

Rudolf Novanský

Syntéza sekvenčních obvodů s využitím obecných paměťových elementů

Kybernetika, Vol. 3 (1967), No. 3, (234)--252

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/125263>

Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these

Terms of use.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://project.dml.cz>

Syntéza sekvenčních obvodů s využitím obecných paměťových elementů

RUDOLF NOVANSKÝ

Článek shrnuje některé výsledky z literatury pro kódování vnitřních stavů sekvenčních strojů a ukazuje jejich použitelnost i pro takové sekvenční obvody, jejichž paměťová část obsahuje paměťové elementy obecných typů. Naznačuje, jak při použití vhodných typů paměťových elementů pro jednotlivé vnitřní proměnné je možné získat ještě další zjednodušení kombinatorické části odpovídajícího sekvenčního obvodu. Článek vlastně spojuje výsledky různých autorů a tvoří tak přípravu k podrobnějšímu studiu uvedené problematiky, která bude předmětem další práce.

1. ÚVOD

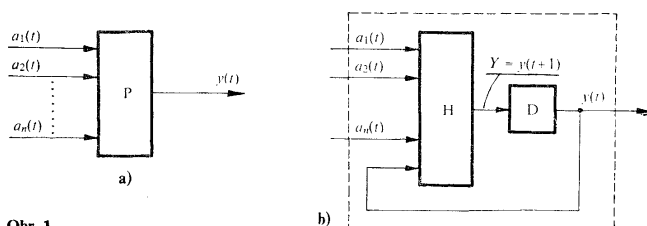
Při realizaci konečného sekvenčního stroje sekvenčním obvodem reprezentujeme vnitřní stavy sekvenčního stroje stavy výstupů binárních paměťových elementů. Každý paměťový element tedy představuje jedinou vnitřní proměnnou tím, že uchovává její hodnotu do následujícího časového okamžiku. Jedním z nejdůležitějších kroků při přechodu od abstraktního sekvenčního stroje k jeho realizaci je kódování vnitřních stavů, tj. přiřazení hodnot binárních vnitřních proměnných jednotlivým vnitřním stavům stroje. Kódování vnitřních stavů stroje se snažíme najít tak, aby výsledná realizace byla v nějakém smyslu optimální. Zde obvykle rozhodují požadavky na rychlost, ekonomii a spolehlivost výsledného sekvenčního obvodu. V dalším se omezíme pouze na synchronní sekvenční obvody. Z toho vyplývá, že nás bude zajímat především ekonomie výsledné realizace. (Rychlost obvodu je dána opakovací frekvencí hodinových impulsů, která je volena tak, aby po příchodu hodinového impulsu přechodové děje v obvodu dozněly dříve, než přijde další hodinový impuls. To znamená, že spolehlivost obvodu je také zaručena, protože paměťové elementy jsou citlivé na své vstupy pouze v době výskytu hodinových impulsů.)

V článku se omezíme pouze na vyšetřování vnitřní funkce zadaného sekvenčního stroje. Předpokládáme, že neekonomičtější realizaci vnitřní funkce daného stroje dostaneme tehdy, když budou maximálně redukované závislosti vstupů paměťových elementů na vnitřních proměnných. (Tento předpoklad se v literatuře odůvodňuje tím, že složitost boolských funkcí vzrůstá exponenciálně s počtem nezávisle proměnných [13].)

2. CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE A CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE PAMĚŤOVÉHO ELEMENTU

235

Libovolný paměťový element P je vlastně elementární sekvenční stroj Mooreova typu s jediným binárním výstupem y , který zároveň udává vnitřní stav elementu P. To znamená, že výstup P v čase $t + 1$ ($y(t + 1) = Y$) je určen binárním výstupem P ($y(t)$) a binárními vstupy ($a_1(t), a_2(t), \dots, a_u(t)$) v čase t .



Obr. 1.

Paměťový element podle obr. 1a můžeme tedy reprezentovat náhradním schématem podle obr. 1b, kde H je kombinatorický obvod s binárními vstupy $a_1(t), a_2(t), \dots, a_u(t)$, reprezentující logickou strukturu paměťového elementu bez zpoždění, a D je element, který reprezentuje zpoždění o jednotku času.

Z náhradního schématu paměťového elementu P můžeme už přímo psát jeho charakteristickou rovnici

$$(1) \quad Y = H(y, a_1, a_2, \dots, a_u),$$

kde H je boolská funkce uvedených proměnných, kterou nazýváme charakteristickou funkcí paměťového elementu P.

Některé typy paměťových elementů mají zakázány ty kombinace nezávisle proměnných, které vedou k jejich nedeterminovanému chování. Tato omezení můžeme vždy vyjádřit podmínkou, že hodnoty proměnných musí splňovat rovnici

$$(2) \quad h(a_1, a_2, \dots, a_u) = 0,$$

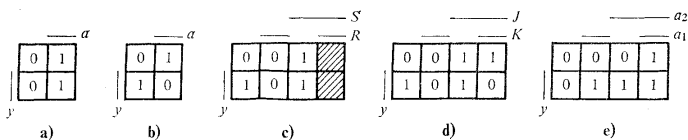
kde h je boolská funkce uvedených argumentů.

Chování paměťového elementu P v závislosti na vstupních signálech a_1, a_2, \dots, a_u je určeno vztahy (1) a (2), které se nazývají obecnými charakteristickými rovnicemi paměťového elementu P [1].

Někdy je výhodné zobrazit charakteristické funkce (1) a (2) paměťového elementu P do rozkladové mapy podle vnitřní proměnné y . Tuto mapu budeme v dalším nazývat charakteristickou mapou elementu P. Charakteristické mapy paměťových elementů

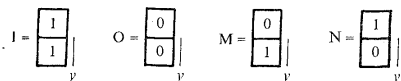
typu $D, T, R-S, J-K$ a majoritního paměťového elementu jsou na obr. 2a až 2e. (Vyšrafovaný sloupec na obr. 2c ukazuje zakázanou kombinaci vstupů, která je dána rovnicí $R \cdot S = 1$.)

Říkáme, že paměťový element P má netriviální vnitřní zpětnou vazbu, jestliže proměnná Y podle (1) není funkce nezávislá na y . Charakteristická mapa libovolného paměťového elementu P může obsahovat pouze čtyři typy kombinací přechodů paměťového elementu do následujícího stavu $Y = y(t+1)$ vyvolaných pouze



Obr. 2.

změnou vnitřní proměnné y (při nezměněné konfiguraci vstupních proměnných a_1, a_2, \dots, a_n). Čtyři možné typy kombinací přechodů paměťového elementu do následujícího stavu označíme písmeny I, O, M, N podle obr. 3.



Obr. 3.

Potom každý paměťový element P můžeme popisovat charakteristickým souborem symbolů $z \{I, O, M, N\}$. Tento soubor určuje typy kombinací přechodů, obsažené v charakteristické mapě elementu P [6, 7]. Paměťový element typu $J-K$ je potom univerzální, protože jeho charakteristická mapa obsahuje všechny čtyři typy kombinací přechodů do následujícího stavu.

3. PRACOVNÍ FUNKCE A PRACOVNÍ ROVNICE SEKVENČNÍHO OBVODU

Abstraktní sekvenční stroj \mathcal{S} se obvykle definuje jako pětice $(J_{\mathcal{S}}, Q_{\mathcal{S}}, O_{\mathcal{S}}, \delta_{\mathcal{S}}, \lambda_{\mathcal{S}})$, kde

$J_{\mathcal{S}}$ označuje neprázdnou množinu vstupních symbolů (I_1, I_2, \dots, I_m) ,

$Q_{\mathcal{S}}$ neprázdnou množinu vnitřních symbolů (q_1, q_2, \dots, q_n) ,

$O_{\mathcal{S}}$ neprázdnou množinu výstupních symbolů (o_1, o_2, \dots, o_r) ,

$\delta_{\mathcal{S}}$ je vnitřní funkce sekvenčního stroje \mathcal{S} , která určuje zobrazení

$$Q_{\mathcal{S}} \times J_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\delta_{\mathcal{S}}} Q_{\mathcal{S}},$$

$\lambda_{\mathcal{S}}$ je výstupní funkce sekvenčního stroje \mathcal{S} , která určuje zobrazení

$$Q_{\mathcal{S}} \times J_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{S}}} O_{\mathcal{S}}.$$

Vnitřní funkce $\delta_{\mathcal{S}}$ předepisuje vnitřní stav stroje \mathcal{S} v následujícím časovém intervalu q^{t+1} podle rovnice

$$(3) \quad q^{t+1} = \delta_{\mathcal{S}}(q^t, I^t),$$

jestliže vnitřní stav a vstup stroje \mathcal{S} je v současném časovém intervalu q^t respektive I^t . Podobně výstupní funkce $\lambda_{\mathcal{S}}$ předepisuje výstup stroje \mathcal{S} v současném časovém intervalu podle rovnice

$$(4) \quad o^t = \lambda_{\mathcal{S}}(q^t, I^t)$$

za prve uvedených předpokladů.

V dalším se omezíme na konečné sekvenční stroje, tj. předpokládáme, že čísla m, n, r jsou konečná. Potom vnitřní a výstupní funkce sekvenčního stroje \mathcal{S} mohou být zadány vnitřní a výstupní tabulkou podle obr. 4a resp. 4b, přičemž $q_{ij} \in Q_{\mathcal{S}}$ a $o_{ij} \in O_{\mathcal{S}}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a $j = 1, 2, \dots, m$. Budeme předpokládat, že sekvenční stroj \mathcal{S} , jehož syntézu chceme provést, byl již redukován některou ze známých metod [2], [3], [4].

$\delta_{\mathcal{S}}$	I_1	I_2	\dots	I_m
q_1	q_{11}	q_{12}	\dots	q_{1m}
q_2	q_{21}	q_{22}	\dots	q_{2m}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
q_n	q_{n1}	q_{n2}	\dots	q_{nm}

a) Vnitřní tabulka

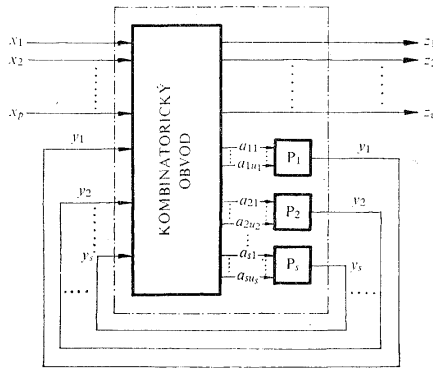
$\lambda_{\mathcal{S}}$	I_1	I_2	\dots	I_m
q_1	o_{11}	o_{12}	\dots	o_{1m}
q_2	o_{21}	o_{22}	\dots	o_{2m}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
q_n	o_{n1}	o_{n2}	\dots	o_{nm}

b) Výstupní tabulka

Obr. 4.

Abstraktní sekvenční stroj \mathcal{S} se snažíme realizovat tak, že jeho realizaci sekvenčním obvodem předpokládáme v jistém kanonickém tvaru, ve kterém je kombinatorická část obvodu oddělena od paměťové části (viz obr. 5). Syntézu sekvenčního obvodu potom převedeme na syntézu jeho kombinatorické části [5].

Od abstraktního sekvenčního stroje \mathcal{S} se dostaneme k jeho realizaci sekvenčním obvodem tak, že vhodně kódujeme jeho vstupní, vnitřní a výstupní symboly. Přitom kódováním vstupních (výstupních) symbolů abstraktního stroje \mathcal{S} budeme rozumět přiřazení p -tice (v -tice) hodnot binárních vstupních (výstupních) proměnných x_1, x_2, \dots, x_p (z_1, z_2, \dots, z_v) ke každému z m vstupních symbolů I_1, I_2, \dots, I_m (z r výstupních symbolů o_1, o_2, \dots, o_r) abstraktního stroje \mathcal{S} takové, že různým vstupním (výstupním) symbolům odpovídají různé p -tice (v -tice) hodnot binárních



Obr. 5.

vstupních (výstupních) proměnných. Podobně kódováním n vnitřních stavů stroje \mathcal{S} budeme rozumět přiřazení s -tice stavů paměťových elementů P_1, P_2, \dots, P_s (reprezentovaných hodnotami jejich výstupních proměnných y_1, y_2, \dots, y_s) ke každému z n vnitřních symbolů q_1, q_2, \dots, q_n tak, aby různým vnitřním stavům stroje \mathcal{S} odpovídaly různé s -tice hodnot binárních vnitřních proměnných y_1, y_2, \dots, y_s . Potom je jasné, že stačí, aby bylo

$$(5) \quad p = \lceil \log_2 m \rceil,$$

$$(6) \quad v = \lceil \log_2 r \rceil,$$

$$(7) \quad s = \lceil \log_2 n \rceil,$$

kde $\lceil x \rceil$ je nejmenší celé číslo větší nebo rovno x . V dalším budeme stále předpokládat, že počet příslušných binárních proměnných je právě roven počtu, který vyhovuje rovnicím (5), (6), (7).

Kódováním vstupních, vnitřních a výstupních symbolů sekvenčního stroje \mathcal{S} dostaneme z jeho abstraktní vnitřní tabulky strukturní vnitřní tabulku, která je

tabulkou závislostí binárních vnitřních proměnných $Y_i = y_i(t+1)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) v čase $t+1$ na binárních vnitřních proměnných $y_j = y_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, s$) a binárních vstupních proměnných $x_k = x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, p$) v čase t .

Podobně z abstraktní výstupní tabulky stroje \mathcal{S} dostaneme strukturní výstupní tabulku, která je tabulkou závislostí výstupních binárních proměnných $z_l = z_l(t)$ ($l = 1, 2, \dots, v$) v čase t na binárních vnitřních proměnných $y_j = y_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, s$) a binárních vstupních proměnných $x_k = x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, p$) v čase t . Dostaneme tudíž pravdivostní tabulky popsaných závislostí, ze kterých již můžeme určit binární proměnné Y_i a z_l jako boolské funkce

$$(8') \quad Y_i = y_i(t+1) = F_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)), \\ i = 1, 2, \dots, s,$$

$$(9') \quad z_l(t) = G_l(y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)), \quad l = 1, 2, \dots, v,$$

nebo zkráceně

$$(8) \quad Y_i = F_i(y_1, y_2, \dots, y_s, x_1, x_2, \dots, x_p), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$(9) \quad z_l = G_l(y_1, y_2, \dots, y_s, x_1, x_2, \dots, x_p), \quad l = 1, 2, \dots, v.$$

Rovnice (8), (9) udávají pracovní rovnice sekvenčního obvodu, který realizuje chování předepsané strojem \mathcal{S} ve strukturní abecedě, dané kódováním vstupních, vnitřních a výstupních symbolů. Funkce F_i a G_l udávají pracovní funkce sekvenčního obvodu.

Poznámka: Při syntéze je výhodné zobrazit funkci F_i do mapy, kterou nazýváme i -tou pracovní mapou sekvenčního obvodu.

4. ROVNICE VSTUPŮ A VOLBA PAMĚŤOVÝCH ELEMENTŮ

Obecný tvar strukturního schématu libovolné realizace daného sekvenčního stroje \mathcal{S} , která používá s paměťových elementů P_1, \dots, P_s , je na obr. 5. Pracovní rovnice (8) a (9) sekvenčního obvodu předepisují požadované chování částí obvodu, ohraničené čerchovanou čarou, a tedy i výstupy jednotlivých paměťových elementů P_1, \dots, P_s . Protože se budeme zajímat pouze o část sekvenčního obvodu, která realizuje vnitřní funkci stroje \mathcal{S} , stačí, když se v dalším omezie na pracovní rovnice (8). Charakteristické rovnice (1) a (2) paměťových elementů P_i ($i = 1, 2, \dots, s$) určují jejich reakce na přípustné vstupní binární signály a_{il} ($l = 1, 2, \dots, u_i$). Proto je nutné určit závislost vybuzení vstupů a_{il} paměťových elementů P_i na binárních vstupních proměnných kombinatorického obvodu x_k ($k = 1, 2, \dots, p$) a y_j ($j = 1, 2, \dots, s$) tak, aby byly splněny předepsané pracovní rovnice sekvenčního obvodu (8). To znamená, že hledáme boolské funkce

$$(10) \quad a_{il} = f_{il}(y_1, y_2, \dots, y_s, x_1, x_2, \dots, x_p), \quad l = 1, 2, \dots, u_i, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

240 tak, aby splňovaly boolské rovnice

$$(11) \quad F_i(y_1, y_2, \dots, y_s, x_1, x_2, \dots, x_p) = H_i(y_i, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iu_i})$$

$$(12) \quad h_i(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iu_i}) = 0$$

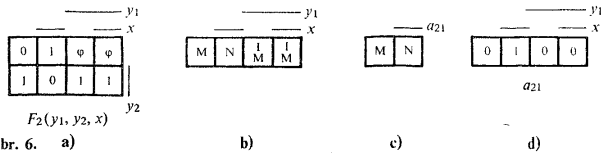
pro $i = 1, 2, \dots, s$.

Řešením rovnic (11) a (12) vzhledem k neznámým a_{il} zjistíme požadovanou strukturu části kombinatorického obvodu z obr. 5, která odpovídá vnitřní funkci $\delta_{\mathcal{P}}$ stroje \mathcal{S} a můžeme tedy provést jeho syntézu. Před touto syntézou je však z hlediska jednoduchosti realizace nutné pro každé i volit vhodný typ paměťového elementu P_i . Pro volbu typu paměťového elementu P_i ukázal J. Haškovec a ostatní [6, 7] tento výsledek:

Věta 4.1. *Nechť závislost binární vnitřní proměnné Y_i v čase $t + 1$ na proměnných y_j, x_k ($j = 1, 2, \dots, s$; $k = 1, 2, \dots, p$) je předepsána pracovní rovnicí sekvenčního obvodu (8). Potom vhodnou volbou typu paměťového elementu P_i můžeme dosáhnout toho, že vstupy a_{il} ($l = 1, 2, \dots, u_i$) elementu P_i jsou funkce (10), které nezávisí na vnitřní proměnné y_i .*

Postup při určování typu elementu P_i je tento:

i -tou pracovní mapou pro funkci F_i převedeme na mapu kombinací přechodů vzhledem k proměnné y_i . Z této mapy určíme nutnou podmnožinu množiny $\{I, O, M, N\}$, tj. podmnožinu obsahující alespoň jeden symbol z každé buňky odpovídající mapy kombinací přechodů. Element P_i zvolíme tak, aby jeho charakteristický soubor obsahoval tuto nutnou podmnožinu množiny $\{I, O, M, N\}$.



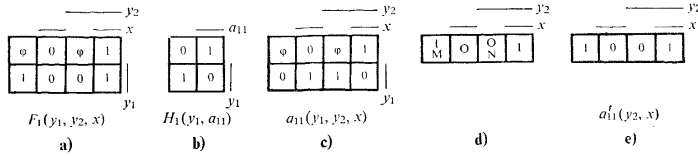
Obr. 6. a) b) c) d)

Řešení rovnic (11) a (12) hledáme pomocí mapy pro vybuzení vstupů a_{il} ($l = 1, 2, \dots, u_i$) elementu P_i . Tuto mapu dostaneme tak, že v mapě kombinací přechodů nahradíme každý ze smybolů I, O, M, N takovými konfiguracemi hodnot vstupů $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iu_i})$, které odpovídají v charakteristické mapě zvoleného elementu P_i sloupcům se stejným označením. Z této mapy již můžeme provést syntézu a minimalizaci funkcí (10), přičemž vhodně využíváme „don't care“ stavů.

Příklad 4.1. Pro $s = 2, p = 1, i = 2$ nechť požadovaná pracovní funkce $F_2(y_1, y_2, x)$ sekvenčního obvodu je zadána pracovní mapou na obr. 6a) (ϕ označuje „don't care“ stavy). Odpovídající mapa kombinací přechodů vzhledem k proměnné y_2 je na obr. 6b). Z této mapy je vidět, že stačí, aby charakteristický soubor symbolů elementu P_2 obsahoval symboly M a N. To znamená, že

jako P_2 můžeme volit paměťový element typu T , kterému odpovídá mapa kombinací přechodů do následujícího stavu podle obr. 6c). Mapa pro vybuzení jediného vstupu a_{21} elementu P_2 je potom na obr. 6d). Z ní dostaneme $a_{21}(y_1, x) = \bar{x}y_1$.

Příklad 4.2. Nechť požadovaná pracovní funkce $F_1(y_1, y_2, x)$ je zadána mapou na obr. 7a a nechť použitý paměťový element P_1 má charakteristickou mapu podle obr. 7b). Mapa pro vybuzení vstupu a_{11} elementu P_1 (konstruovaná např. podle [5] nebo [8]) je na obr. 7c). Z této mapy dostaneme $a_{11}(y_1, y_2, x) = y_1\bar{y}_2x + \bar{y}_1y_2 + \bar{x}y_2$.



Obr. 7.

Mapa kombinací přechodů pro funkci $F_1(y_1, y_2, x)$ podle proměnné y_1 je na obr. 7d). Z této mapy vidíme, že použitý paměťový element typu T není vhodně zvolen, protože jeho charakteristický soubor symbolů ($\{M, N\}$) neobsahuje nutnou podmnožinu symbolů z mapy na obr. 7d). Je tedy výhodné nahradit element P_1 paměťovým elementem P'_1 typu D , jehož charakteristický soubor je $\{I, O\}$. Mapa pro vybuzení vstupu a'_{11} elementu P'_1 je na obr. 7e). Z této mapy dostaneme $a'_{11}(y_2, x) = \bar{x}y_2 + xy_2$.

V posledním příkladě pracovní funkce $F_1(y_1, y_2, x)$ je realizovatelná jako funkce $\hat{F}_1(y_1, y_2, x) = \bar{x}y_2 + xy_2$, která je nezávislá na proměnné y_1 . Není těžké obecně ukázat, že v případě, že vnitřní proměnná Y_i podle (8) může být nezávislá na proměnné y_i , je vhodné používat jako elementu P_i paměťového elementu typu D . Tento element má pouze jediný vstup, takže v kombinatorické části sekvenčního obvodu realizujeme pouze jedinou funkci a to právě Y_i .

Víme, že paměťové elementy jsou elementární sekvenční stroje Mooreova typu. Jestliže chceme syntezovat danou strukturu vnitřní funkci pomocí obecnějších sekvenčních strojů Mooreova typu, můžeme pro tyto stroje zavést obecnější charakteristické mapy, které mají více řádků než dva. Podobně pracovní funkce daného obvodu můžeme zobrazit do obecnějších pracovních map. Postup pro zjištění vybuzení těchto zobecněných paměťových elementů byl zůstal zachován. V tomto případě je také výhodné zavést vícehodnotové logiky. Počty hodnot logik jsou dány počty stavů příslušných paměťových Mooreových strojů.

5. ROZKLADY SE SUBSTITUČNÍ VLASTNOSTÍ A REDUKOVANÉ ZÁVISLOSTI

V tomto odstavci uvedeme pojem rozkladu se substituční vlastností (substitution property) původně zavedený Hartmanisem [10, 11]. Uvedeme některé z jeho vlastností a vyšetříme jejich souvislost s redukovanou závislostí boolských funkcí a_{ii}

v (10) na vstupních proměnných x_1, x_2, \dots, x_p a na (podsoustavě) vnitřních proměnných y_1, y_2, \dots, y_s . Napřed zavedeme pojem rozkladu.

Definice 5.1. Rozkladem π na množině vnitřních stavů Q sekvenčního stroje \mathcal{S} rozumíme soubor podmnožin $Q_\alpha \subset Q$, $\pi = \{Q_\alpha / \alpha \in A\}$, který má pro všechna $\alpha, \beta \in A$ následující vlastnosti:

- (a) $Q_\alpha \neq \emptyset$,
 (b) $\alpha \neq \beta \Rightarrow Q_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset$,
 (c) $\bigcup_{\alpha \in A} Q_\alpha = Q$,

kde A je daná množina indexů a \emptyset označuje prázdnou množinu. Podmnožiny Q_α budeme v dalším nazývat *bloky* rozkladu π .

Rozklad π tedy udává jistý ekvivalentní vztah na množině stavů Q stroje \mathcal{S} , kde za ekvivalentní považujeme stavy obsažené ve stejném bloku. Je výhodné zavést pro rozklady π částečné uspořádání. Označujeme $\pi_1 \leq \pi_2$, jestliže každý blok z π_1 je celý obsažen v nějakém bloku z π_2 .

Jestliže $\pi_1 \leq \pi_2$ a $\pi_2 \leq \pi_1$ je účelné zavést pojem největší dolní hranice (greatest lower boundary – g.l.b.) a nejmenší horní hranice (lowest upper boundary – l.u.b.).

Nejmenší horní hranice dvou libovolných rozkladů π_1 a π_2 je rozklad π_3 takový, že $\pi_1 \leq \pi_3$ a $\pi_2 \leq \pi_3$ a jestliže pro nějaký rozklad π_4 platí $\pi_1 \leq \pi_4$ a $\pi_2 \leq \pi_4$, potom musí být $\pi_3 \leq \pi_4$.

Podobně největší dolní hranice dvou rozkladů π_1 a π_2 je rozklad π'_3 takový, že $\pi'_3 \leq \pi_1$ a $\pi'_3 \leq \pi_2$ a jestliže pro nějaký rozklad π'_4 platí $\pi'_4 \leq \pi_1$ a $\pi'_4 \leq \pi_2$, potom musí být $\pi'_4 \leq \pi'_3$.

$$\begin{aligned} \text{Označujeme} \quad & \text{g.l.b.} \quad (\pi_1, \pi_2) = \pi_1 \cdot \pi_2, \\ & \text{l.u.b.} \quad (\pi_1, \pi_2) = \pi_1 + \pi_2. \end{aligned}$$

Nulový rozklad $\pi = 0$ je rozklad π na množině stavů Q , jehož každý blok obsahuje pouze jeden stav stroje \mathcal{S} .

Jedničkový rozklad $\pi = 1$ je rozklad π na množině stavů Q , který má pouze jeden blok obsahující všechny stavy stroje \mathcal{S} . Tedy nulový rozklad 0 rozděluje všechny stavy a jedničkový rozklad 1 ztotožňuje všechny stavy stroje \mathcal{S} do jediného bloku.

Podle Birkhoffa [9, 10] platí:

Věta 5.1. Pro libovolné dva rozklady π_1 a π_2 g.l.b. (π_1, π_2) a l.u.b. (π_1, π_2) vždy existuje a proto soustava všech rozkladů na dané množině Q tvoří svaz.

Říkáme, že dvě podmnožiny $Q_{x_1}, Q_{x_2} \subset Q$ jsou spojeny, jestliže $Q_{x_1} \cap Q_{x_2} \neq \emptyset$. Dále dvě podmnožiny Q_{x_1}, Q_{x_2} jsou řetězcově spojeny, jestliže existuje posloupnost podmnožin $Q_{x_1}, Q_{x_2}, \dots, Q_{x_n}$ taková, že Q_{x_i} je spojená s $Q_{x_{i+1}}$; $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Pro rozklady π_1 a π_2 nechť Q_{α_i} je blok z π_1 a Q_{β_j} je blok z π_2 . Potom v rozkladu $\pi_1 + \pi_2$ blok, který obsahuje Q_{α_i} , je dán sjednocením všech bloků z π_1 a π_2 , které jsou řetězcově spojeny s Q_{α_i} v soustavě podmnožin, určené všemi bloky π_1 a π_2 . Největší takové podmnožiny stavů, které jsou obsaženy v každém bloku alespoň jedné z dvojic bloků $(Q_{\alpha_i}, Q_{\beta_j})$ určují bloky rozkladu $\pi_1 \cdot \pi_2$, tj.

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \{Q_{\alpha_i} \cap Q_{\beta_j} \mid Q_{\alpha_i} \cap Q_{\beta_j} \neq \emptyset\}.$$

Příklad 5.1. $\pi_1 = \{\overline{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7}\}$, $\pi_2 = \{\overline{q_1, q_4, q_2, q_7, q_3, q_5, q_6}\}$, $\pi_1 + \pi_2 = \{\overline{q_1, q_2, q_3, q_4, q_7, q_5, q_6}\}$, $\pi_1 \cdot \pi_2 = \{\overline{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7}\}$.

Z teorie informace víme, že odstranění neurčitosti o jisté události znamená získání informace. Obdržená informace je tím větší, čím větší je odstraněná neurčitost o daném jevu. Pro daný sekvenční stroj \mathcal{S} je důležitá „informace o stavu“, ve kterém se stroj nachází. Tuto „informaci o stavu“ nám poskytuje znalost bloku jistého rozkladu π na množině stavů Q stroje \mathcal{S} . Stav stroje je potom jedním ze stavů, které jsou obsaženy v daném bloku. To znamená, že „informace o stavu“ stroje je úplná, jestliže neexistuje žádná neurčitost o stavu, tj. každý blok obsahuje právě jeden stav.

Rozklad π na množině Q tedy udává „informaci o stavu“ stroje \mathcal{S} . Pro dané rozklady π_1 a π_2 , $\pi_1 \cdot \pi_2$ poskytuje všem „informaci“, kterou udávají rozklady π_1 a π_2 . Jestliže rozklady π_1 a π_2 vyhovují vztahu $\pi_1 \cdot \pi_2 = \emptyset$, pak udávají úplnou „informaci o stavu“ stroje \mathcal{S} .

Obdobně $\pi_1 + \pi_2$ poskytuje „informaci“, která je společná ve dvou rozkladech π_1 a π_2 (a může být tedy zpracovávána společně – jinak dostaneme při zpracování redundanci). Jestliže $\pi_1 + \pi_2 = I$, je „informace“, která je společná oběma rozkladům, nulová. Jestliže $\pi_1 \cdot \pi_2 = \emptyset$ a $\pi_1 + \pi_2 = I$, potom všechna „informace“ v rozkladech π_1 a π_2 se využívá a žádná „informace“ není redundantní. Tato interpretace umožňuje zavést pojem komplementu.

Komplementem daného rozkladu π_1 na množině stavů Q stroje \mathcal{S} je takový rozklad π_2 na množině Q , pro který platí:

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \emptyset \quad \text{a} \quad \pi_1 + \pi_2 = I.$$

Poznamenejme, že komplement k danému rozkladu není určen jednoznačně.

Příklad 5.2. K rozkladu $\pi_1 = \{\overline{q_1, q_2, q_3, q_4}\}$ jsou komplementární např. rozklady $\pi_2 = \{\overline{q_1, q_3, q_2, q_4}\}$ a $\pi_3 = \{\overline{q_1, q_4, q_2, q_3}\}$.

Věta 5.2. Pro libovolné tři rozklady π_1, π_2 a π_3 na množině Q platí [10]:

- | | | |
|-----|--|--|
| (a) | $\pi_1 \cdot \pi_1 = \pi_1,$ | $\pi_1 + \pi_1 = \pi_1,$ |
| (b) | $\pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2 \cdot \pi_1,$ | $\pi_1 + \pi_2 = \pi_2 + \pi_1,$ |
| (c) | $\pi_1 \cdot (\pi_2 \cdot \pi_3) = (\pi_1 \cdot \pi_2) \cdot \pi_3,$ | $\pi_1 + (\pi_2 + \pi_3) = (\pi_1 + \pi_2) + \pi_3,$ |
| (d) | $\pi_1 \cdot (\pi_1 + \pi_2) = \pi_1,$ | $\pi_1 + (\pi_1 \cdot \pi_2) = \pi_1,$ |

- (e) $\pi_1 \cdot 0 = 0$, $\pi_1 + 0 = \pi_1$,
 (f) $\pi_1 \cdot I = \pi_1$, $\pi_1 + I = I$,
 (g) $\pi_1 \cdot (\pi_2 + \pi_3) \geq \pi_1 \cdot \pi_2 + \pi_1 \cdot \pi_3$, $\pi_1 + (\pi_2 \cdot \pi_3) \leq (\pi_1 + \pi_2) \cdot (\pi_1 + \pi_3)$.

Důkaz se provede snadno. Pro ilustraci ukážeme důkaz (g): $\pi_1 \geq \pi_1 \cdot \pi_2$ a $\pi_1 \geq \pi_1 \cdot \pi_3 \Rightarrow \pi_1 \geq \pi_1 \cdot \pi_2 + \pi_1 \cdot \pi_3$ (i). Naopak $\pi_2 \geq \pi_1 \cdot \pi_2$ a tedy $\pi_2 + \pi_3 \geq \pi_1 \cdot \pi_2$. Podobně $\pi_3 \geq \pi_1 \cdot \pi_3 \Rightarrow \pi_2 + \pi_3 \geq \pi_1 \cdot \pi_3$. Odtud máme $\pi_2 + \pi_3 \geq \pi_1 \cdot \pi_2 + \pi_1 \cdot \pi_3$ (ii). Z (i) a (ii) $\Rightarrow \pi_1 \cdot (\pi_2 + \pi_3) \geq \pi_1 \cdot \pi_2 + \pi_1 \cdot \pi_3$ Q.E.D.

Z věty 5.2 vidíme, že algebra rozkladů na množině stavů Q stroje \mathcal{S} se podobá klasické Booleově algebře ve vlastnostech (a) až (f). Na rozdíl od Booleovy algebry, v níž je negace jednoznačně určena a platí distributivní zákony, má tyto vlastnosti algebra rozkladů pouze ve speciálních případech rozkladů π_1, π_2 a π_3 . V algebře rozkladů jsou distributivní zákony nahrazeny zákony (g). To znamená, že soustava rozkladů na množině Q stroje \mathcal{S} tvoří svaz, který obecně není distributivní. Poznamenejme, že $\pi_1 \geq \pi_2$ tehdy a jen tehdy, jestliže buď $\pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2$ anebo $\pi_1 + \pi_2 = \pi_1$.

Uvedený formalismus rozkladů nám má sloužit k rozkladu stroje \mathcal{S} na jednodušší složkové stroje, které zpracovávají „redukované informace“ a tedy vedou k redukováným závislostem vnitřních proměnných na jejich argumentech.

Pro sekvenční stroj \mathcal{S} budeme pracovat se zvláštním druhem rozkladů na množině stavů Q , které se zachovávají vzhledem k zobrazení $\delta(Q \times J \xrightarrow{\delta} Q)$.

Definice 5.2. Rozklad π na množině stavů Q stroje \mathcal{S} má substituční vlastnost (S.P.) vzhledem k \mathcal{S} , jestliže pro libovolné dva stavy q_i a q_j ze stejného bloku $Q_x \in \pi$ a libovolný vstup I_k padnou stavy $\delta(q_i, I_k)$ a $\delta(q_j, I_k)$ opět do stejného bloku $Q_y \in \pi$.

Následující věta [10] dovoluje vytváření nových rozkladů se S.P. z rozkladů již známých bez použití vnitřní tabulky stroje \mathcal{S} .

Věta 5.3. Jestliže π_1 a π_2 jsou dva rozklady se S.P. na množině stavů Q stroje \mathcal{S} , potom $\pi_1 \cdot \pi_2$ a $\pi_1 + \pi_2$ mají S.P. vzhledem k \mathcal{S} .

Tato věta ukazuje, že soubor všech rozkladů se S.P. na množině stavů Q stroje \mathcal{S} tvoří svaz. Z této věty a ze znalosti všech nejmenších rozkladů $\pi(q_i, q_j)$ se S.P. pro \mathcal{S} (které dostaneme podle níže uvedeného algoritmu počátečním sjednocením dvou stavů q_i a q_j do stejného bloku) můžeme vytvářet všechny zbývající rozklady se S.P. na Q podle následující věty [11]:

Věta 5.4. Libovolný rozklad π se S.P. na množině stavů Q stroje \mathcal{S} je dán součtem přes podsoustavu rozkladů $\pi(q_i, q_j)$, tj. $\pi = \sum_{(i,j)} \pi(q_i, q_j)$, kde součet je přes takové (i, j) , že

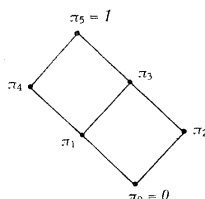
$$\pi(q_i, q_j) \leq \pi.$$

Algoritmus pro získání rozkladů se S.P. [11]. Pro daný stroj \mathcal{S} spojíme do jednoho bloku libovolné dva stavy q_i a q_j . Potom spojíme do stejného bloku dvojice stavů $\delta(q_i, I_k)$ a $\delta(q_j, I_k)$. To

učiníme pro všechny vstupy $I_k, k = 1, 2, \dots, m$. K takto vzniklým dvojicím přidáme páry stavů, které mají být spojené v důsledku tranzitivního zákona; tj. jestliže $\overline{q_k q_i}$ a $\overline{q_k q_m}$ jsou dva bloky dvojic, které mají být spojené z předešlého postupu, potom i q_i a q_m mají být spojené, tj. dostaneme blok $\overline{q_k q_i q_m}$. Pro všechny takto vzniklé nové dvojice $\overline{q_i, q_m}$ opět dáváme do stejného bloku stavy $\delta(q_i, I_k)$ a $\delta(q_m, I_k)$ a opět aplikujeme tranzitivní zákon. Jestliže po několika krocích již v dalším kroku nedostaneme nové dvojice, dostali jsme rozklad $\pi(q_i, q_j)$ na množině Q , která má S.P. vzhledem ke stroji \mathcal{S} . Pro stroj \mathcal{S} musíme takto vyzkoušet $n(n-1)/2$ různých dvojic stavů, abychom zjistili všechny nejmenší rozklady $\pi(q_i, q_j)$ se S.P., ze kterých součtem podle věty 5.4 můžeme generovat všechny rozklady π se S.P. na množině Q stroje \mathcal{S} a zároveň konstruovat celý svaz rozkladů se S.P. podle věty 5.3. Takto konstruovaný svaz nám dává ve stručném tvaru důležité informace o rozkladových vlastnostech stroje \mathcal{S} .

Tabulka 1.

$\delta_{\mathcal{S}}$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
1	2	1	5	8	3
2	1	2	6	7	4
3	4	3	6	6	1
4	3	4	5	5	2
5	5	6	3	4	7
6	6	5	4	3	8
7	7	8	4	2	5
8	8	7	3	1	6



Obr. 8.

Příklad 5.3. [12] Necht vnitřní funkce stroje \mathcal{S} je zadána tabulkou 1 (v níž arabské číslice označují stavy stroje \mathcal{S}). Tabulka 2 ukazuje nejmenší rozklady $\pi(q_i, q_j)$ se S.P. pro odpovídající dvojice (q_i, q_j) . Na obr. 8 je grafické znázornění svazu všech rozkladů π se S.P. na množině Q daného stroje \mathcal{S} . Z obr. 8 je patrné, že pro stroj \mathcal{S} neexistují žádné jiné rozklady se S.P. kromě již uvedených v tab. 2.

Pro daný rozklad π se S.P. na množině Q stroje \mathcal{S} označme $\beta(\pi)$ počet bloků π a $\gamma(\pi)$ počet stavů v největším bloku π . Nejmenší počet binárních proměnných

Tabulka 2.

$\pi(q_i, q_j)$	$\{(q_i, q_j)\}$
$\pi_1 = \{\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}, \overline{78}\}$	$\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$
$\pi_2 = \{\overline{14}, \overline{23}, \overline{58}, \overline{67}\}$	$\{(1, 4), (2, 3), (5, 8), (6, 7)\}$
$\pi_3 = \{\overline{1234}, \overline{5678}\}$	$\{(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 8)\}$
$\pi_4 = \{\overline{1278}, \overline{3456}\}$	$\{(1, 7), (1, 8), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$
$\pi_5 = \{\overline{12345678}\} = I$	$\{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 7), (4, 8)\}$

potřebných k zakódování n -stavů stroje \mathcal{S} je $s = \lceil \log_2 n \rceil$. Z definice rozkladu π se S.P. vyplývá, že znalost bloku π , který obsahuje současný stav stroje \mathcal{S} , a vstupu umožňuje jednoznačně určit blok následujícího stavu. To znamená, že jestliže přidělíme prvních $b = \lceil \log_2 \beta(\pi) \rceil$ binárních proměnných k rozlišení mezi bloky π , potom hodnoty těchto b proměnných v následujícím okamžiku jsou závislé pouze na hodnotách těchto b proměnných a vstupech v předešlém okamžiku. Pro rozlišení mezi stavy ve stejném bloku π potřebujeme $c = \lceil \log_2 \gamma(\pi) \rceil$ binárních proměnných. Potom podle [11] existuje takové kódování n stavů stroje \mathcal{S} s binárními proměnnými, že b bitů následujícího stavu může být vypočítáno bez znalosti c bitů předešlého stavu, jestliže

$$(13) \quad b + c = s.$$

To znamená, že pro prvních b binárních vnitřních proměnných z (8) bude platit

$$(14) \quad Y_i = F_i(y_1, y_2, \dots, y_b, x_1, x_2, \dots, x_p), \quad i = 1, 2, \dots, b.$$

Vstupy (10) příslušných paměťových elementů potom také hledáme ve tvaru

$$(15) \quad a_{il} = f_{il}(y_1, y_2, \dots, y_b, x_1, x_2, \dots, x_p), \quad l = 1, 2, \dots, u_i, \quad i = 1, 2, \dots, b.$$

To znamená, že vstupy prvních b paměťových elementů jsou funkce, jejichž závislosti na vnitřních proměnných jsou redukovány.

Definice 5.3. Kódování stavů stroje \mathcal{S} , kde b vnitřních proměnných Y_1, Y_2, \dots, Y_b může být vypočítáno bez znalosti zbývajících proměnných $y_{b+1}, y_{b+2}, \dots, y_s$ podle (14), nazýváme kódováním se samozávislými podsoustavami.

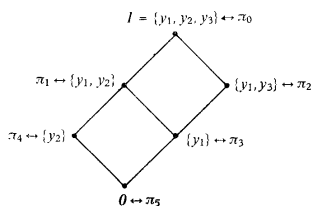
Předešlé výsledky pro rozklady π se S.P. naznačují, že existuje jistý vztah mezi samozávislými podsoustavami a rozklady se S.P. V [11] a [13] bylo dokázáno, že pro daný stroj \mathcal{S} je korespondence mezi samozávislou podsoustavou a rozkladem se S.P. jednojednoznačná. Protože svaz samozávislých podsoustav je vždy distributivní, existuje tato jednojednoznačná korespondence také mezi distributivním podsvazem svazu rozkladů se S.P. a svazem samozávislých podsoustav. Triviálními rozkladům se S.P. I resp. 0 odpovídají triviální podsoustavy vnitřních proměnných 0 resp. I . Dále: rozkladové operace průnik \cdot a sjednocení $+$ odpovídají podsoustavovým operacím sjednocení \cup a průniku \cap . Také rozkladový uspořádávací vztah \leq odpovídá vztahu inkluze \supseteq samozávislých podsoustav. Ve svazovém diagramu definujeme jako maximální ty elementy (rozklady, podsoustavy), které nejsou obsaženy v žádném jiném elementu kromě I , a jako minimální ty elementy, které neobsahují žádný jiný element kromě 0 . Potom maximální elementy distributivního podsvazu svazu rozkladů se S.P. odpovídají minimálním podsoustavám svazu samozávislých podsoustav. Ve skutečnosti každý distributivní svazový diagram rozkladů se S.P. je přesně kopií odpovídajícího svazového diagramu samozávislých podsoustav, jestliže jej úplně převrátíme [13].

Příklad 5.4. V příkladu 5.3 necht' jsou rozlišeny bloky rozkladů π_i se S.P. stavy podsoustav binárních vnitřních proměnných $\{y\}_i$ podle tabulky 3. Potom k distributivnímu svazovému diagramu rozkladů se S.P. na obr. 8 je izomorfní svazový diagram podsoustav samozávislých proměnných na obr. 9.

Tabulka 3.

i	π_i	$\{y\}_i$
0	$\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$	$\{y_1, y_2, y_3\} = I$
1	$\{\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}, \overline{78}\}$	$\{y_1, y_2\}$
2	$\{\overline{14}, \overline{23}, \overline{58}, \overline{67}\}$	$\{y_1, y_3\}$
3	$\{\overline{1234}, \overline{5678}\}$	$\{y_1\}$
4	$\{\overline{1278}, \overline{3456}\}$	$\{y_2\}$
5	$\{\overline{12345678}\} = I$	0

Izomorfismus mezi distributivními částmi svazových diagramů rozkladů se S.P. a samozávislých podsoustav vnitřních proměnných je velmi důležitý. Jestliže pro daný stroj \mathcal{S} existuje distributivní část svazového diagramu obsahující netriviální rozklady se S.P., které splňují podmínku (13), potom můžeme kódovat n stavů stroje \mathcal{S} s vnitřními proměnnými, mezi kterými existuje jedna anebo více samozávislých podsoustav.



Obr. 9.

Podle [11] je nutnou a postačující podmínkou pro existenci kódování stavů stroje \mathcal{S} pomocí soustavy s binárních proměnných, ze kterých dvě disjunktní podsoustavy jsou podsoustavami samozávislých proměnných, aby pro stroj \mathcal{S} existovaly dva rozklady se S.P. π_1 a π_2 takové, že

$$(16) \quad \pi_1 \cdot \pi_2 = 0,$$

$$(17) \quad b_1 + b_2 = s,$$

kde $b_1 = [\log_2 \beta(\pi_1)]$ a $b_2 = [\log_2 \beta(\pi_2)]$.

Příklad 5.5. Uvažujme střadač mod6 jako sekvenční stroj, jehož jednu číslici považujeme za současný stav a druhou za vstup. Tabulka 4 je vnitřní tabulka střadače. Rozklady se S.P. a jim odpovídající samozávislé podsoustavy jsou v tabulce 5. Svazové diagramy rozkladů se S.P. a samozávislých podsoustav jsou na obr. 10a) a b). Vidíme, že v tomto příkladě platí

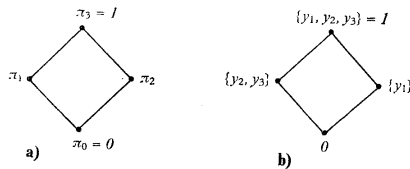
$$\pi_1 \cdot \pi_2 = 0 \quad \text{a} \quad \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Tabulka 4.

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Tabulka 5.

i	π_i	$\{y\}_i$
0	$\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\} = 0$	$\{y_1, y_2, y_3\} = 1$
1	$\{\overline{03}, \overline{14}, \overline{25}\}$	$\{y_2, y_3\}$
2	$\{\overline{024}, \overline{135}\}$	$\{y_1\}$
3	$\{\overline{012345}\} = 1$	0



Obr. 10.

Výsledky uvedené v předchozím textu mohou být interpretovány z obecnějšího hlediska. Jestliže libovolný stroj \mathcal{S} má takový netriviální rozklad π se S.P. na množině stavů Q , že $\beta(\pi)$ je počet bloků π a $\gamma(\pi)$ je počet stavů v největším bloku π , potom podle [12] existují takové dva stroje \mathcal{S}_1 o $\beta(\pi)$ stavech a \mathcal{S}_2 o $\gamma(\pi)$ stavech, že \mathcal{S} je podstrojem stroje, který vznikne sériovým spojením strojů \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 .

Stroj $\mathcal{S}' = (J', Q', O', \delta', \lambda')$ je podstrojem stroje $\mathcal{S} = (J, Q, O, \delta, \lambda)$ tehdy a jen tehdy, jestliže $Q' \subseteq Q$, $J' \subseteq J$, $O' \subseteq O$, $\delta' = \delta$ omezené na definiční obor $Q' \times J'$ a $\lambda' = \lambda$ omezené na definiční obor $Q' \times J'$.

Sériovým spojením dvou strojů $\mathcal{S}_1 = (J_1, Q_1, O_1, \delta_1, \lambda_1)$ a $\mathcal{S}_2 = (J_2, Q_2, O_2, \delta_2, \lambda_2)$, pro které $O_1 \subseteq J_2$ je stroj $\mathcal{S} = (J_1, Q_1 \times Q_2, O_2, \delta, \lambda)$, kde pro $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$, $\delta\{(q_1, q_2), I\} = \{\delta_1(q_1, I), \delta_2(q_2, \lambda_1(q_1, I))\}$ a $\lambda\{(q_1, q_2), I\} = \lambda_2(q_2, \lambda_1(q_1, I))$.

Jestliže \mathcal{S}' je izomorfním obrazem podstroje \mathcal{S} , potom říkáme, že stroj \mathcal{S}' realizuje vnitřní chování stroje \mathcal{S}' . První stroj \mathcal{S}_1 určuje bloky π stroje \mathcal{S} , které identifikujeme s jeho stavy. Druhý stroj \mathcal{S}_2 rozlišuje stavy stroje \mathcal{S} uvnitř bloku π na základě dodatečných „informací o bloku“ π ze stroje \mathcal{S} . Stavy stroje \mathcal{S}_2 jsou identifikovány s bloky takového rozkladu τ na množině Q stroje \mathcal{S} , že $\pi \cdot \tau = 0$. Pro zvolené π a τ můžeme určit vnitřní funkci stroje \mathcal{S}_2 z výstupů stroje \mathcal{S}_1 a z vnitřní funkce stroje \mathcal{S} . V této souvislosti je důležitá otázka redukce dodávané „informace“ ze stroje \mathcal{S}_1 potřebné k určení vnitřní funkce stroje \mathcal{S}_2 . Často stačí přivádět ke stroji \mathcal{S}_2 pouze částečnou „informaci o rozkladě“ π , která je určena rozkladem $\tau_1 \geq \pi$ na množině stavů Q stroje \mathcal{S} . V termínech samozávislých soustav to znamená, že k určení vnitřních proměnných, které rozlišují bloky τ nepotřebujeme znát celou podsoustavu samozávislých proměnných, určujících bloky rozkladu π . Speciální je případ, kdy stačí přivádět od stroje \mathcal{S}_1 ke stroji \mathcal{S}_2 nulovou „informaci“, tj. $\tau_1 = 1$. V tomto případě má rozklad τ S.P. a určuje také samozávislou podsoustavu vnitřních proměnných. Potom vnitřní chování stroje \mathcal{S} může být realizováno paralelním spojením strojů \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 .

Paralelním spojením dvou strojů $\mathcal{S}_1 = (J_1, Q_1, O_1, \delta_1, \lambda_1)$ a $\mathcal{S}_2 = (J_2, Q_2, O_2, \delta_2, \lambda_2)$ rozumíme stroj $\mathcal{S} = (J_1 \times J_2, Q_1 \times Q_2, O_1 \times O_2, \delta, \lambda)$, kde

$$\delta\{(q_1, q_2), (I_1, I_2)\} = \{\delta_1(q_1, I_1), \delta_2(q_2, I_2)\},$$

$$\lambda\{(q_1, q_2), (I_1, I_2)\} = \{\lambda_1(q_1, I_1), \lambda_2(q_2, I_2)\}.$$

Příklad 5.6. Pro stroj \mathcal{S} z příkladu 5.3 víme, že rozklad π_3 má S.P. a má dva bloky. To znamená, že stroj \mathcal{S} bude mít dva stavy $a = \overline{1234}$ a $b = \overline{5678}$ a dostaneme je ze stroje \mathcal{S} v tabulce 1

Tabulka 6.

\mathcal{S}_1	i_1	i_2
a	a	b
b	b	a

$i_1 = I_1 \vee I_2 \vee I_5$
 $i_2 = I_3 \vee I_4$

nahražením příslušných bloků stavů stroje \mathcal{S} za stavy a nebo b stroje \mathcal{S}_1 ve všech sloupcích tabulky 1. Takto vzniklá vnitřní tabulka stroje \mathcal{S}_1 je tabulka 6. Stroj \mathcal{S}_1 má pouze dva vstupy i_1 a i_2 , protože jeho vnitřní tabulka je stejná pro vstupy I_1, I_2, I_5 a I_3, I_4 . Toho můžeme využít při kódování vstupní abecedy stroje \mathcal{S} , jestliže toto není předem zadáno. Výstup ze stroje \mathcal{S}_1 je

jeho současným stavem a dává „informaci o stavu“ stroje \mathcal{S} . Tento výstup je dodatečným vstupem ke stroji \mathcal{S}_2 . Stroj \mathcal{S}_2 bude mít tedy vstupy uvedené v tabulce 7. Tento stroj konstruujeme tak, že zvolíme rozklad τ tak, aby $\pi_3 \cdot \tau = 0$, tj. aby stroje \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 dávaly úplnou „informaci o stavu“ stroje \mathcal{S} . Potom rozklad τ musí obsahovat aspoň čtyři bloky, tj. stroj \mathcal{S}_2 bude mít alespoň čtyři stavy. Zvolme $\tau = \{\overline{18}, \overline{27}, \overline{36}, \overline{45}\} = \{A, B, C, D\}$. Výsledný čtyřstavový stroj \mathcal{S}_2 je dán v tabulce 7 a dostaneme jej z tabulky 1 tak, že ke každému stavu tabulky 1 zjistíme dvojici bloků rozkladů π_3 a τ , v nichž je obsažen a vypíšeme odpovídající blok τ , v němž leží následující stav v tab. 1, do místa 7 v sloupci daném blokem rozkladu π_3 a vstupem 1 a v řádku, který je dán blokem rozkladu τ , v němž leží současný stav stroje \mathcal{S} .

Tabulka 7.

\mathcal{S}_2	$a1_1$	$a1_2$	$a1_3$	$a1_4$	$a1_5$	$a1_1$	$a1_2$	$a1_3$	$a1_4$	$a1_5$
A	B	A	D	A	C	A	B	C	A	C
B	A	B	C	B	D	B	A	D	B	D
C	D	C	C	C	A	C	D	D	C	A
D	C	D	D	D	B	D	C	C	D	B

Příklad 5.7. Sřadač mod 6 z tabulky 4 můžeme rozložit na dva stroje \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 pracující paralelně, protože π_1 a π_2 mají S.P. a $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$. Ztotožněním všech čísel sřadače mod 6 do bloků v souladu s rozkladem π_2 a označením jednotlivých bloků π_2 pomocí 0 a 1 dostaneme sřadač mod 2. Podobně ztotožněním všech čísel do bloků v souladu s rozkladem π_1 a označením jednotlivých bloků π_1 pomocí 0, 1 a 2 dostaneme sřadač mod 3. Tedy sřadání dvou čísel mod 6 můžeme realizovat pomocí dvou sřadačů mod 2 a mod 3 pracujících nezávisle. To je známý výsledek z teorie čísel, který jsme obdrželi jinou cestou.

V příkladě 5.7 $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$ a $\pi_1 + \pi_2 = 1$. To znamená, že všechna informace o rozkladech π_1 a π_2 se využívá a tedy žádná informace není redundantní.

Z předchozího je vidět, že pro daný stroj \mathcal{S} souvisí rozklady π_i se S.P. s rozklady stroje \mathcal{S} na menší složkové stroje (o menším počtu stavů). Svazový diagram rozkladů π_i se S.P. stroje \mathcal{S} je velmi přehledně zapsaná informace o těchto rozkladových vlastnostech. Jestliže realizujeme vnitřní chování stroje \mathcal{S} pomocí menších strojů \mathcal{S}_i a \mathcal{S}'_j , kde stroji \mathcal{S}_i odpovídá rozklad π_i se S.P. a stroji \mathcal{S}'_j rozklad π_j se S.P. a jestliže platí $\pi_i > \pi_j$, potom stroj \mathcal{S}'_j můžeme realizovat pomocí stroje \mathcal{S}_i , který vytváří pro stroj \mathcal{S}'_j „informaci“ π_i , a doplňkového stroje \mathcal{S}_j , který na základě přiváděné „informace“ z \mathcal{S}_i určuje „informaci“ τ_j o stavu stroje \mathcal{S} takovou, že $\tau_j \cdot \pi_i = \pi_j$. Stroj \mathcal{S}'_j je dán sériovým spojením strojů \mathcal{S}_i a \mathcal{S}_j a proto určuje informaci π_j o vnitřním stavu stroje \mathcal{S} [12]. Tedy v realizaci těchto „informací“ z \mathcal{S}_i do \mathcal{S}'_j , jestliže $\pi_i > \pi_j$. Částečné uspořádání ve svazovém diagramu rozkladů se S.P. tedy ukazuje informační tok v realizaci stroje \mathcal{S} .

Příklad 5.8. Z obr. 8 je vidět, že $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$. To znamená, že vnitřní chování stroje \mathcal{S} z příkladu 5.3 můžeme realizovat paralelním spojením dvou strojů \mathcal{S}'_1 a \mathcal{S}'_2 , z kterých každý má

čtyři stavy. K zapamatování stavů strojů \mathcal{S}'_1 a \mathcal{S}'_2 potom potřebujeme čtyři paměťové elementy. Vnitřní chování stroje \mathcal{S} však můžeme realizovat výhodněji, jestliže uvážíme, že existuje společná „informace“, kterou počítají oba stroje \mathcal{S}'_1 a \mathcal{S}'_2 . Tato „informace“ je dána jako $\pi_1 + \pi_2 = \pi_3$. Informaci π_3 můžeme počítat ve stroji \mathcal{S}_3 . Potom stroj \mathcal{S} můžeme realizovat pomocí tří dvoustavových strojů $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$. K zapamatování stavů každého stroje potřebujeme jeden paměťový element. Tedy celkem potřebujeme tři paměťové elementy. Informační tok mezi stroji $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ a \mathcal{S}_4 můžeme velmi názorně vyčíst z obr. 8 nebo také z obr. 9. (\mathcal{S}'_2 je dán sériovým spojením strojů \mathcal{S}_3 a \mathcal{S}_2 a stroj \mathcal{S}'_1 je dán paralelním spojením strojů \mathcal{S}_3 a \mathcal{S}_4 .)

Vyčlenění stroje ze dvou strojů pracujících paralelně můžeme použít, kdykoliv je to možné. Maximální stroj, který je možno vyčlenit, je dán součtem rozkladů π_i , které odpovídají paralelním strojům.

(Došlo dne 12. května 1966.)

LITERATURA

- [1] Phister M.: Logical Design of Digital Computers. J. Wiley and Sons, N.Y. 1958.
- [2] Mealy G. H.: A Method for Synthesizing Sequential Circuits. Bell System Techn. J. 34 (Sept. 1955), 1045–1079.
- [3] Paull M. C., Unger S. H.: Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Functions. IRE Trans., EC-8 (Sept. 1959), 3, 356–367.
- [4] Grasselli A., Lucio F.: Method for Minimizing the Number of Internal States in Incompletely Specified Sequential Networks. IEEE Trans. EC-14 (June 1965), 3, 350–359.
- [5] Глушков В. М.: Синтез цифровых автоматов, Физматгиз, Москва 1962.
- [6] Васильева Н. П., Гашковец И. С.: Простейшие последовательностные элементы (триггеры) и реализация запоминающей части последовательностных функций на этих элементах. Автоматика и телемеханика XXV (1964), 6, 1004–1014.
- [7] Haškovec J. Š., Pilz S.: Vereinfachte Verfahren zur Berechnung der Strukturgleichungen von Folgeschaltungen. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 1 (1965), 2, 127–146.
- [8] Haškovec J. Š.: A Contribution to the Problem of Sequential Function Realization by Given Logic Elements. Stroje na zpracování informací 10. Praha 1964, 69–76.
- [9] Birkhoff G.: Lattice Theory. Americ. Math. Soc. Colloquium Publ. 25, New York 1948.
- [10] Hartmanis J.: Symbolic Analysis of a Decomposition of Information Processing Machines. Inf. and Control 3 (June 1960), 2, 154–178.
- [11] Hartmanis J.: On the State Assignment Problem for Sequential Machines I. IRE Trans. EC-10 (June 1961), 2, 157–165.
- [12] Hartmanis J.: Loop-Free Structure of Sequential Machines. Inf. and Control 5 (March 1962), 1, 25–43.
- [13] Curtis H. A.: Multiple Reduction of Variable Dependency of Sequential Machines. J. ACM 9 (July 1962), 3, 324–344.

A Synthesis of Sequential Circuits with Using General Memory Elements

RUDOLF NOVANSKÝ

The article summarizes some results from the literature for coding internal states of sequential machines, and shows their usefulness even for such sequential circuits whose memory part contains memory elements of more general types. It suggests how it is possible to obtain further simplification of the combinatorial part of a corresponding sequential circuit when suitable types of memory elements for particular state variables are used. In fact, the article connects results reached by different authors, and so it presents a suitable preparation for more detailed study of the mentioned problems which are to be the objective of my further work.

Ing. Rudolf Novanský, Výzkumný ústav matematických strojů, Praha 1, Loretské nám. 3