplnou soustavu rovnic pro částice s půlkvantovým spinem, nejvýše rovným $\frac{3}{2}$. Ukážeme, že z relativistické a kvantové theorie vlnových polí vyplývají Pauli—Fierzovy rovnice jako nejjednodušší přípustná soustava rovnic pro částice s jediným spinem $\frac{3}{2}$ a s jedinou vlastní hmotou. Na to, že rovnice Pauliho a Fierze plynou z relativistické theorie vlnových polí, poukázali již Gelfand a Jaglom [8].

ODVOZENÍ ROVNIC PAULIHO A FIERZE

Theorii rovnic pro elementární částice se zabývá relativistická kvantová theorie vlnových polí. Základním předpokladem, z něhož vychází, je předpoklad, že vlnové rovnice pro elementární částice jsou lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty. Úplnou soustavu rovnic vlnového pole pro částice s nenulovou hmotou píše ve tvaru:

$$\beta^j \partial_j \varphi - i\mu\,\varphi = 0\,. \tag{4}$$

Veličiny $\beta^j = (\beta^0, \beta^1, \beta^2, \beta^3)$ jsou čtvercové matice nad tělesem komplexních čísel a φ je sloupcová matice vlnových funkcí. Soustavu jednotek jsme si zvolili tak, že $\frac{h}{2\pi} = 1$ a $c = 1$ a použili jsme metriku, v níž metrický tensor g^{ik} má hodnoty: $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$ pro $i = k$ a $g^{ik} = 0$ pro $i \neq k$. Parametr μ, který v rovnici vystupuje, je jedním z parametrů, určujících vlastní hmotu částice. Klademe vždy $\mu > 0$. Pro částice s jedinou hmotou parametr μ udává přímo velikost klidové hmoty částice.

První podmínkou, kterou musí rovnice (4) splňovat je, že musí být invariantní vůči úplné grupě Lorentzových transformací. Aby tato podmínka byla splněna, musí matice β_j, jak je známo, vyhovovat rovnicím:

$$[\beta_j I_{ke}] = \beta_j I_{ke} - I_{ke}\beta_j = g_{jk}\beta_e - g_{je}\beta_k, \; \beta^j Z - Z\beta_j = 0\,. \tag{5}$$

Elementy I_{ke} jsou složky transformační matice vlnových funkcí a matice Z je maticí prostorového zrcadlení. Zobrazení operátorů I_{ke} a Z je pro částice s maximálním spinem $\frac{3}{2}$ obsaženo v práci [7]. Známe-li zobrazení těchto operátorů, můžeme z rovnice (5) určit přípustné tvary matic β_j. Ukazuje se však, že podmínka (5) je příliš široká; připouští i takové rovnice, které nemusí mít fysikální význam. Proto je třeba připojit další podmínky, které omezí možné tvary matic. Tyto podmínky nyní shrneme:

a) Omezíme se pouze na taková vlnová pole, která budou obsahovat částice s jedinou vlastní nenulovou hmotou. Harish-Chandra [9] ukázal, že v takovém případě musí matice β_0 vyhovovat minimální podmínce:

$$\beta_0^n(\beta_0^2 - 1) = 0\,, \qquad n \geqq 0\,, \qquad \{(\beta_0)^0 = 1\}\,. \tag{6a}$$

b) Budeme požadovat, aby se i rovnice pro částice se spinem $\frac{3}{2}$ daly odvodit z variačního principu tak, jako ostatní rovnice, používané pro popis známých elementárních částic. Tento požadavek je odůvodněn tím, že je pak možno snadno odvodit výraz pro hustotu čtyřproudu, pro tensor impulsu a energie a jiné důležité veličiny a použít známých method při kvantování pole. Aby se rovnice (4) dala odvodit z variačního principu, musí existovat nesingulární hermitovská matice Λ taková, že platí (viz na př. [8], [10]):

$$\Lambda\beta_j - \beta_j^+\Lambda = 0\,. \tag{6b}$$

Harish-Chandra ukázal, že při vhodné t. zv. U-representaci úplné Lorentzovy grupy lze matici Λ vyjádřit jako součin skalární matice $\eta = \eta^+ = \eta^{-1}$ a matice Z prostorového zrcadlení.

$$\Lambda = \eta Z\,.$$

Skalární matice je taková matice, která komutuje se všemi maticemi I_{jk} i maticí Z.

c) Budeme požadovat, aby bylo možno vlnové pole, popsané funkcí φ, zkvantovat obvyklým způsobem (t. j. bez zavádění speciálních method, jako jsou methody pracující s indefinitními metrikami v Hilbertově prostoru). Pak musí být, jak je známo (viz na př. [11]), hustota náboje pole positivně definitní, má-li pole obsahovat částice s půlkvantovým spinem, anebo hustota energie positivně definitní, má-li pole obsahovat částice s celokvantovým spinem.

Pro částice s půlkvantovým spinem musí být výraz, udávající hustotu náboje, kladný:

$$s_0 = e\,\varphi\,\Lambda\,\beta_0\,\varphi > 0\,.$$

Harish-Chandra odvodil podmínku, které musí vyhovovat matice $\Lambda\beta_0$, aby hustota náboje pro částice s jedinou vlastní hmotou byla positivně definitní. K tomu stačí, aby matice $\Lambda\,\beta_0^{n+s}$ ($s = 1$ pro sudá n, $s = 0$ pro lichá n) neměla záporné charakteristické hodnoty. Symbolicky tuto podmínku píšeme v tvaru:

$$\Lambda\,\beta_0^{n+s} \geqq 0\,. \tag{6c}$$

Prozkoumejme nyní, zda existují takové matice β_j, které by vyhovovaly podmínkám (6) a vedly k rovnicím pro částice se spinem $\frac{3}{2}$. V práci [7] jsme odvodili z rovnic (5) obecný tvar matic β_j pro částice se spinem nejvýše rovným $\frac{3}{2}$. V uvedené práci jsme použili U-representace úplné

Lorentzovy grupy a ukázali jsme, že matice β_j lze psát ve tvaru direktního součinu

$$\beta_j = \gamma_j \times \alpha_j\,,$$

kde matice γ_j jsou Diracovy matice, splňující vztahy

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2g_{ij}\,,$$

a α_j jsou matice z práce [7]. V téže representaci lze psát matici Z prostorového zrcadlení ve tvaru:

$$Z = \mathrm{z} \times j_2 = \gamma_0 \cdot j_2\,,$$

kde j_2 je jednotková matice algebry matic α_j a matici η lze psát jako

$$\eta = j_1 \times \eta'\,,$$

kde j_1 je jednotková matice algebry matic γ_j. Pro η' platí:

$$\eta' = (\eta')^+ = (\eta')^{-1}.$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že podmínky (6) budou splněny jen a jen tehdy, když matice α_0 bude vyhovovat podmínkám:

$$\alpha_0^n\,(\alpha_0^2 - 1) = 0\,, \qquad (6'\mathrm{a})$$

$$\eta'\,\alpha_0 - \alpha_0^+\,\eta' = 0\,,\ ^2 \qquad (6'\mathrm{b})$$

$$\eta'\,\alpha_0^{n+s} \geqq 0\,. \qquad (6'\mathrm{c})$$

Základní tvar matice α_0 je:

$$\alpha_0 = \alpha_0(3, 2, 1) = \left[\begin{array}{ccc|cc|c}
2l & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \sqrt{2}\,l & \cdot & \sqrt{\frac{1}{3}}\,q & r \\
\cdot & \sqrt{2}\,l & l & \cdot & \sqrt{\frac{2}{3}}\,q & -\sqrt{\frac{1}{2}}\,r \\
\hline
p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \sqrt{\frac{1}{3}}\,p & \sqrt{\frac{2}{3}}\,p & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & s & -\sqrt{\frac{1}{2}}\,s & \cdot & \cdot & k
\end{array}\right]$$

kde k, l, p, q, r, s jsou komplexní čísla. Čárkovaně vymezené submatice odpovídají třem neekvivalentním irreducibilním zobrazením úplné Lorentzovy grupy — postupně: třířádkovému, dvouřádkovému a jednořádkovému, což je vyznačeno u α_0 závorkou s čísly 3, 2, 1. Ostatní možné tvary

[2] Stačí vyšetřovat pouze matice α_0. Podmínka (6b) je splněna pro ostatní α_j ($j = 1, 2, 3$) automaticky, je-li splněna pro α_0.

matice α_0 obdržíme tak, že přidáme, resp. ubereme některá ze zobrazení Lorentzovy grupy a dostaneme na př.:

$$\alpha_0(3, 1) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2l & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{2}l & r \\ \cdot & \sqrt{2}l & l & -\sqrt{\frac{1}{2}}r \\ \hline \cdot & s & -\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{s} & k \end{array}\right]$$

$$\alpha_0(3, 2, 2) = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 2l & \cdot & \cdot & q & \cdot & q' & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{2}l & \cdot & \sqrt{\frac{1}{3}}q & \cdot & \sqrt{\frac{1}{3}}q' \\ \cdot & \sqrt{2}l & l & \cdot & \sqrt{\frac{2}{3}}q & \cdot & \sqrt{\frac{2}{3}}q' \\ \hline p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sqrt{\frac{1}{3}}p & \sqrt{\frac{2}{3}}p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline p' & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sqrt{\frac{1}{3}}p' & \sqrt{\frac{2}{3}}p' & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right]$$

Dá se dokázat zcela obecně, že v matici $\alpha_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ aspoň jedno τ_i musí být rovno 3, má-li mít částice spin $\frac{3}{2}$. Není-li ani jedno τ_i rovno 3, rozpadá se soustava rovnic (4) na soustavu Diracových rovnic pro elektron.[3]

Nejjednodušší matice α_0, v nichž jedno $\tau_i = 3$, jsou:

$$\alpha_0(3),\ \alpha_0(3,1),\ \alpha_0(3,2).$$

V dalším se omezíme jen na tyto matice a prozkoumáme, zda mohou netriviálním způsobem splňovat podmínky (6').

Matice $\alpha_0(3)$ má charakteristické hodnoty „$2l$“ a „$-l$“, nemůže tedy splňovat podmínku (6'a).

Matice $\alpha_0(3,1)$ má charakteristické hodnoty

$$\lambda_{1,2} = 2l \text{ a } \lambda_{3,4} = \frac{k - l \pm \sqrt{(k+l)^2 + 6rs}}{2}.$$

Řešíme-li soustavu (4) v klidovém systému, zjistíme, že charakteristická

[3] Z práce (7) plyne, že v případě, kdy ani jedno $\tau_i \neq 3$, je operátor $v = w$. Pak lze z rovnic (4') a dále uvedených rovnic pro α_1, α_2, α_3 citované práce odvodit, že α_i jsou reducibilní.

hodnota $\lambda_{1,2}$ přísluší stavu, v němž má částice spin $\frac{3}{2}$ a vlastní hmotu $\frac{\mu}{|\lambda_{1,2}|}$ a že charakteristické hodnoty $\lambda_{3,4}$ přísluší stavům, v nichž částice má spin $\frac{1}{2}$ a hmoty $\frac{\mu}{|\lambda_{3,4}|}$. Má-li se částice nacházet pouze ve stavu s jediným spinem $\frac{3}{2}$ a s jedinou vlastní hmotou, musí být $\lambda_{3,4} = 0$. To je splněno pouze tehdy, když

$$-4kl = 6rs, \; k = l.$$

Má-li mít matice α_0 (3,1) charakteristickou hodnotu $+1$, musíme položit $l = \frac{1}{2}$, takže dostaneme:

$$l = k = \frac{1}{2}, \; rs = -\frac{1}{6}.$$

Matice α_0 (3,1) nemůže být hermitovská, poněvadž $rs = -\frac{1}{6}$. Z toho vyplývá, že matice η' nemůže být jednotkovou maticí. Zřejmě bude mít tvar

$$\eta' = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & -1 \end{bmatrix}$$

Podmínka (6'b) se dá splnit, neboť vyžaduje, aby

$$\frac{1}{6} = r^* r \text{ resp.} \frac{1}{6} = s^* s.$$

Položíme-li $r = \sqrt{\frac{1}{6}}$, $s = -\sqrt{\frac{1}{6}}$, platí rovnice $rs = -\frac{1}{6}$ i rovnice vyplývající z (6'b).

Maximální podmínka pro α_0 (3,1) zní

$$\alpha_0^2 (\alpha_0 - 1) = 0, \tag{7}$$

takže rovnice (6'a) je splněna netriviálním způsobem. Zbývá zjistit, zda je splněna podmínka (6'c). Z rovnice (7) plyne

$$\eta' \alpha_0^{n+s} = \eta' \alpha_0^3 = \eta' \alpha_0^2$$

a matice $\eta' \alpha_0^2$ má charakteristické hodnoty nezáporné, jak se lze snadno přesvědčit.

Matice α_0 (3,2) má charakteristické hodnoty $\lambda_{1,2} = l \pm \sqrt{l^2 + pq}$ a $\lambda_3 = -l$. První dvě přísluší stavům se spinem $\frac{3}{2}$, třetí stavu se spinem $\frac{1}{2}$. Položíme z důvodů již uvedených $l = 0$. Aby matice měla také charakteristické hodnoty ± 1, položíme $p = q = 1$. Matice α_0 (3,2) je v tomto případě hermitovská, to znamená, že $\eta' = 1$ a podmínka (6'b) je splněna. Minimální podmínka pro α_0 (3,2) zní:

$$\alpha_0 (\alpha_0^2 - 1) = 0.$$

Tato matice $\alpha_0\,(3,2)$ však nesplňuje podmínku (6'c), která požaduje, aby:

$$\eta' \alpha_0^{n+s} = \alpha_0 \geqq 0\,,$$

což není možné.

Matice $\alpha_0\,(3,1)$:

$$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \cdot & \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \cdot & -\sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{8a}$$

je jediná z jednoduchých matic α_0, která vyhovuje podmínkám (6').[4]

Pomocí vztahů, uvedených v práci [7], lze odvodit matice $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \cdot & -\sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \cdot & \sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \cdot & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \cdot & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdot & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & \cdot & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{8b}$$

Kdybychom nyní rozepsali soustavu (4) s maticemi $\beta_j = \gamma_j \times \alpha_j$ a s maticemi α_j, danými výrazy (8), obdrželi bychom právě Pauli—Fierzovy rovnice (3). Ukazuje se tedy, že rozšíření Diracových rovnic „pomocnými potenciály" není náhodné ani neopodstatněné, ale naopak, že Pauli—Fierzovy rovnice jsou rovnice, které bezprostředně vyplývají z relativistické theorie vlnových polí. Diracovy rovnice pro částice se spinem $\frac{3}{2}$ jsou pouze řešením rovnic Pauliho a Fierze pro volnou částici.

[4] Snadno se můžeme přesvědčit, že matice $\alpha_0\,(3, 2, 1)$, splňující podmínky (6'), je reducibilní.

INTERAKCE S ELEKTROMAGNETICKÝM POLEM A MAGNETICKÝ MOMENT V NERELATIVISTICKÉM PŘIBLÍŽENÍ

Do rovnice (4), v níž matice β^j jsou dány Diracovými maticemi γ_j a maticemi (8), lze zavésti elektromagnetickou interakci obvyklou cestou — náhradou operátorů ∂_k operátory $\partial_k - ie\Phi_k$. Veličiny Φ_k jsou komponenty čtyřpotenciálu elektromagnetického pole. Jak ukázali již Pauli a Fierz v práci [5], jsou rovnice (3) konsistentní i v případě, že je „zapnuto" elektromagnetické pole. Zavedeme-li označení:

$$P_j = -i\partial_j - e\Phi_j ,$$

můžeme psát rovnice (4) v případě, že se částice pohybují v elektromagnetickém poli, ve tvaru:

$$\beta^j P_j \varphi - \mu\varphi = 0 . \tag{9}$$

Operátory P_j splňují vztahy:

$$[P_j P_k] = ie(\partial_j \Phi_k - \partial_k \Phi_j) = ieF_{jk} , \tag{10}$$

kde F_{jk} jsou intensity elektrického a magnetického pole.

V nerelativistické aproximaci je možno nalézti *magnetický moment částice*. Budeme ho hledat ve stavu s kladnou energií. Matice β_0 splňuje minimální podmínku:

$$\beta_0^2(\beta_0^2 - 1) = 0 .$$

Z ní lze odvodit [9], že mezi maticemi β_k existují vztahy:

$$P(\beta_{k1}\beta_{k2}\beta_{k3}\beta_{k4} - g_{k1k2}\beta_{k3}\beta_{k4}) = 0 , \tag{11}$$

kde symbol P značí součet členů se všemi permutacemi indexů k_1, k_2, k_3 a k_4. K výpočtu magnetického momentu použijeme tři navzájem ortogonální idempotenty:

$$Q_+ = \frac{1}{2}\beta_0^2(1+\beta_0) , \qquad Q_- = \frac{1}{2}\beta_0^2(1-\beta_0) , \qquad Q_0 = 1 - \beta_0^2 . \tag{12}$$

Z rovnic (11) a (12) lze odvodit vztahy:

$$\begin{aligned} Q_+\beta_0 = Q_+ , \qquad & Q_-\beta_0 = -Q_- \\ Q_+\beta_r Q_+ = 0 , \qquad & Q_-\beta_r Q_- = 0 , \qquad (r = 1, 2, 3) . \end{aligned} \tag{13}$$

Pohybové rovnice (9) budeme postupně násobit Q_+, Q_-, Q_0. Pomocí odvozených vztahů a rovnice $Q_+ + Q_- + Q_0 = 1$ dostaneme

$$P_0\varphi_+ + P_r Q_+\beta^r(\varphi_- + \varphi_0) = \mu\varphi_+ , \qquad r = 1, 2, 3 , \tag{14a}$$

$$-P_0\varphi_- + P_r Q_-\beta^r(\varphi_+ + \varphi_0) = \mu\varphi_- , \tag{14b}$$

$$P_0\beta^0\varphi_0 + P_r Q_0\beta^r\varphi = \mu\varphi_0 . \tag{14c}$$

Funkce $\varphi_\pm = Q_\pm\varphi$ jsou funkce odpovídající stavům s kladnou resp. zápornou energií, $\varphi_0 = Q_0\varphi$.

Rovnice (14b, c) můžeme upravit:

$$\varphi_- = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{P_0}{\mu}\right)\varphi_- + Q_- \beta^r \frac{P_r}{2\mu}\varphi\,,$$

$$(1-\beta_0)\,\varphi_0 = \left(\frac{P_0}{\mu} - 1\right)\beta_0\,\varphi_0 + Q_0\,\beta^r \frac{P_r}{\mu}\varphi\,.$$

Násobme poslední rovnici $1 + \beta^0$. Protože platí $\beta_0{}^2 Q_0 = 0$, obdržíme

$$\varphi_0 = \left(\frac{P_0}{\mu} - 1\right)\beta_0\,\varphi_0 + (1+\beta_0)\,Q_0\,\beta^r \frac{P_r}{\mu}\varphi\,.$$

Poněvadž v nerelativistické aproximaci je:

$$\left|\left(\frac{P_0}{\mu} - 1\right)\varphi\right| \ll \left|\frac{P_r}{\mu}\varphi\right| \ll |\varphi|\,,$$

dostaneme pro φ_- a φ_0 přibližné výrazy:

$$\varphi_- \approx Q_- \beta^r \frac{P_r}{2\mu}\varphi\,,$$

$$\varphi_0 \approx (1+\beta_0)\,Q_0\,\beta^r \frac{P_r}{\mu}\varphi\,.$$

Z těchto rovnic plyne, že φ_- i φ_0 jsou značně menší než φ a tedy je:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- + \varphi_0 \approx \varphi_+\,,$$

takže konečně dostaneme:

$$\varphi_- \approx Q_- \beta^r \frac{P_r}{2\mu}\varphi_+\,,$$

$$\varphi_0 \approx (1+\beta_0)\,Q_0\,\beta^r \frac{P_r}{\mu}\varphi_+\,.$$

Tím jsme vyjádřili funkce φ_- a φ_0 pomocí funkcí φ_+. Výsledek dosadíme do rovnice (14a).

$$P_0\,\varphi_+ + \frac{P_r P_s}{2\mu} Q_+ \beta^r [Q_- + 2\,(1+\beta_0)\,Q_0]\,\beta^s Q_+\,\varphi_+ \approx \mu\,\varphi_+\,,\quad s = 1, 2, 3\,. \qquad (15)$$

Z rovnice (5) plyne, že: $\beta^r = \beta^0 I^{0r} - I^{0r}\beta^0$, takže platí vztahy:

$$Q_+ \beta^r Q_- = Q_+ (\beta^0 I^{0r} - I^{0r}\beta^0)\,Q_- = 2Q_+ I^{0r} Q_-\,,$$

$$2Q_+ \beta^r (1+\beta_0)\,Q_0 = Q_+ (\beta^0 I^{0r} - I^{0r}\beta^0)\,(1+\beta^0)\,Q_0 = 2Q_+ I^{0r} Q_0\,,$$

a podobně

$$Q_- \beta^s Q_+ = -\,2Q_- I^{0s} Q_+\,,$$

$$2\,(1+\beta^0)\,Q_0\,\beta^s Q_+ = -\,2Q_0\,I^{0s} Q_+\,,$$

pomocí nichž můžeme upravit rovnici (15):

$$P_0\,\varphi_+ + \frac{P_r P_s}{2\mu}\left\{\frac{1}{2} Q_+ \beta^r [Q_- + 2\,(1+\beta_0)\,Q_0]\,\beta^s Q_+ + \frac{1}{2} Q_+ \beta^r [Q_- + 2\,(1+ \right.$$

$$\left. + \beta_0)\,Q_0]\,\beta^s Q_+\right\}\varphi_+ = P_0\,\varphi_+ + \frac{P_r P_s}{2\mu}\{Q_+ I^{0r} (Q_- + Q_0)\,\beta^s Q_+ - Q_+ \beta^r (Q_- +$$

$$+ Q_0)\,I^{0s} Q_+\}\,\varphi_+ \approx \mu\,\varphi_+\,.$$

Poněvadž $Q_- + Q_0 = 1 - Q_+$, dostaneme, užijeme-li nejdříve (13) a potom (5):

$$P_0 \varphi_+ + \frac{P_r P_s}{2\mu} \{Q_+ (I^{or} \beta^s - \beta^r I^{os}) Q_+\} \varphi_+ \approx \mu \varphi_+ ,$$

$$P_0 \varphi_+ + \frac{P_r P_s}{2\mu} \{Q_+ (g^{rs} \beta^o + \beta^s I^{or} - \beta^r I^{os}) Q_+\} \varphi_+ \approx \mu \varphi_+ ,$$

$$P_0 \varphi_+ - \frac{\vec{P}^2}{2\mu} \varphi_+ + \frac{P_r P_s}{2\mu} Q_+ (\beta^s I^{or} - \beta^r I^{os}) Q_+ \varphi_+ \approx \mu \varphi_+ .$$

Poslední rovnici, která je v podstatě Schrödingerovou rovnicí pro částici s kladnou energií, můžeme ještě dále upravit. Vzhledem k tomu, že výraz $\beta^s I^{or} - \beta^r I^{os}$ je antisymetrický, je:

$$P_0 \varphi_+ - \frac{\vec{P}^2}{2\mu} \varphi_+ + \frac{ieF_{rs}}{4\mu} Q_+ (\beta^s I^{or} - \beta^r I^{os}) Q_+ \varphi_+ \approx \mu \varphi_+ .$$

Z této rovnice vyplývá, že částice má ve vnějším magnetickém poli magnetický moment

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{e}{2\mu} i Q_+ (\vec{\beta} \times \vec{I}) Q_+ , \vec{I} \equiv (I^{01}, I^{02}, I^{03}) .$$

Operátor $\mathfrak{M}_z$ v našem zobrazení má tvar:

$$\mathfrak{M}_z = \frac{e}{2\mu} i Q_+ (\beta_1 I_{02} - \beta_2 I_{01}) Q_+$$

$$= \frac{e}{2\mu} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \cdot & \frac{i}{2} & \cdot \\ \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \cdot & \frac{i}{2} & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \sqrt{2} & \cdot \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \cdot \\ \sqrt{2} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} .$$

Obě matice v direktním součinu lze převést na diagonální tvar, takže dostaneme komponentu $\mathfrak{M}_z$ pro částici ve stavu s kladnou energií ve tvaru

$$\mathfrak{M}_z^+ = \frac{e}{2\mu} \cdot \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

čili:

$$\mathfrak{M}_z = \frac{e}{2\mu} \frac{2}{3} S_z ,$$

kde S_z je spinový operátor. Z posledního vztahu vyplývá, že gyromagnetický faktor g má hodnotu:

$$g=\frac{2}{3}.$$

Protože neznáme dosud elementární částice se spinem $\frac{3}{2}$, nemůžeme tento výsledek bezprostředně ověřit. Můžeme však předpokládat, že jádra těch atomů, která mají spin $\frac{3}{2}$ a která se skládají z velkého počtu částic, bude možné přibližně popsat rovnicemi (3). Srovnáme-li výsledek, který jsme obdrželi, s gyromagnetickými faktory velkých jader, zjistíme, že gyromagnetický faktor těchto jader má přibližně hodnotu $\frac{2}{3}$; na př. pro Ba^{135} je $g=0{,}554$, pro Ba^{137} je $g=0{,}619$.

ZÁVĚR

V práci jsme ukázali, že nejjednodušším případem rovnic pro částice se spinem $\frac{3}{2}$, s jedinou vlastní hmotou a s positivně definitním nábojem jsou rovnice, známé jako rovnice Pauliho a Fierze. Jejich přednost vůči jiným soustavám rovnic pro částice se spinem $\frac{3}{2}$ spočívá v tom, že lze do nich zavést elektromagnetickou interakci obvyklým způsobem. Spočítali jsme také magnetický moment těchto částic ve vnějším poli v nerelativistické aproximaci.

Vlnové pole, popsané rovnicemi Pauliho a Fierze, lze zkvantovat. To vyplývá přímo z obecného důkazu o možnosti kvantování vlnového pole, který podal Harish-Chandra v práci [10] pro případ, že minimální podmínka pro matici β_0 zní:

$$\beta_0^n(\beta_0^2-1)=0, \quad n\geqq 0$$

a že náboj, resp. energie je positivně definitiní.

Zbývá nyní posoudit, kterým elementárním částicím máme přiřadit vlnové rovnice Pauliho a Fierze.

Jak se ukazuje, tvoří elementární částice jakési „rodiny" charakterisované isotopickým spinem. Již delší dobu označujeme názvem nukleony částice, které se mohou nacházet ve stavu protonovém nebo neutronovém, t. j. ve dvou různých nábojových i hmotných stavech. Jejich isotopický spin je tedy $\frac{1}{2}$. V práci [12] ukázali Votruba a Lokajíček, že elektron, positron a neutrino je možno považovat za tři různé stavy leptonu s isotopickým spinem 1. V téže práci dovodili, že také $\pi^{\pm}$ a π^0 mesony, které jsou částicemi se spinem 0, je možno pokládat za částice s isotopickým spinem 1.

Do těchto „rodin" elementárních částic nezapadají dosti dobře μ mesony, o kterých se předpokládá, že mají spin $\frac{1}{2}$. μ mesony se svojí hmotou totiž značně odlišují od leptonů i od nukleonů. Tuto nesrovnalost je možné odstranit pomocí předpokladu, že μ meson má spin $\frac{3}{2}$.[5] Pak mesony $\mu^{\pm}$ a μ^0 by tvořily novou „rodinu" částic s obyčejným spinem $\frac{3}{2}$ a isotopickým spinem 1. Tento předpoklad neodporuje známým rozpadům, jako jsou např.:

rozpad μ mesonu

$$\mu = e + 2\nu \quad \text{resp.} \quad \mu \to e + \mu^0 + \nu$$

a rozpad π mesonu

$$\pi \to \mu + \mu_0 .$$

Prvním typem rozpadu μ mesonu na elektron a dvě neutrina se zabýval Caianiello v práci [2] za předpokladu, že μ meson je částicí se spinem $\frac{3}{2}$. Ačkoliv k výpočtu nepoužil rovnic Pauliho a Fierze, ale rovnic Raritových a Schwingrových [6], nelze očekávat, že v Bornově aproximaci by se výsledek pro částici, popsanou rovnicemi (3), lišil od jeho výsledku. Neboť v této aproximaci se μ meson representuje vlnami pro volnou částici — a tedy v obou případech je vlastně popsán rovnicemi (1) a (2).

V interakčním Hamiltoniánu se budou vyskytovat členy, representující vazbu mezi částicemi se spinem $\frac{1}{2}$ a částicemi se spinem $\frac{3}{2}$, typu:

$$\psi^+ \gamma_0 P \varphi ,$$

kde ψ, φ jsou vlnové funkce pro částice se spinem $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, P je operátor, který se až na podobnostní transformaci chová jako skalár (pseudoskalár), nebo vektor (pseudovektor), nebo tensor.

Operátor P pro vazbu skalární a pseudoskalární má v našem případě tvar:

$$P = \omega \times (0, 0, 0, 1) ,$$

kde $\omega = 1$, resp. $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ podle toho, zda se jedná o vazbu skalární nebo pseudoskalární.

Je zřejmé, že v Bornově aproximaci vazba skalární ani pseudoskalární se neuskutečňuje.

Pro vazbu vektorovou a pseudovektorovou mají operátory P^k tvar:

$$P^k = \omega\gamma^k \times \varkappa^k, \text{ kde } \quad \varkappa^0 = \left(0, 1, -\sqrt{\frac{1}{2}}, a\right),$$

$$\varkappa^1 = \left(0, -1, -\sqrt{\frac{1}{2}}, a\right),$$

$$\varkappa^2 = \left(1, 0, \sqrt{\frac{1}{2}}, a\right),$$

$$\varkappa^3 = \left(-1, 0, \sqrt{\frac{1}{2}}, a\right);$$

konstanta „a" nemá v Bornově aproximaci význam.

[5] μ meson nemůže mít obyčejný spin 1, jak vyplývá z experimentálního pozorování spršek, vytvořených rychlými mesony [13].

Podobně ve tvaru direktního součinu lze psát operátory P pro vazbu tensorovou.

V téže práci se Caianiello zabýval i druhým rozpadem. Zkoumal ho v souvislosti s procesem, při němž je záporný meson pohlcen jádrem podle schematu:

$$\mu^- + P \begin{matrix} \nearrow \pi^- + \mu_0 + P \searrow \\ \searrow \mu^- + \pi^+ + N \nearrow \end{matrix} N + \mu_0, \quad (P - \text{proton}, \ N - \text{neutron}),$$

aby tak mohl nepřímo určit vazbový parametr pro vazbu nukleonů a π mesonů. Ani tento výsledek se v Bornově aproximaci nebude lišit od případu, kdybychom použili rovnic Pauliho a Fierze místo rovnic Rarity a Schwingera.

Aby se mohlo rozhodnout o tom, zda je μ meson částicí se spinem $\frac{1}{2}$ nebo $\frac{3}{2}$, bylo by vhodné srovnat výsledky výpočtu pravděpodobnosti obou rozpadů s experimentálními daty. Není vyloučeno, že theorie μ mesonu jako částice se spinem $\frac{3}{2}$ by pomohla vyjasnit některé otázky jako jsou doba života π mesonu, velké hodnoty vazbového parametru pro vazbu π mesonů s nukleony a pod.

Příloha I

Některá potřebná pravidla spinorového počtu

Veličiny ξ^α, $\xi^{\dot\alpha}$, ($\alpha = 1,2$), která se při Lorentzově transformaci souřadnic transformují podle vzorců

$$\xi'^\alpha = l^\alpha_\beta \, \xi^\beta, \quad \xi'^{\dot\alpha} = l^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \, \xi^{\dot\beta},$$

nazýváme kontravariantními komponentami spinorů 1. řádu. Matice $[l^\alpha_\beta]$ má čtyři prvky, jež jsou komplexní čísla. Determinant této matice je roven 1. Matice $[l^{\dot\alpha}_{\dot\beta}]$ je komplexně sdružená k $[l^\alpha_\beta]$.

Veličiny $\xi^{\alpha\beta\cdots}$, $\xi^{\alpha\dot\beta\cdots}$, $\xi^{\dot\alpha\dot\beta}$, které se transformují jako součiny ξ^α, $\xi^{\dot\alpha}$, označujeme jako komponenty spinorů vyšších řádů.

a) Vztah mezi kontravariantními a kovariantními komponentami lze psát pomocí metrického spinoru $\varepsilon_{\alpha\beta}$

$$\xi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \, \xi_\beta$$

$$[\varepsilon^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vztah mezi tensory a spinory, který jsme použili v naší práci, jsme zavedli označením:

$$a_0 + a_1 = a_{\dot 1 1}, \; a_0 - a_1 = a_{\dot 2 2}, \; a_2 + i a_3 = a_{\dot 1 2}, \; a_2 - i a_3 = a_{\dot 2 1},$$

kde a_k jsou komponenty tensoru 1. řádu a $a_{\dot\alpha\beta}$ jsou komponenty spinoru 2. řádu.

Skalární součin $a_k a^k$ můžeme ve spinorové formě vyjádřit tímto způsobem:

$$a_k a^k = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = (a_0 + a_1)(a_0 - a_1) - (a_2 + ia_3)(a_2 - ia_3)$$
$$= a_{\dot{1}1} a_{\dot{2}2} - a_{\dot{1}2} a_{\dot{2}1} = \frac{1}{2} a_{\dot{\alpha}\beta} a^{\dot{\alpha}\beta}.$$

Snadno zjistíme, že platí další důležitý vztah:

$$a_{\dot{\alpha}\beta} a^{\dot{\alpha}\gamma} = a_k a^k \delta^\gamma_\alpha, \qquad [\delta^\gamma_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Příloha II

Řešení vlnových rovnic pro volný meson $\mu_{\frac{3}{2}}$

Uvedeme ještě řešení vlnových rovnic

$$(\beta^j \partial_j - i\mu)\varphi = 0$$

pro volnou částici, pohybující se uvnitř krychle o délce hrany L. Protože operátory „$\beta^r \partial_r$“, $(r = 1, 2, 3)$, „$-i\partial_r$“ a „$-(\partial_1 I_{23} + \partial_2 I_{31} + \partial_3 I_{12})$“ spolu navzájem komutují, musí mít společný systém charakteristických funkcí. Proto hledáme partikulární řešení ve známém tvaru

$$\varphi = L^{-\frac{3}{2}} u e^{i(Et - \vec{p}\vec{x})},$$

kde

$$p_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi}{L} n_z, \quad n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Toto řešení musí splňovat rovnice

$$(\beta^r \partial_r + \beta^0 \partial_0 - i\mu)\varphi = 0; \quad -(\partial_1 I_{23} + \partial_2 I_{31} + \partial_3 I_{12})\varphi = s \,.\, p \,.\, \varphi,$$

kde $p = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, a „$s$“ je charakteristická hodnota „projekce spinu do směru pohybu“. Tyto rovnice budou splněny, budou-li amplitudy $u(\vec{p})$ vyhovovat rovnicím:

$$(\vec{\beta}\vec{p} + \mu)u = \beta^0 E u; \quad (i I_{23} p_x + i I_{31} p_y + i I_{12} p_z) u = s \,.\, p \,.\, u.$$

Existuje osm nezávislých řešení pro amplitudy $u(\vec{p})$, které označíme indexem m: $u_m(\vec{p})$. Charakteristické hodnoty parametrů E a s jsou:

$$E_m = +\sqrt{\vec{p}^2 + \mu^2}, \qquad s = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \text{ pro } m = 1, 2, 3, 4,$$
$$E_m = -\sqrt{\vec{p}^2 + \mu^2}, \qquad s = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \text{ pro } m = 5, 6, 7, 8.$$

Jednotlivá řešení jsou navzájem ortogonální. Normujeme-li je, platí pro ně vztahy:

$$u_m^+ \Lambda \beta^0 u_{m'} = \delta_{mm'}.$$

Obecné řešení vlnové rovnice můžeme psát ve tvaru:

$$\varphi(\vec{x}, t) = L^{-\frac{3}{2}} \sum_{m, \vec{p}} a_m(\vec{p}, t)\, u_m(\vec{p})\, e^{-i\vec{p}\vec{x}},$$

kde $u_m(\vec{p})$ jsou ortogonální a normované.

Došlo do redakcie 19. októbra 1953.

LITERATURA

1. Kusaka, Phys. Rev. *60* (1941), 61.
2. Caianiello, Phys. Rev. *83* (1951), 735.
3. Tiomno a Wheeler, Rev. Modern. Phys. *21* (1949), 144.
4. Dirac, Proc. Roy. Soc. *A 155* (1936), 447.
5. Pauli a Fierz, Proc. Roy. Soc. *A 173* (1939), 211.
6. Rarita a Schwinger, Phys. Rev. *60* (1941), 61.
7. Úlehla, ČČF, *2* (1952), 108.
8. Gelfand a Jaglom. ŽETF *18* (1948), 703.
9. Harish—Chandra, Phys. Rev. *71* (1946), 793.
10. Harish—Chandra, Proc. Roy. Soc. *A 192* (1948), 195.
11. Wentzel, *Quantentheorie der Wellenfelder.*
    Sokolov a Ivanenko, *Kvantovaja teorija polja.*
12. Votruba a Lokajíček, ČČF, *3* (1952), 97.
13. Christy a Kusaka, Phys. Rev. *59* (1941), 414.
    Lapp, Phys. Rev. *64* (1945), 255.
    Belenky, J. Phys. USSR *10* (1946), 144.

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ЕДИНСТВЕННЫМ СПИНОМ $\frac{3}{2}$ И С ЕДИНСТВЕННОЙ СОБСТВЕННОЙ МАССОЙ

ИВАН УЛЕГЛА

Выводы

В первой части работы на основании предыдущей статьи (7) показано, что т. наз. уравнения Паули и Фирца (5) являются простейшей системой уравнений для частиц с единственным спином $\frac{3}{2}$ и с единственной собственной массой. При этом требуется, чтобы волновые поля, описанные релятивистскими ковариантными уравнениями для частиц, спин которых равен $\frac{3}{2}$, содержали только частицы с единственной собственной массой, неравной нулю, чтобы уравнения поля было возможно вывести из вариационного принципа и чтобы плотность заряда поля была положительно дефинитная.

В второй части работы определен магнитный момент частицы, описанной уравнениями Паули и Фирца в нерелятивистской приближении. Определено, что гиромагнитный фактор имеет значение

$$g = \frac{2}{3}$$

если магнитный момент измерять в единицах $\frac{eh}{4\pi m_0 C}$.

Наконец рассматривается вопрос, для которых элементарных частиц удобно

применять уравнения Паули и Фирца. Нельзя исключать возможность, что этими уравнениями будут описываться μ-мезоны, как это предлагает Кусака (1). Все известные процессы распада можно именно объяснять с предположением, что спин μ-мезона равен $\frac{3}{2}$. Одно отличие μ-мезонов от электронов может быть следствием отличности их спинов.

APLIKÁCIA DISPERZIÍ NA OKRAJOVÝ PROBLÉM DRUHÉHO RÁDU

MICHAL GREGUŠ

Jadrom práce je dôkaz vety, kde sa hovorí o počte nulových bodov integrálu Sturmovej diferenciálnej rovnice

$$[\Theta(x, \lambda)\, y']' - Q(x, \lambda)\, y = 0\,, \tag{a}$$

ktorý spĺňa Sturmove homogénne okrajové podmienky (tzv. Sturmova oscilačná veta).

Dôkaz je vykonaný pomocou disperzií prvého druhu, pojmu zavedeného prof. O. Borůvkom pre diferenciálnu rovnicu

$$y'' - Q(x)\, y = 0\,.^{1} \tag{b}$$

Inými spôsobmi vykonali dôkaz už mnohí matematici.[2]

Práca je rozdelená na tri časti. V prvej časti je zavedený pojem disperzií pre diferenciálnu rovnicu (a) a odvodené niektoré ich vlastnosti analogické vlastnostiam disperzií diferenciálnej rovnice (b). V druhej časti sú odvodené vlastnosti disperzií vyplývajúce zo závislosti od parametra λ a aplikácia disperzií prvého druhu na dôkaz Sturmovej oscilačnej vety. V tretej časti je dokázaná zovšeobecnená oscilačná veta za špeciálnejších predpokladov.

I

Uvažujme Sturmovu diferenciálnu rovnicu (a). Nech funkcie $\Theta(x,\lambda), Q(x,\lambda)$ sú spojité pre $x \in (-\infty, \infty)$ a pre $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$. Nech $\Theta(x, \lambda) > 0$ pre každé

[1] Borůvka O., *O kolebluščichsja integralach differencialnych linejnych uravnenij 2-ogo poriadka*, Čechoslovackij matematičeskij žurnal, *3* (78), 1953, 199—247.

[2] Napr. Sturm, Journal de Mathematiques, *1*, 1836;
Bôcher, Bul. Amer. Math. Soc., 1898;
Fort, Bul. Amer. Math. Soc., *24*, 1918;
Prüfer, Math. Ann. *95*, 1926;
Mammana, Math. Z. *25*, 1926;
Kamke, Math. Z. *44*, 1939 a iní.