Kybernetika

Dimitr B. Šiškov

Минимизация конечных автоматов

Kybernetika, Vol. 8 (1972), No. 4, (297)--316

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124390

KYBERNETIKA — ТОМ 8 (1972), ВЫПУСК 4

Минимизация конечных автоматов

Д. Б. Шишков

В работе сопоставлены два подхода минимизации конечных автоматов: сокращение числа их внутренних состояний и минимизация структуры реализации автоматов. Сделан обзор методов, решающих первую задачу, а второй подход представлен оригинальным алгоритмом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблему минимизации конечных автоматов можно решать в двух направлениях:

1. Минимизация числа внутренних состояний автоматов с целью сокращения формы их записи и построения на минимальном количестве элементов памяти и

2. Минимизация автоматов с целью получения более оптимальных (по отношению определенных критериев и в первой очереди в смысле экономичности) решений в процессе их технической реализации.

Нетрудно показать, что первая постановка является более ограниченной. Тем не менее большая часть известных алгоритмов минимизации автоматов предназначалась в основном для сокращения числа их внутренних состояний и, таким образом, косвено — для уменьшения размерности задач, решаемых на разных этапах синтеза. Это, наверно, объясняется обстоятельством, что минимизация автоматов до сих пор рассматривалась прежде всего как промежуточный этап синтеза, следующий после абстрактного синтеза или анализа автоматов, цель которого формулировалась в рамках соответствующего этапа. При этом известно, что сам процесс абстрактного синтеза автоматов очень часто сочетается с процедурами минимизации их состояний [1 – 20]. Хотя и вполне корректная („безизбыточное" описание данной закономерности является естественным стремлением и традиционным математическим подходом), такая постановка содержит элемент самоцели. Он следует из сомнительного утверждения, что абстрактный автомат, который содержит наименьшее возможное число внутренних состояний, реализуется наиболее экономично. В самом деле сложность, а вместе с тем и стоимость автомата, не считая затраты на его проектирование, определяются числом и стоимостью всех технических элементов, составляющих его схемы. Практика показывает, что во многих случаях минимизация состояний абстрактного автомата не приводит к уменьшению стоимости его технической реализации. Из-за этого Хартманис и Стирнс [21] указали на „опасность" минимизации внутренних состояний автомата для следующих этапов его синтеза.

Более общей и строгой является вторая постановка задачи минимизации автоматов. Ее, вообще говоря, можно считать задачей оптимального синтеза, поскольку фактор минимальности (экономичности) один из его постоянных критериев. Алгоритмы решения задачи в таком плане (задан автомат, в общем неминимальный, требуется найти его экономичную реализацию) не публиковались.

В данной работе рассмотрены основные алгоритмы минимизации числа внутренних состояний конечных автоматов и сделаны некоторые сравнительные оценки их эффективности, а также предложен оригинальный метод минимизации автоматов на этапе их структурного синтеза.

2. МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Задача минимизации внутренних состояний конечного автомата заключается в нахождении такого автомата, эквивалентного заданному, который имеет наименьшее число состояний и наибольшее число неопределенных переходов (последное только для неполностью определенных (частичных) автоматов).

Возможность сокращения числа состояний определяется тем, что некоторые внутренние состояния автомата, обозначаемые как совместимые, можно объединять в одно состояние, не нарушая при этом закона функционирования автомата.

В настоящее время задача минимизации состояний имеет эффективное и практически приемлемое решение, когда состояния и выходы автоматов определены для любой входной последовательности. Известные алгоритмы минимизации полных автоматов [1, 2, 22–31] сводятся к перебору систем классов совместимости состояний с целью отыскания системы, содержащей минимальное число классов. Основные результаты этого подхода заложены в работах Ауфенкампа и Хона [24, 25].

Для неполностью определенных конечных автоматов, которые встречаются довольно часто на практике, задача минимизации однако еще не нашла удовлетворительного решения. Разработанные алгоритмы минимизации частичных автоматов решают задачи ограниченной сложности [31–50], а повышение их эффективности идет по пути приближенной минимизации [22, 27, 37, 51–54], разработки способов минимизации относительно определенных классов автоматов [53, 55–74] и автоматизации процесса минимизации с помощью ЭВМ [52, 54, 75–84].

Основные подходы к минимизации частичных автоматов заложены в работах Хаффмена [22], Мак-Класки [32], Гинзбурга [28, 33, 85], Поля и Ангера [34], Трошина [39], Буше [47] Грасселли и Лучио [41, 43] и Келла [49].

Один из первых методов, позволяющий решать данную проблему, является метод Хаффмена [22], который основан на выявлении и объединении совместимых внутренних состояний. Однако в случае когда эквивалентность (или псевдоэквивалентность) одних устойчивых состояний определяется через эквивалентность (или псевдоэквивалентность) других, их выявление непосредственно по таблице переходов требует проведения вычислительной работы большого объема.

Исследуя аналогию минимизации частичного автомата с минимизацией булевой функции, Мак-Класки применил свой метод минимизации булевых функций [86] для минимизации числа внутренних состояний одного из классов автоматов. Эта методика стала основой разработки ряда алгоритмов [32, 38, 43, 45, 56]. Сущность этого подхода хорошо представляется алгоритмом Саркара, Вашу и Хондхури [45]. В нем неизбыточные простые замкнутые наборы классов совместимости состояний играют такую же роль при синтезе автоматов, что и простые импликанты при синтезе комбинационных схем. В начале определяются все максимальные классы совместимости, все их простые подклассы и наборы классов. Для определения минимального покрытия строится таблица покрытия, подобная таблице покрытия простых импликант [32].

Другое направление минимизации представлено алгоритмом Гинзбурга [33, 85]. Следуя ему, Мунтян [46] разработал оригинальный алгебраический метод минимизации автоматов, с помощью которого множество состояний исходного автомата заменяется пересекающимися подмножествами состояний. При некоторых ограничениях этот метод повторяет результаты, следующие из алгоритма [33].

В методике, предложенной Полем и Ангером [34], также допускается возможность пересечения классов совместимости состояний частичных автоматов. Рациональные идеи, заложенные в ней, оказались основой дальнейших успешных работ в области минимизации автоматов [36–38, 40, 41, 43, 44, 50, 61, 87]. Эти алгоритмы позволяют найти хотя бы один минимальный автомат, не гарантируя, однако, при этом его абсолютной минимимальности.

На основании идей [32, 34] Лазарев и Пийль предложили метод минимизации частичных автоматов, использующий максимальные и немаксимальные совместимые группы с целью получения замкнутых множеств групп (в общем случае метод [32] может привести к незамкнутому множеству). Эти результаты в [88, 89] были использованы для упрощения логических схем алгоритмов (ЛСА), а в [90] — для минимизации числа внутренних состояний стохастического автомата.

Методику Поля и Ангера [34] Шмитт [44] и Камеда и Вейнер [50] распространили для минимизации недетерминированных автоматов, Грасселли и Монтанари [91] — для минизации памяти микропрограммных ЭВМ, а Мейзел [92] предложил способ минимизации, основанный на комбинации алгоритмов [34] и [38].

Трошин [39] разработал алгебраический способ минимизации частичных автоматов, который сводится к отысканию всех минимальных автоматов, пересекающиеся классы совместимости которых представляются членами минимальной дизъюнктивной нормальной формы монотонной булевой функции. Метод может быть легко сведен (через изменения логических операций) к алгебраической формализации известного метода [24, 25], т. е. к минимизации непересекающимися классами совместимости. Этот алгоритм позволяет находить абсолютно минимальные автоматы, но его применение практически возможно только для сравнительно несложных автоматов (с числом внутренних состояний $\leqq 8$).

Алгебраический способ минимизации частичных автоматов предложил и Буше [47]. В нем получение минимальных пересекающихся классов совместимости производится по таблице, аналогичной используемой в методе минимизации булевых функций, предложенном в [32]. Однако и этот метод обладает недостатком алгоритма [39] — практической непригодностью для автоматов с большим числом внутренних состояний.

В [43] Грасселли и Лучио расширили постановку задачи минимизации неполностью определенных автоматов и предложили систематический метод совместной минимизации строк и столбцов таблицы переходов в случае, когда состояния входов не закодированы предварительно. Метод заключается в определении совместных классов строк и столбцов, из которых для последующего отбора составляются только простые совместимые классы. Сам отбор равнозначен решению задачи целочисленного линейного программирования, однако можно использовать также табличные методы.

Основной особенностью метода Келла [49] является добавление к минимизируемому автомату рекурсивно новых состояний вместо того, чтобы начинать его минимизацию с множества максимально совместимых состояний, которое накрывает все его состояния. В процессе минимизации автомата по этому методу, как и в [39], можно получить все автоматы, эквивалентные заданному, с меньшим числом состояний.

Перечисленные выше методы свидетельствуют о том, что количество операций при минимизации частичных автоматов резко возрастает с увеличением их сложности. Так как задача отыскивания абсолютно минимального автомата всегда остается комбинаторной задачей [93], в [94] было высказано предположение о невозможности избежать перебора вариантов. Это оправдывает внимание к приближенным и легко программируемым алгоритмам – [27, 51] и др., тем более, что практика показывает, что обычно автомат, полученный из системы минимальных классов совместимости, близок к абсолютно минимальному автомату, нахождение которого значительно труднее [39].

Наиболее характерным представителем этого направления является алгоритм [51], представляющий упрощенный по сравнению с [34] метод нахождения минимально совместимых состояний. Алгоритм заключается в отождествлении каждой строки таблицы переходов и выходов с некоторой вершиной графа и получении графа, замкнутого по совместимости. В общем графе можно рассматривать множество полных графов, каждому из которых соответствует минимальное множество совместимых состояний. Искомому автомату соответствует минимальная система, замкнутая относительно переходов и выходов.

Направление автоматизации минимизации числа внутренних состояний автоматов пока выражается в представлении на машинных языках известных алгоритмов минимизации Ауфенкампа и Хона – в [79, 84], Поля и Ангера, Гинзбурга и Закревского [52, 75–78, 80–82]. В [54, 83] приведены результаты статистического исследования алгоритмов Поля и Ангера [34] и Закревского [75], из которых видно, что алгоритм Закревского дает выигрыш в быстродействии (результаты получены на ЭВМ М-20 с помощью программирующей системы „ЛЯПАС") и позволяет в среднем получать большее сокращение числа состояний.

Обобщая изложенное, можно указать на следующие основные недостатки принципиального харкатера существующих методов минимизации числа состояний автоматов:

1. Не позволяют оценить целесообразность минимизации числа состояний с точки зрения последующих этапов синтеза автоматов и, прежде всего, по отношению оптимальности их технической реализации.

2. Имеют низкую эффективность: являются громоздкими (связаны с большим перебором и значительной вычислительной работой), обеспечивают невысокую точность при минимизации числа состояний неполностью определенных автоматов и т. д.

3. Не имеют активного характера – минимизация состояний частичных автоматов с большим числом состояний является нерешенной проблемой даже с применением современных ЭВМ.

На устранении хотя бы первого из перечисленных недостатков направлен предлагаемый ниже подход минимизации автоматов, проводимой на этапе их структурного синтеза.

Идея минимизации автоматов в процессе их структурного синтеза до сих пор почти не разрабатывалась, не смотря на то, что обсуждалась в ряде работ [95–97], в которых было показано, что при кодировании внутренних состояний автоматов можно проводить и их минимизацию.

В настоящей работе предлагается метод минимизации конечных автоматов на этапе их структурного синтеза. Минимизация заключается в выявлении оптимальной (по количеству функций и простоте их структуры) системе функций возбуждения и выходов из множества функций, соответствующих всем неэквивалентным способам кодирования состояний автомата. Целью минимизации является получение системы функций возбуждения и выходов, описывающих заданный автомат, имеющей наиболее экономичную реализацию.

Пусть заданный автомат определен на множествах внутренних $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, где a_0 – начальное состояние автомата, входных $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ и выходных $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{p-1})$ состояний автомата и функциями переходов и выходов – $\delta(a, x)$ и $\lambda(a, x)$ соотвественно. Допустим, что каждый элемент множества A будем кодировать при помощи набора элементов некоторого конечного альфавита $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_k)$, где $k \geqq]\log_2 n[$. Все переменные альфавитов X, Y и Q – двоичные.

Положим, что в множестве внутренних состояний автомата нет совместимых состояний. Тогда требование однозначности кодирования внутренних состояний фиксирует минимальную длину кода для их разметки – $k_{\min} =]\log_2 n[$. Следовательно, заданный автомат может быть выполнен на не менее, чем на $k_{\min}$ элементарных автоматах, т. е. представлен $k_{\min}$ функциями возбуждения – $q_1, q_2, \ldots, q_{k_{\min}}$, для которых произведение соответствующих разбиений

$$r_1 \,.\, r_2 \ldots r_{k_{\min}} = \prod_{i=1}^{k_{\min}} r_i = 0\,. \tag{1}$$

Соотношение (1) следует понимать в следующем смысле: блоки произведения разбиений r_i и r_j являются элементами множества пересечений каждого блока r_i с каждым блоком r_j; а $r_i \,.\, r_j = 0$, если каждый блок произведения разбиения r_i и r_j содержит только один элемент. Здесь $r_i = \{A_0^i, A_1^i\}$ – двоичное разбиение, в котором A_0^i и A_1^i – подмножества внутренних состояний автомата, закодированных нулевым и единичным состоянием элементарного автомата Q_i соответственно, имеющего функцию возбуждения q_i (в общем случае, когда элементарный автомат Q_i имеет несколько бинарных входов, его функция возбуждения будет представлена соответствующим числом составных функций возбуждения).

Если автомат не имеет совместимых состояний, задача его минимизации в указанном смысле совпадает с задачей экономичного кодирования состояний автомата [98]. Поэтому далее ограничимся рассмотрением случая, когда заранее известно, что заданный автомат является неминимальным. Это означает, что существует возможность уменьшения размерности множества внутренних состояний автомата — n до некоторой величины $h < n$, т. е. для описания этого автомата достаточны $k'_{\min} =]\log_2 n[\leqq k_{\min}$ функций возбуждения. Из этого следует, что при выборе оптимальной системы функций возбуждения из системы, содержащей все неэквивалентные функции возбуждения, выполнение условия (1) необязательно, так как совместимым состояниям могут быть присвоены одинаковые коды. Тогда для неминимальных автоматов условие (1) может быть заменено выражением

$$(2) \qquad r_1 \cdot r_2 \dots r_{k'_{\min}} = \prod_{i=1}^{k'_{\min}} r_i \geqq 0 \, .$$

Зависимость (2) является более общей, чем (1), и ее применение при кодировании внутренних состояний автоматов позволяет решать одновременно и задачу минимизации их числа. Однако для того, чтобы блоки разбиения (2) включали только совместимые состояния, необходимо и достаточно, чтобы выбранная система функций возбуждения и выходов $q_1, q_2, \dots, q_{k'_{\min}}, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}$ зависела только от входных сигналов $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ и выходов элементарных автоматов $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k'_{\min}}$. Следовательно, задача минимизации числа внутренних состояний автомата будет заключаться в отыскании системы функций возбуждения и выходов, для которой $k'_{\min} =]\log_2 h[<]\log_2 n[= k_{\min}$, а задача получения минимальной системы — в выделении такой системы, которая имеет самую низкую цену (при этом выполнение условия $k = k_{\min}$ необязательно).

Вообще говоря, в данной постановке минимизация автоматов зависит от типов используемых элементарных автоматов.

На основании изложенного можно сформулировать следующий алгоритм минимизации автоматов.

1. В соответствии с табл. 1, составляются канонические функции возбуждения и выходов автомата $q_i = q_i(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, M_0, M_1, \dots, M_{n-1})$, $y_j = y_j(x_0, x_1, \dots$ $\dots, x_{m-1}, M_0, M_1, \dots, M_{n-1})$, соответствующие всем неэквивалентным двоичным разбиениям его состояний и типам выбранных элементарных автоматов; M_k — конституента единицы, соответствующая коду, присовенному k-тому внутреннему состоянию автомата; F_k — единичная функция автомата, описывающая его переходы относительно его состояния a_k, а символом $\sum^0$ обозначена сумма по модулю 2; $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$; $j = 1, 2, \dots, p - 1$.

2. Полученные канонические функции выражаются в абсолютно минимальной дизъюнктивно нормальной форме при помощи зависимости

$$(3) \qquad \bigvee_{k \in A} M_k = M_{l_1} \vee M_{l_2} \vee \dots \vee M_{l_h} = \tilde{Q}_j \, ,$$

где $\tilde{Q}_j = Q_j$, если $\{l_1, l_2, \dots, l_h\} = A_1^j$; $\tilde{Q}_j = \bar{Q}_j$, если $\{l_1, l_2, \dots, l_h\} = A_0^j$ и $\tilde{Q}_j = 1$, если $\{l_1, l_2, \dots, l_h\} = A_1^j \cup A_0^j = A$.

Табл. 1.

Тип (элементарного) автомата	Единичная функция возбуждения (выхода)	Переходы (состояния), содержащиеся в единичной функции возбуждения (выхода)	Функция возбуждения (выхода)	Примечание*
Элемент задержки	F_k	Заходящие и петлевые переходы	$q_i = \bigvee_{k \in A_1{}^i} F_k$	—
Триггер с раздельными входами	F_k	Заходящие и петлевые переходы	$q_{0i} = \bigvee_{k \in A_0{}^i} F_k \oplus \sum_{l \in A_0{}^i}^{0} gX_jM_l$ $q_{1i} = \bigvee_{k \in A_1{}^i} F_k \oplus \sum_{l \in A_1{}^i}^{0} gX_jM_l$ где $X_{jM_l} \subset F_k$	Все петлевые переходы разметить неопределенным коэффициентом $g = 0$ или 1.
Триггер с тремя входами	F_k	Заходящие и петлевые переходы	$q_{0i} = \bigvee_{k \in A_0{}^i} F_k$ $q_{1i} = \bigvee_{k \in A_1{}^i} F_k$	Все переходы разметить неопределенным коэффициентом $g = 0$ или 1. Коэффициенты в одинаковых импликантах функции q_{si} и q_{0i}, а также q_{si} и q_{1i} должны быть ортогональными.
	F_{sk}	Заходящие и исходящие переходы	$q_{si} = \sum_{k \in A_1{}^i}^{0} F_{sk}$	
Триггер со счетным входом	F_{sk}	Заходящие и исходящие переходы	$q_{si} = \sum_{k \in A_1{}^i}^{0} F_{sk}$	—
Триггер с дублированными переходами	F_k	Заходящие исходящие и петлевые переходы	$q_{0i} = \sum_{k \in A_1{}^i}^{0} F_k$ $q_{1i} = \sum_{k \in A_1{}^i}^{0} F_k$	Все петлевые и исходящие переходы разметить неопределенным коэффициентом $g = 0$ или 1.
Мили	Ψ_j	Все переходы, отмеченные выходным сигналом y_j	$z_i = \bigvee_{j \in A_1{}^i} \Psi_j$	—
Мура	Ψ_j	Все состояния, отмеченные выходным сигналом y_j	$z_i = \bigvee_{j \in A_1{}^i} \Psi_j$	—

* Все неопределенные переходы частично определенных автоматов нужно разметить неопределенным коэффициентом $g = 0$ или 1.

3. Экономичная система функций возбуждения и выходов автомата выбирается по критериям

(4) $$\sum_{i=1}^{k} b_i = B_{\min},$$

(1) и

(5) $$\sum_{i=1}^{k} c_i = C_{\min},$$

где b_i — оценка сложности технических средств (в условных единицах), необходимых для реализации i-ой функции, c_i — число неявных аргументов i-ой функции, а B и C — некоторые целые положительные числа.

Примечание. Неявные аргументы функции следует понимать в следующем смысле. Пусть $q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{ik}$ — экономичная система функций возбуждения. Аргументами этих функций должны являться переменные $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_k}$ и входные сигналы $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$. В общем случае однако выбранная экономичная система будет содержать и неявные аргументы Q_j, где $j \neq i_l$ ($l = 1, 2, \ldots, k$). Эти аргументы должны быть представлены в явном виде — как соответствующие булевые функции переменных $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_k}$.

4. Проводится минимизация экономичной системы, состоящая в сокращении числа функций автомата за счет функций возбуждения тех элементарных автоматов, выходы которых не являются существенными аргументами:

а) функций выходов автомата и

б) функций возбуждения тех элементарных автоматов, выходы которых участвуют в качестве существенных аргументов функции выходов автомата.

Примечание. Более строго п. 4 приведенного алгоритма можно выразить следующим образом.

Пусть экономичная система функций возбуждения и выходов представлена следующей системой функции:

(6)
$$\begin{aligned}
q_1 &= q_1(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, G_i^{q_1}), \\
q_2 &= q_2(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, G_i^{q_2}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_k &= q_k(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, G_i^{q_k}), \\
y_0 &= y_0(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, G_i^{y_0}), \\
y_1 &= y_1(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, G_i^{y_1}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{p-1} &= y_{p-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, G_i^{y_{p-1}}),
\end{aligned}$$

где $G_i^{q_j(y_e)}$ ($j = 1, 2, \ldots, k$, $l = 1, 2, \ldots, p-1$) — некоторое подмножество выходов элементарных автоматов, являющихся существенными аргументами функции $q_i(y_l)$.

Необходимое условие, чтобы функция q_t $(t = 1, 2, \ldots, k)$ заданной экономичной системы (6) являлась „лишней" можно представить зависимостью

$$Q_t \not\subset \left(\bigcup_{l=0}^{p-1} G_i^{y_l} \right), \tag{7}$$

с помощью которой можно выделить некоторое подмножество (в частном случае пустое) „лишних" функций $q_{t_1}, q_{t_2}, \ldots, q_{t_s}$.

Достаточное условие, чтобы функция q_{t_e} была „лишней" выражается соотношением

$$Q_t \not\subset \left(\bigcup_{j=1}^{n} G_i^{q_j} \setminus \bigcup_{e=1}^{s} G_i^{q_{t_e}} \right), \tag{8}$$

где $e = 1, 2, \ldots, s$, а выражение $\left(\bigcup_{j=1}^{n} G_i^{q_j} \setminus \bigcup_{e=1}^{s} G_i^{q_{t_e}} \right)$ следует понимать как объединение всех подмножеств $G_i^{q_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ за исключением подмножества $G_i^{q_{t_e}}$ $(e = 1, 2, \ldots, s)$ функций $q_{t_1}, q_{t_2}, \ldots, q_{t_s}$, для которых выполнено условие (7).

Предложенный алгоритм проиллюстрируем несколькими характерными примерами.

Пример 1. Проведем минимизацию полностью определенного автомата Мура, заданного таблицей переходов и выходов (табл. 2). Требуется минимальная реализация автомата на элементах задержки.

Табл. 2.

Внутренние состояния / Входные сигналы	1	2	3	4	5	6
$\bar{x}$	2	1	4	3	6	5
x	6	6	2, y_1	2, y_1	4	4

1. Выписывая на основании табл. 1 все заходящие и петлевые переходы заданного автомата (табл. 2), получаем его единичные функции возбуждения и выхода:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \bar{x}M_2\,, \\
F_2 &= \bar{x}M_1 \vee x(M_3 \vee M_4)\,, \\
F_3 &= \bar{x}M_4\,, \\
F_4 &= \bar{x}M_3 \vee x(M_5 \vee M_6)\,, \\
F_5 &= \bar{x}M_6\,, \\
F_6 &= \bar{x}M_5 \vee x(M_1 \vee M_2)\,, \\
\Psi_1 &= x(M_3 \vee M_4)\,.
\end{aligned}$$

Табл. 3.

$i(j)$	$r_{i(j)} = \{A_0^{i(j)}, A_1^{i(j)}\}$	$q_i = \bigvee_{k \in A_1^i} F_k (y_j = \Psi_j)$	
		Пример 1	Пример 2
1	$\{\overline{1, 2}; \overline{3, 4, 5, 6}\}$	$xQ_1 \vee xQ_{10}$	$x_1 \vee x_2 \vee x_3Q_1 \vee x_4Q_1$
2	$\{\overline{1, 3}; \overline{2, 4, 5, 6}\}$	$x \vee Q_7$	$x_1Q_{5,6,\overline{14},\overline{15},\overline{16},24,25} \vee x_2Q_{1,3,5,11,17,19,24} \vee x_3\overline{Q}_{8,11,24} \vee x_4\overline{Q}_{4,9,12,14,17,21,23}$
3	$\{\overline{1, 4}; \overline{2, 3, 5, 6}\}$	$\bar{x}\overline{Q}_6 \vee x\overline{Q}_{15}$	$x_1 \vee x_2 \vee x_3\overline{Q}_{8,11,24} \vee x_4\overline{Q}_{5,8,11,13,19,22,24}$
4	$\{\overline{1, 5}; \overline{2, 3, 4, 6}\}$	$x \vee \overline{Q}_9$	$x_1Q_{1,\bar{7},\bar{8},12,17,18,22} \vee x_2 \vee x_3Q_4 \vee x_4$
5	$\{\overline{1, 6}; \overline{2, 3, 4, 5}\}$	$\bar{x}\overline{Q}_8 \vee Q_1$	$x_1Q_{2,9,\overline{10},\overline{11},\overline{19},20,21} \vee x_2\overline{Q}_5 \vee x_3\overline{Q}_{8,11,14} \vee x_4$
6	$\{\overline{1, 4, 5, 6}; \overline{2, 3}\}$	$\bar{x}\overline{Q}_3 \vee xQ_{10}$	$x_1\overline{Q}_6 \vee x_2\overline{Q}_{1,3,5,11,17,19,24} \vee x_3Q_{4,14,18,21} \vee x_4\overline{Q}_{5,8,11,13,19,22,24}$
7	$\{\overline{1, 3, 5, 6}; \overline{2, 4}\}$	$\bar{x}\overline{Q}_2 \vee xQ_1$	$x_3Q_{4,14,18,21} \vee x_4\overline{Q}_{4,5,12,14,18,21,23}$
8	$\{\overline{1, 3, 4, 6}; \overline{2, 5}\}$	$\bar{x}\overline{Q}_5 \vee xQ_{10}$	$x_1Q_8 \vee x_3\overline{Q}_8 \vee x_4\overline{Q}_{1,2,3,15,16,17,20}$
9	$\{\overline{1, 3, 4, 5}; \overline{2, 6}\}$	$\bar{x}\overline{Q}_4 \vee xQ_{15}$	$x_1\overline{Q}_9 \vee x_2Q_{1,3,5,11,17,19,24} \vee x_3Q_{4,14,18,21} \vee x_4Q_{1,2,3,15,16,17,20}$
10	$\{\overline{1, 2, 5, 6}; \overline{3, 4}\}$	$\bar{x}Q_{10} \vee xQ_{15}$	$x_1Q_{\bar{5},\bar{6},14,15,16,\overline{24},\overline{25}} \vee x_2\overline{Q}_{1,3,5,11,17,19,24} \vee x_4Q_{1,2,3,15,16,17,20}$
11	$\{\overline{1, 2, 4, 6}; \overline{3, 5}\}$	$\bar{x}Q_{14}$	$x_1\overline{Q}_{11} \vee x_2\overline{Q}_{11} \vee x_3\overline{Q}_{1,2,16} \vee x_4Q_{4,9,12,14,18,21,23}$
12	$\{\overline{1, 2, 4, 5}; \overline{3, 6}\}$	$\bar{x}Q_{13} \vee x\overline{Q}_1$	$x_1Q_{12} \vee x_2 \vee x_4Q_{12}$
13	$\{\overline{1, 2, 3, 6}; \overline{4, 5}\}$	$\bar{x}Q_{12} \vee xQ_{15}$	$x_1Q_{\bar{1},7,8,12,\overline{17},\overline{18},22} \vee x_3\overline{Q}_{1,2,16} \vee x_4Q_{13}$
14	$\{\overline{1, 2, 3, 5}; \overline{4, 6}\}$	$\bar{x}Q_{11} \vee x\overline{Q}_{10}$	$x_1Q_{\bar{2},9,10,11,19,\overline{20},\overline{21}} \vee x_2Q_{1,3,5,11,17,19,24} \vee x_4Q_{5,8,11,13,15,22,24}$
15	$\{\overline{1, 2, 3, 4}; \overline{5, 6}\}$	$\bar{x}Q_{15} \vee x\overline{Q}_1$	$x_1\overline{Q}_{15} \vee x_2Q_{1,3,5,11,17,19,24} \vee x_3\overline{Q}_{1,2,16}$
16	$\{\overline{1, 2, 3}; \overline{4, 5, 6}\}$	$\bar{x}Q_{17} \vee x\overline{Q}_{10}$	$x_1\overline{Q}_{16} \vee x_2Q_{1,3,5,11,17,19,24} \vee x_3\overline{Q}_{15} \vee x_4Q_{5,8,11,13,19,22,24}$
17	$\{\overline{1, 2, 4}; \overline{3, 5, 6}\}$	$\bar{x}Q_{16} \vee x\overline{Q}_1$	$x_1 \vee x_2 \vee x_3\overline{Q}_{1,2,16} \vee x_4Q_{4,9,12,14,18,21,23}$
18	$\{\overline{1, 2, 5}; \overline{3, 4, 6}\}$	$\bar{x}Q_{19} \vee x\overline{Q}_{10}$	$x_1Q_{18} \vee x_2 \vee x_4Q_{1,2,3,15,16,17,20}$
19	$\{\overline{1, 2, 6}; \overline{3, 4, 5}\}$	$\bar{x}Q_{18} \vee x\overline{Q}_{15}$	$x_1\overline{Q}_{19} \vee x_2\overline{Q}_{19} \vee x_3\overline{Q}_{1,2,16} \vee x_4Q_{1,2,3,15,16,17,20}$
20	$\{\overline{1, 3, 4}; \overline{2, 5, 6}\}$	$\bar{x}\overline{Q}_{25} \vee x\overline{Q}_{15}$	$x_1Q_{5,6,\overline{14},\overline{15},\overline{16},24,25} \vee x_2Q_{1,3,5,11,17,19.24} \vee x_3\overline{Q}_{8,11,24} \vee x_4Q_{20}$
21	$\{\overline{1, 3, 5}; \overline{2, 4, 6}\}$	$x \vee \overline{Q}_{21}$	$x_1\overline{Q}_{21} \vee x_2Q_{1,3,5,11,17,19,24} \vee x_3Q_{21} \vee x_4\overline{Q}_{21}$
22	$\{\overline{1, 3, 6}; \overline{2, 4, 5}\}$	$\bar{x}Q_{22} \vee xQ_1$	$x_1Q_{22} \vee x_3\overline{Q}_{8,11,24} \vee x_4\overline{Q}_{4,9,12,14,18,21.23}$
23	$\{\overline{1, 4, 5}; \overline{2, 3, 6}\}$	$\bar{x}\overline{Q}_{23} \vee x\overline{Q}_{15}$	$x_1Q_{1,\bar{7},\bar{8},12,17,18,\overline{22}} \vee x_2 \vee x_3Q_{4,14,18,21} \vee x_4\overline{Q}_{5,8,11,13,19,22,24}$
24	$\{\overline{1, 4, 6}; \overline{2, 3, 5}\}$	$\bar{x}\overline{Q}_{24} \vee xQ_{10}$	$x_1Q_{2,9,\overline{10},\overline{11},\overline{19},20,21} \vee x_2\overline{Q}_{24} \vee x_3Q_{24} \vee x_4\overline{Q}_{24}$
25	$\{\overline{1, 5, 6}; \overline{2, 3, 4}\}$	$\bar{x}Q_{20} \vee xQ_1$	$x_1\overline{Q}_{25} \vee x_2\overline{Q}_{1,3,5,11,17,19,24} \vee x_3Q_{4,14,18,21} \vee x_4$
(1)	$\{\bar{0}; \bar{1}\}$	xQ_{10}	$x_2\overline{Q}_{2,8,13,15,16,20,22} \vee x_3\overline{Q}_{3,15,17,20} \vee x_4$

2. Следуя табл. 1, и при помощи зависимости (3) образуем все канонические функции возбуждения и выходов автомата в абсолютно минимальной дизъюнктивной нормальной форме — см. табл. 3 (пример 1).

3. Выполняя критерии (4) и (5) по методике, предложенной в [98], находим экономичную систему функций автомата:

$$q_{21} = F_2 \vee F_4 \vee F_6 = \bar{x}M_1 \vee x(M_3 \vee M_4) \vee \bar{x}M_3 \vee xM(_5 \vee M_6) \vee$$
$$\vee \bar{x}M_5 \vee x(M_1 \vee M_2) =$$
$$= \bar{x}(M_1 \vee M_3 \vee M_5) \vee x(M_1 \vee M_2 \vee M_3 \vee M_4 \vee M_5 \vee M_6) =$$
$$= (M_1 \vee M_3 \vee M_5) \vee x = x \vee \bar{Q}_{21} ,$$
$$q_{10} = \bar{x}Q_{10} \vee xQ_{15} ,$$
$$q_{15} = \bar{x}Q_{15} \vee x\bar{Q}_1 ,$$
$$y_1 = xQ_{10} ,$$

где зависимой переменной является Q_1. Определяем Q_1 как функцию от аргументов Q_{10}, Q_{15} и Q_{21} (см. табл. 4): $Q_1 = Q_{10}Q_{15}$.

Табл. 4.

Аргументы / Внутренние состояния	Q_{10}	Q_{15}	Q_{21}	Неявный аргумент $\bar{Q}_1$
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	1	0	0	0
4	1	0	1	0
5	0	1	0	0
6	0	1	1	0

4. Минимизируем выделенную систему. Нетрудно заметить, что выход элемента задержки Q_{21} не участвует в формировании выходного сигнала y_1 и не является аргументом функций q_{10} и q_{15}. Следоватеьлно, минимальная замкнутая система функций заданного автомата состоит из функций q_{10}, q_{15} и y_1.

Выполненное при этом совмещение внутренних состояний автомата можно определить из произведения разбиений r_{10} и r_{15} —

$$r_{10} \cdot r_{15} = \{\overline{3, 4};\ \overline{1, 2, 5, 6}\} \cdot \{\overline{5, 6};\ \overline{1, 2, 3, 4}\} = \{\overline{1, 2};\ \overline{3, 4};\ \overline{5, 6}\} .$$

Легко проверить, что полученное совмещение совпадает с совмещением состояний, следующим из [24, 25], а система q_{10}, q_{15}, y_1 — с экономичной системой минимизированного по [24, 25] автомата, выполненного на элементах задержки.

Пример 2. Получим минимальную систему функций возбуждения и выхода частичного автомата Мили, заданного табл. 5. Требуется экономичная реализация автомата на элементах задержки.

Табл. 5.

Внутренние состояния / Входные сигналы	1	2	3	4	5	6
x_1	—	5	6	—	—	3
x_2	$3, y_1$	—	$6, y_1$	—	6	—
x_3	$5, y_1$	—	—	$2, y_1$	1	2
x_4	$2, y_1$	—	—	—	$4, y_1$	$3, y_1$

Следуя табл. 1 и табл. 5, составляем систему единичных функций автомата:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= x_3[M_5 \vee g(M_2 \vee M_3)]\,,\\
F_2 &= x_3[M_4 \vee M_6 \vee g(M_2 \vee M_3)] \vee x_4[M_1 \vee g(M_2 \vee M_3 \vee M_4)]\,,\\
F_3 &= x_1[M_6 \vee g(M_1 \vee M_4 \vee M_5)] \vee x_2[M_1 \vee g(M_2 \vee M_4 \vee M_6)] \vee\\
&\quad \vee x_4[M_6 \vee g(M_2 \vee M_3 \vee M_4)]\,,\\
F_4 &= x_4[M_5 \vee g(M_2 \vee M_3 \vee M_4)]\,,\\
F_5 &= x_1[M_2 \vee g(M_1 \vee M_4 \vee M_5)] \vee x_3[M_1 \vee g(M_2 \vee M_3)]\,,\\
F_6 &= x_1[M_3 \vee g(M_1 \vee M_4 \vee M_5)] \vee x_2[M_3 \vee M_5 \vee g(M_2 \vee M_4 \vee M_6)]\,,\\
\Psi_1 &= x_2[M_1 \vee M_3 \vee g(M_2 \vee M_4 \vee M_6)] \vee x_3[M_1 \vee M_4 \vee g(M_2 \vee M_3)] \vee\\
&\quad \vee x_4[M_1 \vee M_4 \vee M_6 \vee g(M_2 \vee M_3 \vee M_4)]\,.
\end{aligned}
$$

С помощью табл. 1 и соотношения (3) получаем канонические функции возбуждения и выходов автомата в абсолютно минимальной дизъюнктивной нормальной форме — табл. 3 (пример 2).

Анализируя полученные функции согласно критериям (4) и (5), нетрудно найти минимальную замкнутую систему

$$
\begin{aligned}
q_1 &= x_3\bar{Q}_1 \vee x_4 Q_1 \vee x_1 \vee x_2\,,\\
q_{15} &= x_1\bar{Q}_{15} \vee x_2\bar{Q}_1 \vee x_3 Q_1\,,\\
y_1 &= x_2\bar{Q}_{15} \vee x_3\bar{Q}_{15} \vee x_4\,,
\end{aligned}
$$

которой соответствует вариант совмещения состояний

$$r_1 \,.\, r_{15} = \{\overline{1,2};\ \overline{3,4,5,6}\}\,.\,\{\overline{3,4};\ \overline{1,2,5,6}\} = \{\overline{1,2};\ \overline{3,4};\ \overline{5,6}\}\,.$$

Отметим, что минимизация числа внутренних состояний рассматриваемого автомата приводит в [34] к одному минимальному автомату, в [99] — к двум, а в [39] — к пяти вариантам минимальных автоматов.

Пример 3. Следуя предложенному алгоритму, нетрудно показать, что экономичная система функций возбуждения и выхода полностью определенного автомата Мура, заданного табл. 6

Табл. 6.

Выходные сигналы	0	1	1	0	0	1	1
Внутренние состояния / Входные сигналы	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{x}$	1	5	4	1	7	5	4
x	2	3	2	2	6	7	6

и выполненного на элементах задержки —

$$y_1 = Q_1$$

$$q_1 = x \vee Q_2 ,$$

$$q_2 = \bar{x}Q_3 ,$$

$$q_3 = x\bar{Q}_3 ,$$

реализуется проще, чем функции возбуждения и выхода того же автомата, число внутренних состояний которого минимизировано (табл. 7 — [26]) —

$$q_1 = \bar{Q}_1 Q_2 \vee x ,$$

$$q_2 = \bar{x}\bar{Q}_1 Q_2 \vee Q_1 \bar{Q}_2 ,$$

$$y_1 = Q_2 .$$

Табл. 7.

Выходные сигналы	0	1	0	1
Внутренние состояния / Входные сигналы	1	2	3	4
$\bar{x}$	1	3	4	1
x	2	4	2	2

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было показано, сформулированный алгоритм дает возможность в ряде случаев более точно и направленно находить оптимальные реализации конечных автоматов, чем это производится с помощью известных методов минимизации внутренних состояний автоматов. Этот подход позволяет получать также минимальные технические реализации автоматов, заданных в безизбыточной форме, но которые следуют из некоторого неминимального представления (при наличии лишних внутренних состояний) данного автомата, получаемого в процессе самого синтеза. Для этого достаточно выбрать в качестве исходной системы канонических функций возбуждения автомата систему, соответствующую всем неэквивалентным разбиениям внутренних состояний автомата, и на нее распространить установленный критерий оптимальности. Алгоритм применим и в случаях, когда в процессе оптимального синтеза требуется удовлетворение комплекса критериев – отсутствие гонок, учет реальных ограничений технических элементов и др. Его недостатком принципиального характера, однако, является резкое нарастание объема вычислительной работы с увеличением числа внутренних состояний автомата, которое делает его в чистом виде пригодным для минимизации сравнительно простых автоматов. Предложенный алгоритм может быть использован и при минимизации сложных автоматов с применением декомпозиционных методов [93, 100], причем в последнем случае декомпозиционные разбиения должны выбираться с учетом накрытия состояний, отмеченных одинаковыми выходными сигналами, а также для решения подобных задач при помощи ЭВМ.

(Поступила в редакцию 7 сентября 1970 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Глушков: Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, Москва 1962.

[2] Н. Е. Кобринский, Б. А. Трахтенброт: Введение в теорию конечных автоматов. Физматгиз, Москва 1962.

[3] Ю. И. Янов: О тождественных преобразованиях регулярных выражений. Доклады АН СССР *147* (1962), 2, 327–330.

[4] C. D. Popovici: Utilizarea grafurilor pentru obţinerea schemei cu un unmăr minim de relee. Studii şi cercetări mat. Acad. RPR (1962), 4, 553–563.

[5] В. М. Глушков: О минимизации микропрограмм. Известия АН СССР, Техническая кибернетика (1964), 1, 3–8.

[6] Л. В. Мацевитий: Алгоритм минимизации схем микропрограмм. Известия АН СССР, Техническая кибернетика (1964), 1, 9–19.

[7] В. Г. Лазарев: Матричный метод минимизации схем микропрограмм. Известия АН СССР, Техническая кибернетика (1965), 2, 35–42.

[8] В. М. Глушков: Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. Кибернетика (1965), 5, 1–10.

[9] В. М. Глушков: К вопросу о минимизации микропрограмм и схем алгоритмов. Кибернетика (1966), 5, 1–4.

[10] Т. Я. Бучма, В. И. Карташев: Автоматизация получения наилучшего объединения микропрограммных автоматов. Теория дискретных автоматов. Зинатне, Рига 1967, 55—62.

[11] В. П. Кутепов: О тождественных преобразованиях регулярных выражений. Цифровая вычислительная техника и программирование, вып. 2. Советское радио, Москва 1967, 138–143.

[12] Gr. C. Moisil: Théorie structurelle des automates finis. Gauthier-Villars, Paris 1967.
[13] I. M. Havel: The Theory of Regular Events I. Kybernetika *5* (1969), 5, 400—419.
[14] I. M. Havel: The Theory of Regular Events II. Kybernetika *5* (1969), 6, 520—544.
[15] Ч. А. Аскеров, Ф. И. Пепинов: Объединение операторов в логических схемах алгоритмов. Управление сетями связи и синтез управляющих устройств. Наука, Москва 1969, 34—41.
[16] В. А. Горбатов: Синтез микропрограммных автоматов по временным диаграммам их функционирования. Цифровая вычислительная техника и программирование, вып. 5. Советское радио, Москва 1969, 192—202.
[17] Л. А. Кузнецов, В. Л. Патрикеев: Минимизация матричных схем Янова. Кибернетика (Луганск. отд.), Тр. семинара, вып. 2, Киев 1969, 59—65.
[18] В. Л. Патрикеев: Минимизация операторных схем Янова. Техническая кибернетика, вып. 6, Киев 1970, 72—81.
[19] В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников: О преобразовании первичной таблицы переходов. Автоматика и телемеханика (1970), 5, 204—206.
[20] В. Н. Гребенщиков: Комбинированный метод синтеза конечных автоматов. Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика *13* (1970), 11, 1736—1740.
[21] J. Hartmanis, R. E. Stearns: Some Dangers in State Reduction of Sequential Machines. Information and Control *5* (1962), 4, 252—260.
[22] D. A. Huffmann: The Synthesis of Sequential Switching Circuits. J. Frank. Inst., *257* (1954), 3, 4, 161—190, 275—303.
[23] G. H. Mealy: A Method for Synthesising Sequential Machines, B.S.T.J. *34* (1955), 5, 1045—1079.
[24] D. D. Aufenkamp, F. E. Hohn: Analysis of Sequential Machines. IRE Trans. Electr. Comput. *6* (1957), 6, 276—283.
[25] D. D. Aufenkamp: Analysis of Sequential Machines. IRE Trans. Electr. Comput. *7* (1958), 2, 299—306.
[26] M. Phister: Logical Design of Digital Computers. John Willey and Sons, New York 1958.
[27] A. Gill: Introduction to the Theory of Finite State Machines. McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York 1962.
[28] S. Ginsburg: An Introduction to Mathematical Machine Theory. Reading Mass. Addison-Wesley 1962.
[29] В. Г. Лазарев, Е. И. Пийль: Уменьшение числа состояний одного класса конечных автоматов. Доклады АН СССР *143* (1962), 5, 1064—1066.
[30] A. Železnikar: Ekvivalentnost i minimizacija apstraktnih automata. Automatika (1965), 2, 3, 133—141.
[31] P. E. Wood: Switching Theory. McGraw Hill, New York 1968.
[32] E. J. McCluskey: Minimum State Sequential Circuits for a Restricted Class of Incompletely Specified Flow Tables. B.S.T.J., *41* (1962), 6, 1759—1768.
[33] S. Ginsburg: A Technique for the Reduction of a Given Machine to a Minimal State Machine. IRE Trans. Electr. Comput. *8* (1959), 3, 384—391.
[34] M. C. Paul, S. H. Unger: Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Functions. IRE Trans. Electr. Comput. 3 (1959), *8*, 356—367.
[35] R. Narasimhan: Comments on Paper: "Minimizing Incompletely Specified Sequential Switching Functions" by M. C. Paul and S. H. Unger. IRE Trans. Electr. Comput. *10* (1961), 3, 531—532.
[36] A. Grasselli: Minimal Closed Partitions for Incompletely Specified Sequential Machines. Electron-Letters (1962), 2, 191—194.
[37] В. Г. Лазарев, Е. И. Пийль: Синтез асинхронных конечных автоматов. Наука, Москва 1964.

[38] A. Grasselli, F. Luccio: A Method for Minimizing the Number of Internal States in Incompletely Specified Sequential Networks. IEEE Trans. Electr. Comput. *14* (1965), 3, 350—359.

[39] В. И. Трошин: Алгебраический способ минимизации неполностью определенных последовательностных машин. Автоматика и телемеханика *26* (1965), 2, 2176—2181.

[40] J. C. Beatty: On some Properties of the Semigroup of a Machine which Are Preserved under State Minimization. Inform. and Control *11* (1967), 3, 290—316.

[41] A. Grasselli, F. Luccio: Une methode de minimalisation du nombre des états internes des réseaux séquentiels incomplétement spécifiés. Algèbre de Boole et machines logiques. Dunod, Paris 1967.

[42] J. Gruel: Ein Beitrag zum Thema "Minimalautomaten". Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden (1968), 5, 1109—1112.

[43] А. Грасселли, Ф. Лучио: Метод совместной минимизации строк и столбцов таблицы переходов. Автоматика и телемеханика (1968), 8, 100—115.

[44] A. Schmitt: Zur Theorie der nichtdeterministischen und unvollstandigen Automaten. Computing *4* (1969), 1, 56—74.

[45] S. C. De Sarcar, A. K. Basu, A. K. Chondhury: Simplification of Incompletely Specified Flow Tables with the Help of Prime Closed Sets, IEEE Trans. Comput. *18*, (1969), 10, 953—956.

[46] I. Muntean: Sinteza automatelor finite cu numer minim de stări. Studii şi cercetărimat. Acad. R.S.R. *20* (1968), 1, 3—13.

[47] A. Bouchet: An Algebraic Method for Minimizing the Number of States in an Incomplete Sequential Machine. IEEE Trans. Comput. *17* (1968), 8, 795—798.

[48] U. Isphording: Ein Matrizenalgorithmus zur Minimizierzung der Schalteranzahl in Schalternetzwerken. Arch. elek. Übertrag. *24* (1970), 3, 132—138.

[49] J. Kella: State Minimization of Incompletely Specified Sequential Machines, IEEE Trans. Comput. *19* (1970), 4, 342—348.

[50] T. Kameda, P. Weiner: On the State Minimization of Nondeterministic Finite Automata. IEEE Trans. Comput. *19* (1970), 17, 617—627.

[51] Z. Kohavi: Reduction of the Number of States in Incompletely Specified Sequential Machines. Electron. Letters (1965), 7, 712—715.

[52] Ю. В. Потосин, Е. А. Бутаков: Минимизация числа сотсояний последовательностного автомата. Труды Сибирского физико-технического института при Томском государственном университете им. В. В. Куйбышева, вып. 48 (1966), 165—180.

[53] P. Hummitzsch: Zur Reduction von partiellen Automaten mit Eingangbeschrankungen. Messen-Steuern-Regeln (1968), 4, 124—129.

[54] Ю. В. Потосин: Экспериментальная оценка одного метода минимизации числа состояний дискретного автомата. Сб. „Проблемы синтеза цифровых автоматов". Наука, Москва 1967, 101—107.

[55] В. П. Диденко: О методах минимизации и построении мостиковых структур релейных устройств. Автомат. регулирование и управление. АН СССР, Москва 1962, 444—460.

[56] Э. Дж. Мак-Класки: Многократные схемы с минимальным числом состояний для ограниченного класса неполностью определенных таблиц переходов. Теория конечных и вероятностных автоматов. Наука, Москва 1965, 362—371.

[57] В. Г. Лазарев: Матричный метод минимизации схем микропрограмм. Известия АН СССР, Техническая кибернетика (1965), 2, 35—42.

[58] А. А. Летичевский: О минимизации конечных автоматов. Кибернетика (1966), 1, 20—24.

[59] О. В. Медведев: Минимизация числа состояний последовательностной машины при входных последовательностях, не содержащих двух одинаковых символов подряд. Автоматика и телемеханика (1966), 5, 117—124.

[60] Э. А. Якубайтис, А. Ю. Гобземис, В. Г. Горбец, Г. Ф. Фринцович: Минимизация объема

памяти последовательностных логических схем. Автоматика и вычислительная техника, 12. Зинатне, Рига 1966.

[61] M. C. Paul, G. A. Waldbaum: A Note on State Minimization of Asynchronous Sequential Functions. IEEE Trans. Electr. Comput. *16* (1967), 1, 94—97.

[62] М. А. Спивак: К минимизации автоматов Мура. Кибернетика (1967), 1, 5—6.

[63] А. Ю. Гобземис: Минимизация числа промежуточных переменных при синтезе последовательностных асинхронных логических схем. Теория дискретных автоматов. Зинатне, Рига 1967.

[64] Г. Ф. Фринцович: Способ задания и распознавания эквивалентных устойчивых состояний последовательностных асинхронных логических схем. (ПАЛС). Теория дискретных автоматов. Зинатне, Рига 1967, 141—156.

[65] Б. Г. Миркин: Минимизация последовательностных машин относительно регулярных, полных справа событий. Автоматика и телемеханика 11, (1967), 149—153.

[66] H. J. Zander: Zur Zustandsreduction ungetakteter (asynchroner) Folgeschaltungen. Elektron. Informationsverarb. und Kybernetik, *4* (1968), 4—5, 257—277, 285—300.

[67] W. S. Brainerd: The Minimalization of Free Automata. Information and Control *13* (1968), 5, 484—491.

[68] C. de Renna e Sonza: A Theorem on the Reduction of Synthesized Stochastic Machines. IEEE Trans. Comput. *18* (1969), 5, 473—474.

[69] Е. А. Гурвиц: Синтез полисинхронных дискретных устройств. Связь, Москва 1969.

[70] Д. Е. Черный: Алгебраические свойства частичных автоматов. Известия высш. учебн. заведений, Математика (1970), 2, 94—99.

[71] Г. Ф. Фринцович: Минимизация числа состояний частично определенных асинхронных конечных автоматов. Автоматика и вычислительная техника (1970), 4, 1—7.

[72] В. Т. Бардачевский, В. М. Голованевский: Минимизация структурных схем конечных цифровых автоматов, построенных на феррит-транзисторных элементах. Отбор и передача информации, Респ. межвед. сб., вып. 25 (1970), 113—117.

[73] W. Stucky, H. Walter: Minimal Linear Realization of Autonomous Automata. Information and Control *16* (1970), 1, 66—84.

[74] R. Hartenstein: Suchlistenstrukturen zur Darstellung gerichteter Graphen und deren Anwendung bei Synthese und Minimizierung spezieller endlicher Automaten. Elektr. Rechenanlagen (1970), 4, 208—216.

[75] А. Д. Закревский: Синтез последовательностных автоматов и его программирование. Применение вычислительной техники для автоматизации производства. Машгиз, Москва 1961, 525—534.

[76] W. Händler: Zur praktischen Durchführung von Reductionverfahren für Schaltwerke nach Paul, Unger und Ginsburg. Z. Colloq. Schaltkreis- und Schlatwerk- Theorie, 1961, Saarbrücken, Vortragauszüge, Basel—Studgard 1963, 107—128.

[77] А. Д. Закревский: К синтезу последовательностных автоматов. Труды Сибирского физико-технического института, вып. 40 (1961), 89—94.

[78] Е. А. Бутаков, А. Д. Закревский: Минимизации числа осстояний релейной схемы на универсальной цифровой вычислительной машине „Урал". Проблемы передачи информации, вып. 11. Наука, Москва 1962.

[79] В. М. Глушков, А. А. Летичевский, А. А. Стогный: Алгоритмическая система для автоматизации синтеза цифровых автоматов. Синтез релейных структур, Москва 1965, 342—344.

[80] Ю. В. Потосин: Алгоритмы минимизации числа состояний дискретного автомата. Логический язык для представления алгоритмов синтеза релейных устройств. Наука, Москва 1966, 301—325.

[81] Ю. В. Потосин: К минимизации числа состояний дискретного автомата. Тезисы докла-

дов Всесоюзного коллоквиума по автоматизации синтеза дискретных вычислительных устройств. Новосибирск 1966, 61—63.

[82] W. Händler: Zur Theorie endlicher Automaten. Computer, *1* (1966), 3, 173—181.

[83] Ю. В. Потосин: Экспериментальная оценка одного метода минимизации числа состояний дискретного автомата. Проблемы синтеза цифровых автоматов. Наука, Москва 1967, 101—107.

[84] I. Tomescu: Asupra problemei sintezei automatelor secvenţiale de tipul Mealy. Studii şi cercetări mat. Acad. R.S.R. *20* (1968), 5, 763—770.

[85] S. Ginsburg: On the Reduction of Superfluous States in a Sequential Machine. J.A.C.M. *6* (1959), 1, 252—282.

[86] E. J. McCluskey: Miminization of Boolean Functions. B.S.T.J. *35* (1956), 6, 1236—1249.

[87] S. H. Unger: Flow Table Simplification Some Useful Aids. IEEE Trans. Electr. Comput. *14* (1965), 3, 472—475.

[88] В. Ф. Дьяченко, В. Г. Лазарев, Г. Г. Саввин: Управление на сетях связи. Наука, Москва 1967.

[89] W. F. Djatschenko, W. G. Lasarew: Unformung logischer Algorithmenschemata und Vereinfachung der Struktur von Mikroprogramm-Automatem. Elektron. Informationsverarbeit. und Kybernetik *3* (1968), 4, 173—186.

[90] В. Г. Лазарев, В. М. Ченцов: О минимизации числа внутренних состояний стохастического автомата. Синтез дискретных автоматов и управляющих устройств. Наука, Москва 1968, 150—159.

[91] A. Grasselli, U. Montanari: On the Minimization of READ-ONLY Memories in Microprogrammed Digital Computers. IEEE Trans. Comput. *19* (1970), 11, 1111—1114.

[92] A. S. Meisel: A Note on Internal State Minimization in Incompletely Specified Sequential Networks. IEEE Trans. Electr. Comput. *16* (1967), 4, 508—509.

[93] М. А. Гаврилов: Проблемы поиска минимальных решений при синтезе структуры релейных устройств. Труды III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (техн. кибернетике). Самонастраивающиеся системы. Распознавание образцов. Релейные устройства и конечные автоматы. Наука, Москва 1967, 289—303.

[94] Техническая кибернетика, Проблемы управления и информации. Вопросы советской науки. Наука, Москва 1966.

[95] J. Hartmanis: Loop-free Structure of Sequential Machines. Information and Control *5* (1962), 2, 25—43.

[96] E. H. Faar: Lattice Properties of Sequential Machines. J.A.C.M. (1963), 3, 365—385.

[97] G. B. Gerace, G. Gestri: State Assignment for Reducing the Number of Delay Elements in Sequential Machines. Information and Control *10* (1967), 3, 223—253.

[98] Е. Н. Вавилов, Д. Б. Шишков: Об одном методе экономичного кодирования автоматов. Известия АН СССР, Техническая кибернетика (1967), 2, 104—113.

[99] М. А. Айзерман, Л. А. Гусев, Л. И. Розоноэр, И. М. Смирнова, А. А. Таль: Логика, автоматы, алгоритмы. Физматгиз, Москва 1963.

[100] Д. Б. Шишков: Декомпозиция автоматов в виде иерархических и каскадных структур. Доклады Болгарской академии наук *1* (1968), 21, 27—29.

Minimalizace konečných automatů

D. B. ŠIŠKOV

Minimalizace konečných automatů je zkoumána ze dvou hledisek a to jako minimalizace počtu vnitřních stavů automatů a jako minimalizace automatů při jejich strukturální syntéze.

V prvé části práce je uveden přehled a porovnání různých metod stavové minimalizace konečných automatů. Je poukázáno na to, že automat o minimálním počtu stavů nemusí vždy vést k minimální realizaci. Proto se v druhé části práce navrhuje získávat optimální realizaci automatu vhodným technickým návrhem, jehož cílem je získání optimálního systému budících a výstupních funkcí.

Инж. Димитър Борисов Шишков, кандидат технических наук; София-Ц, пощенска кутия 340. Болгария.