

Antonín Tuzar

Převod přenosů ze spojitě Laplaceovy transformace do transformace Z

Kybernetika, Vol. 1 (1965), No. 4, (324)--332

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/125719>

Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these

Terms of use.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://project.dml.cz>

Převod přenosů ze spojitě Laplaceovy transformace do transformace Z

ANTONÍN TUZAR

V článku je popsána metoda výpočtu diskrétního přenosu obvodu odpovídajícího danému přenosu v Laplaceově transformaci. Metoda vychází ze souvislosti mezi impulsní odezvou obvodu a rozvojem diskrétního přenosu v řadu v záporných mocninách z a je vhodná k programování pro samočinný počítač.

Při navrhování korekčních členů pro číslicovou regulaci je zapotřebí znát přenosy regulovaných soustav v transformaci Z (viz např. [1], [2]). V tomto článku je ukázána jedna z možných metod výpočtu těchto přenosů, jestliže jsou známy přenosy v Laplaceově transformaci. Uvedený postup byl zpracován jako program pro samočinný počítač URAL 1 a lze jej patrně použít i pro jiné počítače. Vzhledem k tomu, že program byl sestaven s pohyblivou řádovou čárkou a počítač URAL 1 pracuje s pevnou čárkou, obsahoval program zhruba 1500 instrukcí. U počítače vybaveného instrukcemi s pohyblivou čárkou by rozsah daného programu klesl více než o polovinu. Okolnost, že program zaujímal mnoho místa v operační paměti, vedla také k omezení na jednoduché komplexní póly přenosu. Pro popisovanou metodu je charakteristické využití skutečnosti, že vzorky impulsní odezvy obvodu jsou rovny koeficientům rozvoje diskrétního přenosu v záporných mocninách z (srov. [3]). Dále se široce používá program pro dělení polynomů a výpočet zbytku při dělení. Ostatní odchylky od běžného postupu jsou patrné z následujícího podrobného popisu metody.

FORMULACE ÚLOHY

Je dán přenos spojitě soustavy $W(p)$ ve tvaru:

$$(1) \quad F(p) = \frac{\sum_{i=0}^m r_i p^i}{\prod_{j=1}^p (p - \alpha_j)^{\nu_j} \prod_{k=1}^q (p^2 + \lambda_k p + \vartheta_k)}$$

kde $r_i, \alpha_j, \lambda_k, \vartheta_k$ jsou reálná, v_j, m, P, Q přirozená čísla; čísla α_j pro různá j a dvojice (λ_k, ϑ_k) pro různá k jsou různé a pro $k = 1, \dots, Q$ platí

$$\lambda_k^2 - 4\vartheta_k < 0.$$

Předpokládáme tedy, že kořeny jmenovatele jsou již vypočteny (program na výpočet kořenů je v knihovně standardních programů většiny samočinných počítačů) a že imaginární kořeny, pokud se vyskytnou, jsou jednoduché. Dále je dána perioda vzorkování $T > 0$. Je třeba určit přenos v transformaci Z tvaru

$$(2) \quad F^*(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M^*} b_k z^{-k}}{\sum_{l=0}^{N^*} a_l z^{-l}}$$

tak, aby vzorek odezvy na jednotkový impuls u spojité soustavy byl totožný s originálem k obrazu (2).

MATEMATICKÉ ZPRACOVÁNÍ

Výpočet bude sestávat z těchto etap:

- určení vzorku spojité odezvy,
- výpočet jmenovatele diskrétního přenosu,
- výpočet čitatele diskrétního přenosu.

Následuje odvození a popis jednotlivých etap.

a) Výpočet vzorku odezvy

Upravíme nejprve vzorec (1). Zavedeme jiný zápis kořenových činitelů vztahem

$$(3) \quad p^2 + \lambda_j p + \vartheta_j = (p - f_j)^2 + g_j^2$$

neboli

$$(4) \quad \begin{aligned} f_j &= -\frac{\lambda_j}{2}, \\ g_j &= \sqrt{\left(\vartheta_j - \frac{\lambda_j^2}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Přenos (1) rozložíme na parciální zlomky

$$(5) \quad F(p) = \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^{v_j} \frac{K_{ij}}{(p - \alpha_j)^i} + \sum_{j=1}^Q \frac{M_j p + N_j}{(p - f_j)^2 + g_j^2}.$$

326 Jednotlivým sčítancům odpovídají tyto originály:

$$(6) \quad \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K_{ij}}{(p - \alpha_j)^i} \right) = \frac{K_{ij}}{(i-1)!} t^{i-1} \cdot e^{\alpha_j t},$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{M_j p + N_j}{(p - f_j)^2 + g_j^2} \right) = \left[M_j \cos g_j t + \frac{M_j f_j + N_j}{g_j} \sin g_j t \right] e^{f_j t}.$$

Ukážeme nyní, jak probíhá výpočet koeficientů K_{ij} , M_j , N_j . Poznamenejme nejprve o reálných kořenech toto: Je-li α_j kořen násobnosti v_j , potom, značí-li R , \tilde{R} , T , \tilde{T} polynomy, V racionální funkci, platí:

$$F(p) = \frac{R(p)}{(p - \alpha_j)^{v_j} T(p)} = \sum_{k=1}^{v_j} \frac{K_{kj}}{(p - \alpha_j)^k} + \frac{\tilde{R}(p)}{\tilde{T}(p)},$$

$$F(p)(p - \alpha_j)^{v_j} = K_{v_j, j} + K_{v_j-1, j}(p - \alpha_j) + \dots + K_{1, j}(p - \alpha_j)^{v_j-1} + V(p).$$

Odtud je zřejmé, že pro $r = 0, 1, \dots, v_j - 1$:

$$K_{v_j-r, j} = \frac{1}{r!} \left. \frac{d^r [F(p)(p - \alpha_j)^{v_j}]}{dp^r} \right|_{p=\alpha_j}.$$

(i) Výpočet $K_{1, j}$ pro jednoduchý reálný kořen α_j . V tomto případě

$$K_{1, j} = F(p)(p - \alpha_j)|_{p=\alpha_j}$$

neboli

$$(7) \quad K_{1, j} = \frac{\sum_{k=0}^m r_k \alpha_j^k}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p (\alpha_j - \alpha_k)^{v_k} \prod_{h=1}^q (\alpha_j^2 + \lambda_h \alpha_j + \vartheta_h)}$$

(ii) Výpočet K_{ij} pro reálný kořen α_j násobnosti v_j . (Zde je zahrnut i případ (i), kdy $v_j = 1$.)

Označme

$$(8) \quad F_j(p) = F(p)(p - \alpha_j)^{v_j}$$

a zavedme novou proměnnou

$$(9) \quad q = p - \alpha_j.$$

Podle Taylorovy věty nyní dostaneme

$$F_j(q + \alpha_j) = F_j(\alpha_j) + \frac{F_j'(\alpha_j)}{1!} \cdot q + \frac{F_j''(\alpha_j)}{2!} q^2 + \dots$$

Výsledky Hornerova schématu jsou tedy přímo koeficienty s_k . Pro výpočet K_{ij} dělíme polynom s koeficienty s_h polynomem vzniklým vynásobením ve jmenovateli výrazu (10).

(iii) *Jednoduché komplexně sdružené kořeny.* Označme čitatele a jmenovatele $F(p)$ jako $B(p)$ a $A(p)$:

$$(13) \quad F(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

Kvadratický trojčlen odpovídající kořenům $\alpha_k, \bar{\alpha}_k$ označme $D_k(p)$. Máme (A_k, B_k jsou polynomy, M_k, N_k reálné konstanty)

$$(14) \quad \frac{B}{A} = \frac{B}{A_k D_k} = \frac{B_k}{A_k} + \frac{M_k p + N_k}{D_k}.$$

Zavedme ještě polynomy \hat{B}_k a \tilde{A}_k a konstanty $\varepsilon_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ definované vztahy

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{B}{D_k} &= \hat{B}_k + \frac{\varepsilon_k p + \beta_k}{D_k}; \\ \frac{A_k}{D_k} &= \tilde{A}_k + \frac{\gamma_k p + \delta_k}{D_k}. \end{aligned}$$

Existence $M_k, N_k, \varepsilon_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ plyne z toho, že při dělení polynomu kvadratickým trojčlenem je zbytek při dělení polynom nejvyššího prvního stupně.

Vynásobením druhé rovnosti v (14) součinem $A_k D_k$ dostáváme

$$B - (M_k p + N_k) A_k = B_k D_k$$

a po dosazení za B a A_k podle (15) do levé strany:

$$\hat{B}_k D_k + \varepsilon_k p + \beta_k - (M_k p + N_k) (\tilde{A}_k D_k + \gamma_k p + \delta_k) = B_k D_k.$$

Proto výraz $\varepsilon_k p + \beta_k - (M_k p + N_k) (\gamma_k p + \delta_k)$

je nutně dělitelný $D_k = p^2 + \lambda_k p + \vartheta_k$. Máme

$$\begin{aligned} &\varepsilon_k p + \beta_k - (M_k p + N_k) (\gamma_k p + \delta_k) = \\ &= -\gamma_k M_k p^2 - (N_k \gamma_k + M_k \delta_k - \varepsilon_k) p - (N_k \delta_k - \beta_k). \end{aligned}$$

Musí tedy platit

$$(16) \quad \begin{aligned} N_k \gamma_k + M_k \delta_k - \varepsilon_k &= \gamma_k M_k \lambda_k, \\ N_k \delta_k - \beta_k &= \gamma_k M_k \vartheta_k \end{aligned}$$

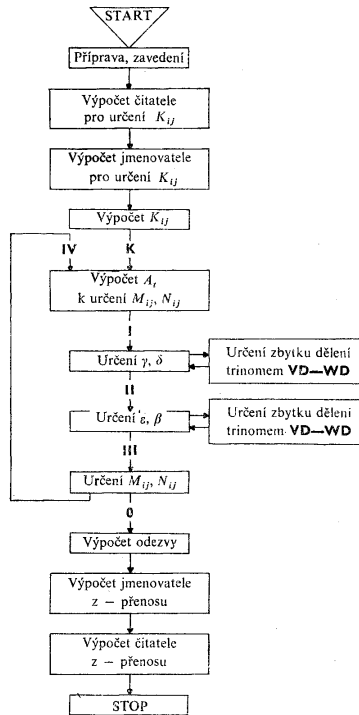
a odtud

$$(17) \quad \begin{aligned} M_k &= \frac{\varepsilon_k \delta_k - \beta_k \gamma_k}{\delta_k^2 - \gamma_k \lambda_k \delta_k + \gamma_k^2 \vartheta_k}, \\ N_k &= \frac{\delta_k \beta_k - \gamma_k \lambda_k \beta_k + \gamma_k \vartheta_k \varepsilon_k}{\delta_k^2 - \gamma_k \lambda_k \delta_k + \gamma_k^2 \vartheta_k^2}, \end{aligned}$$

přičemž ε_k, β_k jsou koeficienty zbytku při dělení B/D_k ; stejně γ_k a δ_k vzniknou dělením A_k/D_k .

Zbytky při dělení vypočteme nejnázve metodou dělení polynomů, uvedenou v [4]; polynom A_k je třeba vždy počítat zvlášť.

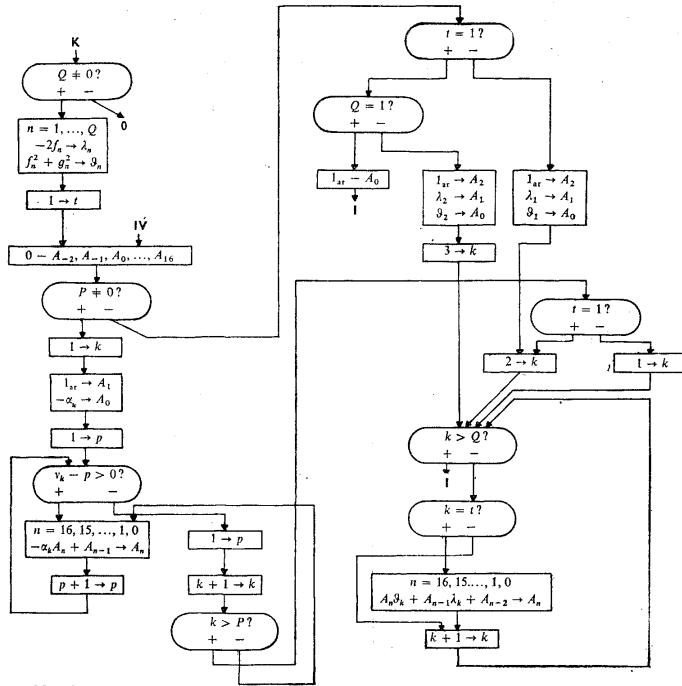
Vzorek odezvy snadno již spočteme sečtením výrazů podle (6).



Obr. 1.

b) Výpočet jmenovatele diskretního přenosu

Je známo, že jednotlivým činitelům spojitěho přenosu odpovídají sčítanci diskretního přenosu podle následujících pravidel ($R(z)$ značí polynom v z , který nepotřebu-



Obr. 2.

jeme znát)

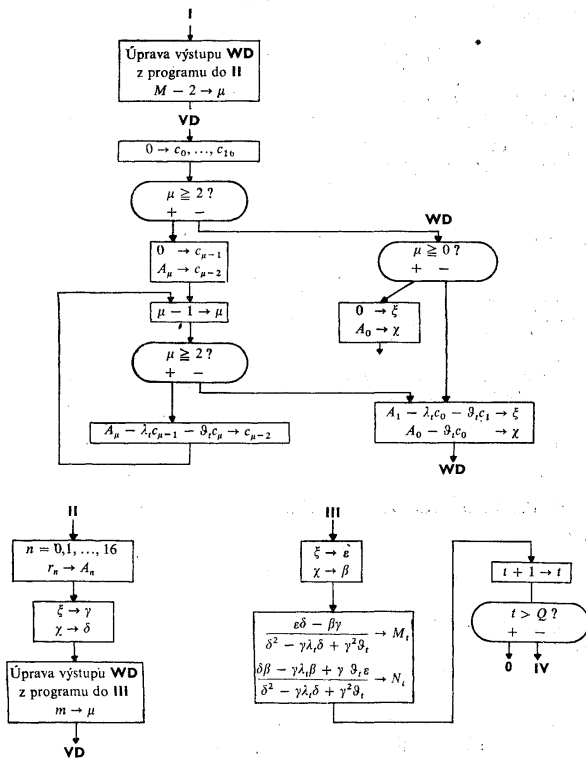
$$\frac{1}{p - \alpha_i} \Rightarrow \frac{z}{z - e^{+\alpha_i T}}$$

$$\frac{1}{(p - b)^2 + a^2} \Rightarrow \frac{R(z)}{z^2 - (e^{(b+a)T} + e^{(b-a)T})z + e^{2bT}} = \frac{R(z)}{z^2 - 2e^{bT} \cos aT \cdot z + e^{2bT}}$$

Postupným vynásobením jmenovatelů dostáváme tedy výsledek

$$\sum_{k=0}^{N^*} a_{N^*-k} z^k$$

Hledáme čitatele tvaru $\sum_{k=0}^{M^*} b_{M^*-k} z^k$.



Obr. 3.

Označíme-li body odezvy x_n , můžeme napsat

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^{M^*} b_{M^*-k} z^k}{\sum_{k=0}^{M^*} a_{M^*-k} z^k} = \frac{\sum_{k=k}^{M^*} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M^*} a_k z^{-k}}$$

$$(18) \quad \sum_{k=0}^{M^*} b_k z^{-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_n z^{-n} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{M^*} a_k z^{-k} \right).$$

Porovnáním koeficientů pak dostaneme:

$$(19) \quad b_n = \sum_{k=0}^n x_k a_{n-k} \quad (n = 0, 1, \dots, M^*).$$

Tím jsou vypočteny všechny požadované koeficienty. Výpočet lze programovat přesně v též sledu, jak byl popsán. Pro ilustraci je ještě uvedeno hrubé blokové schéma programu (obr. 1) a podrobné blokové schéma výpočtu koeficientů parciálních zlomků odpovídajících jednoduchým komplexním pólům (obr. 2 a 3).

(Došlo dne 13. listopadu 1964.)

LITERATURA

- [1] Cypkin Ja. Z.: Teorija linejnych impul'snych sistem. Moskva 1961.
- [2] Strejc V.: Regulace a řízení samočinnými číslicovými počítači, část I — Základní teoretické vztahy. Výzk. zpráva ÚTIA ČSAV č. 76. Praha 1960.
- [3] Weiss J.: Výpočet obrazu v transformaci Z z průběhu originálu. Automatizace (1963), č. 3, 58—60.
- [4] Tuzar A.: Metoda pro numerický výpočet podílu polynomů a mocninných řad. Výzk. zpráva ÚTIA ČSAV č. 83. Praha 1961.

SUMMARY

Transformation of the Laplace Transfer Function into the Discrete Transfer Function

ANTONÍN TUZAR

A method of computation of discrete transfer function (2) is described, provided if the Laplace transfer function (1) of the system is known. The treatment is based on the relation between the system impulse response and the expansion of the transfer function into the power series at z^{-1} as shown in [3]. The values of the response at sampling instants are computed according to relations (6). The transfer function (1) is further expanded into partial fractions (5). The subprogram for dividing polynomials and for computing the rest of the division is employed for this operation. The denominator of the discrete transfer function is then equal to the product of the denominators of the fractions (18), the coefficients of the numerator can be obtained by means of (19) in the form (20). According to this method a program for the computer Ural 1 has been developed. Its block-schema is in Fig. 1.

Antonín Tuzar, prom. mat., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2 - Nové Město.