Ladislav Mišík

Die Funktionen der ersten Baireschen Klasse

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 15 (1965), No. 4, 296--303

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126449`

DIE FUNKTIONEN DER ERSTEN BAIRESCHEN KLASSE

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

Im ersten Teil dieser Arbeit werden wir auf eine grosse Gruppe der Funktionen der ersten Baireschen Klasse hinweisen. Wir werden dabei voraussetzen, dass das Definitionsbereich der Funktionen ein metrischer Raum ist. Dieses Resultat ist eine Verallgemeinerung eines Resultates aus [1]. In dem zweiten Teil geben wir eine Charakterisierung der Funktionen aus der ersten Baireschen Klasse, die die Eigenschaft von Darboux haben. Das Definitionsbereich wird dabei jetzt ein vollständiger metrischer Raum, der einige Voraussetzungen erfüllt. Dieses Resultat ist eine Verallgemeinerung des Satzes 4 aus der Arbeit [5]. Zum Ende werden wir auf eine Eigenschaft der Ableitung einer additiven Intervallfunktion hinweisen.

1

Es sei X ein topologischer Raum, in welchem jeder Punkt den Charakter höchstens abzählbar hat, d. h. es existiert ein höchstens abzählbares vollständiges System von Umgebungen für jeden Punkt. Es soll für einen nicht isolierten Punkt $x \in X$ das System $\{O_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ein vollständiges nicht steigendes System von Umgebungen von x bedeuten. Für einen isolierten Punkt $x \in X$ soll $O_n(x) = \{x\}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sein. Wenn X ein metrischer Raum ist, dann nehmen wir für $O_n(x)$, wo x kein isolierter Punkt ist, die sphärische Umgebung des Punktes x mit dem Radius $1/n$. Es sei $\mathscr{B}$ eine Basis offener Mengen des topologischen Raumes X. Es soll $\mathscr{B}_n = \{B : B \in \mathscr{B},\ B \subset O_n(x)$ für irgendwelches $x \in X\}$. Es ist $\mathscr{B}_{n+1} \subset \mathscr{B}_n$, weil für jedes $B \in \mathscr{B}_{n+1}$, $B \subset \subset O_{n+1}(x) \subset O_n(x)$ folgt. Es sei $\mathscr{B}^{(x)} = \{B : B \in \mathscr{B}, x \in B\}$ und $\mathscr{B}_n^{(x)} = \mathscr{B}_n \cap \mathscr{B}^{(x)}$. Wir werden sagen, dass $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ gegen $x \in X$ konvergiert, wobei $B_\lambda \in \mathscr{B}$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ und Λ ein Abschnitt der Ordinalzahlen ist, wenn $x \in B_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ ist und wenn für jedes n ein λ_n so existiert, dass $B_\lambda \in \mathscr{B}_n^{(x)}$ für $\lambda > \lambda_n$, $\lambda \in \Lambda$, ist.

Die Funktion φ nennt man eine Funktion auf der Basis, wenn eine solche Basis $\mathscr{B}$ offener Mengen existiert, welche ihr Definitionsbereich ist. Für die

Funktion φ auf der Basis $\mathscr{B}$ definieren wir diese zwei Punktfunktionen $L(x) = \inf \{\varphi(B) : B \in \mathscr{B}^{(x)}\} \leqq U(x) = \sup \{\varphi(B) : B \in \mathscr{B}^{(x)}\}$ und für $n = 1, 2, 3, \ldots$ diese Funktionen $L_n(x) = \inf \{\varphi(B) : B \in \mathscr{B}_n^{(x)}\} \leqq U_n(x) = \sup \{\varphi(B) : B \in \mathscr{B}_n^{(x)}\}$.

Die Funktionen $L(x)$ und $L_n(x)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sind oberhalb stetig und die Funktionen $U(x)$ und $U_n(x)$ für $n = 1,2,3, \ldots$ sind unterhalb stetig. Das geht aus folgendem hervor: die Mengen $\{x : L(x) < y\}$, $\{x : L_n(x) < y\}$, $\{x : U(x) > y\}$ und $\{x : U_n(x) > y\}$ sind für jede Zahl y und jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ offen. Weiter gilt es $L_n(x) \leqq L_{n+1}(x) \leqq U_{n+1}(x) \leqq U_n(x)$ für jedes $x \in X$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Funktion φ auf der Basis $\mathscr{B}$ ordnen wir eine Menge $\Phi(x)$ zu. Die Menge $\Phi(x)$ ist die Menge aller solchen Zahlen α für welche eine Folge $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ existiert die die Limes x hat und für welche $\lim_\lambda \varphi(B_\lambda) = \alpha$ ist. Jetzt definieren wir zwei Funktionen $l(x)$ und $u(x)$ folgendermassen: $l(x) = \inf \Phi(x)$ und $u(x) = \sup \Phi(x)$. Weil $\Phi(x)$ für jedes $x \in X$ nicht leer ist, gilt es $l(x) \leqq u(x)$. Die Funktion $l(x)$, bzw. $u(x)$ nennt man unterer, bzw. oberer Kern [1] der Funktion φ. Wenn $l(x) = u(x)$ für jedes $x \in X$ ist, dann sagen wir, dass die Funktion φ konvergent auf X ist und $\varphi_0(x) = l(x)$ nennt man in diesem Fall den Kern [1] der Funktion φ.

Lemma 1. *Es gilt $l(x) = \lim_n L_n(x)$ und $u(x) = \lim_n U_n(x)$ für jedes $x \in X$.*

Beweis. Wenn $l(x) = -\infty$ ist, dann existiert eine Folge $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ welche gegen x konvergiert, so dass $\lim_\lambda \varphi(B_\lambda) = -\infty$ ist. Also ist $L_n(x) = -\infty$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und auch $l(x) = \lim_n L_n(x)$.

Es sei $-\infty < l(x) < \infty$. Es ist evident, dass $L_n(x) \leqq l(x)$ für jedes $x \in X$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Aus dem folgt $\lim_n L_n(x) \leqq l(x)$. Zu jeder natürlichen Zahl n existiert eine solche $B_n \in \mathscr{B}_n^{(x)}$, dass $L_n(x) \leqq \varphi(B_n) < L_n(x) + 1/n$ ist. Daraus geht hervor, dass $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ gegen x konvergiert und $\lim_n \varphi(B_n) = \lim_n L_n(x)$ ist. Die Tatsache, dass die Folge $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ gegen x konvergiert, beweisen wir folgendermassen: Es gilt $x \in B_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und für natürliche Zahl n_0 gilt $B_n \in \mathscr{B}_{n_0}^{(x)}$ für $n > n_0$, weil $B_n \in \mathscr{B}_n^{(x)} \subset \mathscr{B}_{n_0}^{(x)}$ ist. Also ist $\lim_n L_n(x) \in \Phi(x)$ oder $\lim_n L_n(x) \geqq l(x)$. Dann muss $\lim_n L_n(x) = l(x)$ sein.

Es sei $l(x) = \infty$. Zu einer beliebigen Zahl C existiert ein solches N, dass für $n > N$ und $B \in \mathscr{B}_n^{(x)}$, $\varphi(B) > C$ ist. Es ist also $L_n(x) \geqq C$ für $n > N$. Daraus geht hervor, dass $l(x) = \lim_n L_n(x)$ ist. Ähnlich beweist man, dass $u(x) = \lim_n U_n(x)$ ist.

Satz 1. *Es sei X ein metrischer Raum und die Funktion φ eine Funktion auf der Basis $\mathscr{B}$. Es sei φ konvergent auf X. Dann ist der Kern φ_0 der Funktion φ aus der ersten Baireschen Klasse auf X.*

Beweis. Für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ und jedes $x \in X$ gilt $L_n(x) \leqq l(x) = \varphi_0(x) = u(x) \leqq U_n(x)$, für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ sind die Funktionen $L_n(x)$, bzw. $U_n(x)$ oberhalb, bzw. unterhalb stetig. Nach dem Einschiebungssatz ([2], S. 248) existiert eine stetige Funktion f_n, die die Ungleichung $L_n(x) \leqq f_n(x) \leqq U_n(x)$ für jedes $x \in X$ erfüllt. Nach dem Lemma 1 gilt $\lim_n L_n(x) = \lim_n U_n(x) = \varphi_0(x)$ und aus dem folgt, dass auch $\lim_n f_n(x) = \varphi_0(x)$ für jedes $x \in X$ ist. Die Funktion φ_0 ist also aus der ersten Baireschen Klasse.

Es sei X der n-dimensionale euklidische Raum E_n und Φ soll eine Intervallfunktion sein. Wenn I ein Intervall im E_n ist und l_i für $i = 1, 2, \ldots, n$ die Kanten des Intervalls sind, dann nennt man die Zahl $\frac{1}{l^n}(l_1 l_2 \ldots l_n)$, wobei $l = \max(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ ist, das Parameter der Regularität des Intervalls I und man bezeichnet ihn mit $r(I)$. Für $0 < \alpha \leqq 1$ sei es $\mathscr{B}_\alpha$, bzw. $\mathscr{S}_\alpha$ das System aller offenen, bzw. abgeschlossenen Intervalle deren Parameter der Regularität grösser oder gleich α ist. Wir sagen, dass die Folge $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Elementen aus $\mathscr{S} = \bigcup \{\mathscr{S}_\alpha : 0 < \alpha \leqq 1\}$ gegen x konvergiert, wenn $x \in I_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $\lim_n d(I_n) = 0$ ist, wobei $d(I)$ soll $\max\{\varrho(x, y) : x, y \in I\}$ bedeuten. Wenn für jede gegen x konvergierende Folge $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, $I_n \in \mathscr{S}_\alpha$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, das Limes $\lim_n \frac{\Phi(I_n)}{m(I_n)} = a$ existiert, wobei $m(I)$ das Lebesguesche Mass des Intervalls I bedeutet, werden wir sagen, dass im Punkte x die Funktion Φ die Ableitung $D_\alpha\Phi(x) = a$ hat. Es sei jetzt φ eine Funktion auf der Basis $\mathscr{B}_\alpha$ folgendermassen definiert: Es ist $\varphi(I) = \frac{\Phi(\bar{I})}{m(\bar{I})}$ für jedes $I \in \mathscr{B}_\alpha$(1). Wenn die Funktion φ in jedem Punkt $x \in X$ die Ableitung $D_\alpha\Phi(x)$ hat, dann ist die Ableitung $D_\alpha\Phi$ der Kern von der Funktion φ. Daraus ist $D_\alpha\Phi$ aus der ersten Baireschen Klasse [1].

Der Satz 1 ist von A. Gleyzal im [1] für den Fall $X = E_n$ und $\mathscr{B} = \bigcup \{\mathscr{B}_\alpha : 0 < \alpha \leqq 1\}$ beweisen. In diesem Fall gilt auch die inverse Behauptung, d. h. jede Funktion aus der ersten Baireschen Klasse ist der Kern irgendwelchen Intervallfunktion.

2

Die Funktion f hat auf dem topologischen Raum X die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ offener Mengen, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Für jedes $B \in \mathscr{B}$, jedes solche $x, y \in \bar{B}$, für welche $f(x) < f(y)$ ist und jede Zahl c mit der Eigenschaft $f(x) < c < f(y)$ existiert ein $z \in B$ für das

---

1) $\bar{I}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von I.

$f(z) = c$ ist [3]. Es sei $\mathscr{D}(\mathscr{B})$ das System aller Funktionen, die aus der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ sind.

Es sei X ein metrischer Raum und $d(A)$ soll den Durchmesser der Menge A bedeuten. Wir werden sagen, dass die Folge $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen den Punkt x konvergiert, wenn $\lim_n d(M_n) = 0$ und $x \in \overline{M}_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Es sei $\mathscr{B}$ eine Basis der offenen Mengen im metrischen Raum X. Die Funktion f mit dem Definitionsbereich X hat die Eigenschaft $C(\mathscr{B})$, wenn für jedes $B \in \mathscr{B}$ ein solches Punkt $x_B \in B$ existiert, so dass folgendes gilt: Wenn $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen den Punkt x konvergiert und $B_n \in \mathscr{B}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist, dann ist $\lim_n f(x_{B_n}) = f(x)$.

Wir sagen, dass die Basis $\mathscr{B}$ offener Mengen im metrischen Raum X die Eigenschaft 1, bzw. 2, bzw. 3 hat, wenn folgendes gilt:

1. *Zu jedem $x \in X$, zu jeder natürlichen Zahl n und zu jeder offenen Menge $B \in \mathscr{B}$, für welche $x \in \overline{B}$ ist, existiert eine Menge $U \in \mathscr{B}$ für welche $U \subset B$, $d(U) < 1/n$ und $x \in \overline{U} - U$*(2), *bzw.*

2. *Es sei $B \in \mathscr{B}$ und $B = A_1 \cup A_2$, wobei A_1 und A_2 zwei nicht leere zu einander fremde Mengen sind. Es soll für A_1 und A_2 folgendes gelten: Es sei $B_0 \in \mathscr{B}$ und $B_0 \subset A_1$, bzw. $B_0 \subset A_2$. Dann ist $\overline{B}_0 \cap B \subset A_1$, bzw. $\overline{B}_0 \cap B \subset A_2$. Unter diesen Voraussetzungen müssen die Mengen $A_1' \cap A_2$ und $A_1 \cap A_2'$*(3) *nicht leer sein.*

3. *Für jedes $B \in \mathscr{B}$ ist die Menge $\overline{B}$ eine kompakte Menge.*

Satz 2. *Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis der offenen Mengen in ihm mit den Eigenschaften 1 und 2. Wenn die Funktion f die Eigenschaft $C(\mathscr{B})$ hat, dann ist $f \in \mathscr{D}(\mathscr{B})$. Wenn $\mathscr{B}$ eine Basis auch mit der Eigenschaft 3 ist, dann hat jede Funktion aus $\mathscr{D}(\mathscr{B})$ die Eigenschaft C $(\mathscr{B})$.*

Beweis. Es soll f die Eigenschaft $C(\mathscr{B})$ haben. Legen wir $\varphi(B) = f(x_B)$ für $B \in \mathscr{B}$. Es ist evident aus der Eigenschaft $C(\mathscr{B})$, dass f der Kern der Funktion φ auf der Basis $\mathscr{B}$ ist. Also nach dem Satz 1 ist f aus der ersten Baireschen Klasse. Es sei $B \in \mathscr{B}$ und $B \subset \{x : f(x) \geqq a\}$, wobei a eine Zahl ist. Es sei $y \in \overline{B} - B$. Dann existiert wegen der Eigenschaft 1 ein solches $B_1 \in \mathscr{B}$, dass $B_1 \subset B$, $d(B_1) < 1$ und $y \in \overline{B}_1 - B_1$ ist. Durch vollständige Induktion können wir wegen der Eigenschaft 1 eine solche Folge $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ konstruieren, für welche $B_n \in \mathscr{B}$, $B_{n+1} \subset B_n \subset B$, $y \in \overline{B}_n - B_n$ und $d(B_n) < 1/n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Also konvergiert die Folge $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen den Punkt y und darum muss $f(y) = \lim_n f(x_{B_n}) \geqq a$ sein. Damit haben wir festgestellt, dass $\overline{B} \subset \{x : f(x) \geqq a\}$ ist. Ähnlich stellt man fest, dass aus der Relation

(2) Wenn $\mathscr{B}$ die hier beschriebene Eigenschaft hat, dann hat sie auch die Eigenschaft 1 aus der Arbeit [3].

(3) Das Zeichen A' bedeutet die Ableitung der Menge A.

$B \subset \{x : f(x) \leqq a\}$, wobei a eine Zahl ist, die Inklusion $\bar{B} \subset \{x : f(x) \leqq a\}$ folgt. Daraus und aus dem Satz 3 aus [3] geht hervor, dass $f \in \mathscr{D}(\mathscr{B})$ ist.

Es soll $\mathscr{B}$ die Eigenschaft 3 haben und es sei $f \in \mathscr{D}(\mathscr{B})$. Es sei weiter $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von stetigen Funktionen die auf X gegen f konvergiert. Es sei $B \in \mathscr{B}$. Dann existiert wegen der Eigenschaft 3 und der Stetigkeit der Funktion f_n ein solches endliches System $\{B_{n,i}\}_{i=1}^{j_n}$, dass $B_{n,i} \in \mathscr{B}$, $d(B_{n,i}) < 1/n$, $\sup\{f_n(x) : x \in \bar{B}_{n,i}\} - \inf\{f_n(x) : x \in \bar{B}_{n,i}\} < 1/n$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, j_n$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $\bar{B} \subset \bigcup \{B_{n,i} : i = 1, 2, \ldots, j_n\}$ ist. Es sei $\mathscr{B}^{(1)}$ das System aller $B_{n,i}$ für $i = 1, 2, \ldots, j_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ und für jedes $B \in \mathscr{B}$. Wir bezeichnen durch $\mathscr{B}^{(2)}$ das System aller $B \in \mathscr{B}$ für welche ein $O \in \mathscr{B}^{(1)}$ so existiert, dass $B \subset O$ ist. Es sei $\mathscr{B}^{(3)} = \mathscr{B} - \mathscr{B}^{(2)}$. Wenn $B \in \mathscr{B}^{(2)}$ ist dann bezeichnen wir durch n_B die grösste solche Zahl n für das $B \subset B_{n,i}$ für ein i gilt. Das Paar (n_B, k) gehört zur Menge B, wenn $B \subset B_{n_B,k}$ ist. Für jede $B \in \mathscr{B}^{(2)}$ existiert ein solches Paar und wir nehmen eines von ihnen aus und bezeichnen es durch (n_B, k_B).

Wählen wir $B \in \mathscr{B}^{(2)}$ und es soll (n_B, k_B) zu B gehören. Die Menge $\overline{f(\bar{B})}$ ist ein abgeschlossener Intervall, weil die Funktion f die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ hat. Weil die Funktion f_{n_B} stetig ist und für $B_{n_B,k_B} \in \mathscr{B}$ die Menge $\bar{B}_{n_B,k_B}$ kompakt ist, ist die Menge $f_{n_B}(\bar{B}_{n_B,k_B})$ eine kompakte Menge. Also existiert ein Punkt $y_{n_B,k_B} \in \bar{B}_{n_B,k_B}$ und eine Zahl $\xi_B \in \overline{f(\bar{B})}$, so dass $|f_{n_B}(y_{n_B,k_B}) - \xi_B| = \varrho(f_{n_B}(\bar{B}_{n_B,k_B}), \overline{f(\bar{B})})$(⁴) ist. Weil $\xi_B \in \overline{f(\bar{B})}$ und f die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ hat, existiert ein $z_B \in B$, so dass $|\xi_B - f(z_B)| < 1/n_B$ ist. Wählen wir jetzt $x_B \in B$ beliebig, wenn $B \in \mathscr{B}^{(3)}$ ist und $x_B = z_B$, wenn $B \in \mathscr{B}^{(2)}$ ist.

Jetzt beweisen wir, dass für jede Folge $\{B^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, $B^{(i)} \in \mathscr{B}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ welche gegen den Punkt x konvergiert, $\lim_i f(x_{B^{(i)}}) = f(x)$ gilt. In weiterem werden wir $n_{B^{(i)}}$ und $k_{B^{(i)}}$ durch n_i und k_i ersetzen.

1. Wenn alle $B^{(i)} \in \mathscr{B}^{(2)}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ sind, dann existiert B_{n_i,k_i}, so dass $B^{(i)} \subset B_{n_i,k_i}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Wir werden zeigen, dass $\lim_i n_i = \infty$ ist. Es sei n fest gegeben. Aus $x \in \bar{B}^{(i)} \subset \bigcup \{B_{n,i} : i = 1, 2, \ldots, j_n\}$ folgt es, dass $x \in B_{n,i_x}$ für geeignetes i_x. Weil $d(B^{(i)})$ gegen 0 konvergiert und $x \in B_{n,i_x}$ ist, existiert eine solche Zahl i_n, dass $B^{(i)} \subset B_{n,i_x}$ für $i > i_n$ ist. Aus dem folgt nun, dass $n_i \geqq n$ für $i > i_n$ ist. Darum ist $\lim_i n_i = \infty$ und $\lim_i d(B_{n_i,k_i}) = 0$ und die Folge $\{B_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ konvergiert gegen den Punkt x.

Wenn $\varepsilon > 0$ ist, es existiert eine solche natürliche Zahl N, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ für $n > N$ ist. Weiter existiert eine solche natürliche Zahl N', dass $n_i > \max(2/\varepsilon, N)$ für $i > N'$ ist. Es sei $i > \max(N', N)$. Die Punkte y_{n_i,k_i} und x sind aus abgeschlossener Hülle der offenen Menge B_{n_i,k_i} auf welcher der absolute Wert der Differenz von Werten von Funktion f_{n_i} in

(⁴) $\varrho(A, B) = \inf\{\varrho(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$.

zwei Punkten kleiner als $1/n_i$ ist und so ist $|f_{n_i}(y_{n_i,k_i}) - f_{n_i}(x)| < 1/n_i$. Dann gilt $|f_{n_i}(y_{n_i,k_i}) - f(x)| \leqq |f_{n_i}(y_{n_i,k_i}) - f_{n_i}(x)| + |f_{n_i}(x) - f(x)| < 1/n_i + \varepsilon/2 < \varepsilon$. Darum ist $\lim_i f_{n_i}(y_{n_i,k_i}) = f(x)$. Weil $|f(x_{B^{(i)}}) - f_{n_i}(y_{n_i,k_i})| \leqq |f(x_{B^{(i)}}) - \xi_{B^{(i)}}| + |\xi_{B^{(i)}} - f_{n_i}(y_{n_i,k_i})| < 1/n_i + \varrho(f_{n_i}(\bar{B}_{n_i,k_i}), \overline{f(B^{(i)})}) \leqq 1/n_i + |f_{n_i}(x) - f(x)|$ ist und weil weiter $\lim_i n_i = \infty$ und $\lim_i f_{n_i}(x) = f(x)$, es gilt, dass $\lim_i f(x_{B^{(i)}}) = \lim_i f_{n_i}(y_{n_i,k_i}) = f(x)$ ist.

2. Wenn $B^{(i)} \in \mathscr{B}^{(2)}$ nicht für alle i gilt, dann existiert für x ein solches $B_{1,k}$ für das $x \in B_{1,k}$ ist. Das geht aus der Tatsache hervor, dass $\mathscr{B}$ eine Basis von offenen Mengen ist. Zu $B_{1,k}$ existiert ein solches I, dass $B^{(i)} \subset B_{1,k}$ für $i > I$ ist und also ist $B^{(i)} \in \mathscr{B}^{(2)}$ für $i \in I$. Aus dem, was wir schon bewiesen haben und aus dieser Betrachtung ist es evident, dass $\lim_i f(x_{B^{(i)}}) = f(x)$ ist.

Den Satz können wir benützen zum Beispiel für den Fall, dass X der n-dimensionale euklidische Raum E_n und $\mathscr{B}$ entweder die Basis $\mathscr{B}_1$ aller offenen Intervale oder die Basis $\mathscr{B}_2$ aller sphärischen Umgebungen im E_n ist. Die Systeme $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ haben offensichtlich die Eigenschaften 1, 2 und 3 ([3]). Für $n = 1$ bekommen wir aus dem Satz 2 den Satz 4 aus [5].

3

Es sei φ eine Intervallfunktion. Die Funktion φ hat im Punkte x die Ableitung $\mathrm{D}\varphi(x)$ dann und nur dann, wenn für jede Folge $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ für die $x \in I_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $\lim_n d(I_n) = 0$ ist, $\lim_n \dfrac{\varphi(I_n)}{m(I_n)} = \mathrm{D}\varphi(x)$ gilt. Wenn die Funktion φ die Ableitung in jedem Punkt aus E_n hat, wird $\mathrm{D}\,\varphi$ die Ableitung von der Funktion φ bedeuten. Die Funktion φ heisst additiv, wenn für jede zwei abgeschlossene Intervalle I_1 und I_2, für welche ihre Vereinigung ein abgeschlossener Intervall und $\operatorname{int} I_1 \cap \operatorname{int} I_2 = \emptyset$ (5) ist, $\varphi(I_1 \cup I_2) = \varphi(I_1) + \varphi(I_2)$ gilt.

Es sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich E_n. Die Funktion f hat die Eigenschaft C_1 dann und nur dann, wenn es möglich ist zu jedem abgeschlossenen Intervall I einen Punkt $x_I \in \operatorname{int} I$ so zuzuordnen, dass die Intervallfunktion $f(x_I)m(I)$ eine additive Intervallfunktion ist, und wenn für jede Folge $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen Intervallen, welche gegen x konvergiert, $\lim_n f(x_{I_n}) = f(x)$ gilt.

Satz 3. *Die Funktion f ist eine Ableitung einer additiven Intervallfunktion dann und nur dann, wenn sie die Eigenschaft* C_1 *hat.*

Beweis. Es sei $f = \mathrm{D}\,\varphi$, wobei φ eine additive Intervallfunktion ist. Dann nach dem Zusatz aus der Arbeit [4] existiert für jeden abgeschlossenen Inter-

(5) $\operatorname{int} I$ bedeutet den offenen Kern von I. Das Zeichen $\emptyset$ bedeutet die leere Menge.

vall ein Punkt $x_I \in \operatorname{int} I$ so, dass $\mathrm{D}\, \varphi(x_I)m(I) = \varphi(I)$ ist. Wählen wir in jedem abgeschlossenen Intervall einen solchen Punkt. Dann ist die Funktion $f(x_I)m(I)$ eine additive Intervallfunktion, weil sie gleich $\varphi(I)$ ist. Weiter gilt, dass für jede Folge $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen Intervallen, welche gegen x konvergiert, $\lim_n f(x_{I_n}) = \lim_n \dfrac{\varphi(I_n)}{m(I_n)} = \mathrm{D}\, \varphi(x) = f(x)$ ist. Also hat f die Eigenschaft C_1.

Es soll f die Eigenschaft C_1 haben. Dann legen wir $\varphi(I) = f(x_I)m(I)$ für jeden abgeschlossenen Intervall. Dann ist φ eine additive Intervallfunktion. Es sei $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen, welche gegen den Punkt x konvergiert. Dann gilt $\mathrm{D}\, \varphi(x) = \lim_n \dfrac{\varphi(I_n)}{m(I_n)} = \lim_n f(x_{I_n}) = f(x)$. Also hat φ die Ableitung und es gilt $\mathrm{D}\, \varphi = f$.

Neugebauer hat in [6] bewiesen, dass die Ableitung jeder stetigen ballansierenden Intervallfunktion die Eigenschaft von Darboux bezüglich des Systems offener Intervallen hat. Die Behauptung gilt auch in dem Falle, wenn wir die Intervallfunktion durch eine Funktion auf den sphärischen Umgebungen und Intervalle durch sphärische Umgebungen ersetzen.

LITERATUR

[1] Gleyzal A., *Interval functions*, Duke Math. J. *8* (1941), 223—230.

[2] Hausdorff F., *Mengenlehre*, Berlin — Leipzig 1935.

[3] Mišík L., *Über die Funktionen der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux*, Mat.-fyz. časop. *14* (1964), 44—49.

[4] Mišík L., *Über den Mittelwertsatz für additive Zellenfunktionen*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963), 260—274.

[5] Neugebauer C. J., *Darboux functions of Baire class one and derivates*, Proc. Amer. Math. Soc. *13* (1962), 838—843.

[6] Neugebauer C. J., *Darboux property for functions of several variables*, Trans. Amer. Math. Soc. *107* (1963), 30—37.

Eingegangen am 9. 11. 1964.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied,
Bratislava

ФУНКЦИИ ПЕРВОГО КЛАССА БЭРА

Ладислав Мишик

Резюме

Работа содержит три результаты.

Если X — метрическое пространство, а $\mathscr{B}$ — некоторый базис открытых множеств в X, то $\{B_n\}$, где $B_n \in \mathscr{B}$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, сходится к элементу $x \in X$ при условии, что $x \in B_n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ и последовательность диаметров множеств B_n сходится к 0. Функция базиса $\varphi(B)$, $B \in \mathscr{B}$, сходится на X к ядру $\varphi_0(x)$, если для каждого элемента $x \in X$ и для каждой последовательности $\{B_n\}$, сходящейся к элементу x, имеет место $\lim_n \varphi(B_n) = \varphi_0(x)$. Первый результат такой: Ядро $\varphi_0(x)$ является всегда функцией первого класса Бэра.

Второй результат касается функции первого класса Бэра со свойством Дарбу. Сейчас X — полное метрическое пространство с базисом $\mathscr{B}$, удовлетворяющим таким условиям:

1. К каждому $x \in X$, к каждому натуральному числу n и каждому множеству $B \in \mathscr{B}$ такому, что $x \in \bar{B}$, существует такое $U \in \mathscr{B}$, что $U \subset B$, $x \in \bar{U} - U$, а диаметр U меньше, чем $\frac{1}{n}$.

2. Для каждого $B \in \mathscr{B}$ и для каждого разложения $B = A_1 \cup A_2$ на два непустых и непересекающихся множества со свойствами: для $B_0 \in \mathscr{B}$ и $B_0 \subset A_1$ ($B_0 \subset A_2$), справедливо $\bar{B}_0 \cap B \subset A_1$ ($\bar{B}_0 \cap B \subset A_2$), множества $A_1' \cap A_2$ и $A_1 \cap A_2'$ — непусты (A' означает производную множества A).

Функция f, определенная на X, имеет свойство Дарбу относительно базиса $\mathscr{B}$, если для каждого $B \in \mathscr{B}$, $x, y \in B$ и $f(x) < c < f(y)$ существует такое $z \in B$, что $f(z) = c$.

Если функция f, определенная на X, есть первого класса Бэра со свойством Дарбу относительно базиса $\mathscr{B}$, то можно каждому элементу $B \in \mathscr{B}$ сопоставить элемент $x_B \in B$ так, что $\lim_n f(x_{B_n}) = f(x)$ при условии, что $\lim_n B_n = x$ (причем при сходимости $\{B_n\}$ к x необходимо условие $x \in B_n$ заменить условием $x \in \bar{B}_n$). Если базис $\mathscr{B}$ такой, что 3. $\bar{B}$ — компактное множество для каждого $B \in \mathscr{B}$, то справедливо и обратное утверждение.

Третий результат содержит одно необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция, определенная в n-мерном евклидовом пространстве, была производной от аддитивной функции интервала.