Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Kounovský

Poznámka k problému normál elipsoidu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 204--208

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124095

Poznámka k problému normál elipsoidu.

Napsal dr. Jos. Kounovský.

1. Šest pat $P_1 P_2 \dots P_6$ normál, sestrojených bodem P na středovou plochu druhého stupně, tvoří *šestiroh normálně vepsaný,* šest tečných rovin $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 \dots \mathsf{P}_6$ plochy v těchto patách resp. sestrojených *šestistěn normálně opsaný,* obdobně ku čtyrrohu normálně vepsanému a čtyřstranu normálně opsanému u kuželosečky středové.*)

Uvažovaná plocha budiž speciálně trojosý elipsoid o středu O a poloosách a, b, c. Vyznačme na osách elipsoidu eliptické involuce I_a, I_b a I_c o potencích resp. $-a^2$, $-b^2$ a $-c^2$, tedy záporných s potencemi hyperbolických involucí sdružených pólů na osách.

Buďtež $\mathsf{R} \equiv P_1P_2P_3$ a $\mathsf{S} \equiv P_4P_5P_6$ dvě protější stěny šestirohu normálně vepsaného. Obě roviny protnou elipsoid v elipsách, které protínají se na průsečnici $\mathsf{R} \,.\, \mathsf{S}$, indukujíce na ní společnou involuci sdružených pólů. Oběma takto spiatými kuželosečkami prochází celý svazek ploch druhého stupně. Svazek ploch druhého stupně protíná libovolnou přímku v družinách bodové involuce. Náš uvažovaný svazek vytíná na osách elipsoidu bodové involuce, kteréž jsou I_a, I_b a I_c, jak ukážeme.

Ježto spojnice pat dvou protínajících se normál plochy druhého stupně náleží jejímu osovému komplexu, jsou trojúhelníky $P_1P_2P_3$ a $P_4P_5P_6$ v rovinách R resp. S opsány příslušné komplexní parabole a vepsány průsečné elipse roviny s elipsoidem. Dle známého theorému Ponceletova o mnohoúhelnících současně vepsaných jedné a opsaných druhé kuželosečce existuje pak v rovině takové nekonečné množství trojúhelníků opsaných komplexní parabole a vepsaných průsečné elipse s elipsoidem, t. j. trojúhelníků, jichž strany jsou paprsky osového komplexu elipsoidu. Normály sestrojené ve vrcholech takového trojúhelníka na elipsoid protínají se po dvou a tedy stýkají se všechny tři v jednom *bodě trinormálně sdruženém* k rovině trojúhelníka.

---

*) „Poznámka ku křivosti a problému normál kuželoseček středových“, 2. čís. roč. XLIII. tohoto časop.

Má-li tedy rovina bod trinormálně sdružený (v našem případě roviny **R** a **S** bod P), má jich nekonečné množství; jich geometrickým místem jest přímka, *synnormála* dle Desbovesa*), jakožto trojnásobný útvar normálie čtvrtého stupně, jež jest souhrnem normál elipsoidu v bodech příslušné průsečné elipsy.**) Speciálně protínají se obě normály ležící v rovině, jež má synnormálu, na elipsoidu v bodě, jímž synnormála prochází.

Obě roviny **R** a **S** mají společnou synnormálu n; neboť uvážíme-li synnormálu n roviny **R** a sestrojíme-li jejími body všechny normály elipsoidu, rozpadá se bikvadratická křivka úpatní, přiřazená synnormále n, na průsečnou elipsu elipsoidu rovinou **R** a na druhou kuželosečku, patrně průsečnou elipsu rovinou **S**.

Vytkněme v uvažovaném svazku ploch druhého stupně, jenž dán jest spiatými elipsami v rovinách **R** a **S**, sborcený hyperboloid $\mathbf{H}^2$, určený oběma kuželosečkami a příslušnou synnormálou n, jež obě protíná.***) Hyperboloid $\mathbf{H}^2$ obsahuje patrně sedm bodů prostorové křivky třetího stupně k^3, jež jest geometrickým místem pólů os vyplňujících komplexní kuželovou plochu o středu P a prochází středem O a úběžnými body na osách elipsoidu. Obsahuje tedy $\mathbf{H}^2$ celou křivku k^3 a všechny křivky k^3 přiřazené bodům synnormály n. I tvoří střed O a úběžný bod na ose elipsoidu družinu uvažované involuce, t. j. O jest středem involuce a vrcholy elipsoidu jsou její družinou souměrnou dle středu; tedy vskutku involuce resp. I_a, I_b, I_c.

Roviny **R** a **S** tvoří zvrhlou plochu našeho speciálního svazku ploch a protínají tedy osu elipsoidu v družině příslušné involuce.

Sestrojíme-li póly $R \equiv \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ a $S \equiv \mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6$ rovin **R** resp. **S** vzhledem k elipsoidu roviny kolmé na jeho osy, na př. roviny $\mathbf{R}_a$ a $\mathbf{S}_a$ kolmé na osu a, jsou její průsečíky s rovinami $\mathbf{RR}_a$ a

*) *A. Desboves*, „Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre“, Paříž 1862.

**) *Laguerre*, „Sur les droites qui sont doublement tangentes à la surface lieu des centres de courbure d'une surface du second ordre“, Comptes rendus, 78. sv., Paříž 1874.

***) Pro případ obecný, kdy n jest libovolnou přímkou v prostoru, jest bisekantou své úpatní křivky bikvadratické.

SS$_a$ družinami involuce sdružených bodů na ose a tedy průsečíky osy s rovinami **R**$_a$ a **S**$_a$ družinou involuce I_a; a obdobně na ose b a c. Platí tedy věta:

Průsečíky protějších stěn šestirohů danému elipsoidu normálně vepsaných s jeho osou a pravoúhlé průměty protějších rohů šestistěnů elipsoidu normálně opsaných na tuto osu jsou družinami téže bodové involuce, jejímž středem jest střed elipsoidu a potencí záporně vzatý čtverec příslušné poloosy.

Věta tato jest prostorovým rozšířením podobné věty o elipse; vlastnosti šestirohu normálně vepsaného a šestistranu normálně opsaného, které vyjadřuje, platí obdobně i pro hyperboloidy.

2. *Souhrn synnormál.* Ježto šestiroh elipsoidu normálně vepsaný, přiřazený libovolnému bodu (P) v prostoru, má deset dvojin protějších stěn (**RS**), prochází libovolným bodem (P) v prostoru obecně deset synnormál.

Roviny mající synnormálu obalují plochu čtvrté třídy*); tato plocha **P**^{4} jest tedy obalena stěnami šestirohů normálně vepsaných. Geometrickým místem rohů šestistěnů normálně opsaných jest plocha čtvrtého řádu **P**$^{(4)}$, polárně reciproká s plochou **P**^{4} vzhledem k uvažovanému elipsoidu; Desboves nazývá **P**$^{(4)}$ *plocha normopolární.*

Synnormála spojuje vždy ve dvou tečných rovinách plochy **P**^{4}, sdružených involucemi I_a, I_b a I_c, dva určité body, a to průsečíky obou normál v nich ležících. Jest tedy souhrn synnormál mohutnosti ∞^2, t. j. paprskovou kongruencí, a to řádu desátého; jde ještě o určení její třídy.

Ježto synnormála protíná obě kuželosečky, na které rozpadá se příslušná bikvadratická čára úpatní, protíná rovina **N**, položená synnormálou, každou kuželosečku ještě v jednom bodě, jež jsou patami P_1 a P_2 normál n_1 a n_2 v rovině **N** ležících; P_1P_2 jest tedy paprsek osového komplexu a jest plošnou přímkou hyperboloidu **H**^{2}, a to té soustavy, ku které synnormála nenáleží. Chceme-li tedy určiti počet synnormál, ležících v libovolné rovině **N** a protínajících v ní obě normály n_1 a n_2, sluší určiti, kolik

---

*) Viz na př. *E. Waelsch*, „Über das Normalensystem und die Centralfläche der Flächen zweiter Ordnung", Sitzungsberichte der kais. Akademie, odděl. II, svaz. XCV, Vídeň 1887.

existuje dvojin rovinových **RS**, sdružených involucemi I_a, I_b a I_c, mezi tečnými rovinami plochy $\mathbf{P}^4$ toho druhu, že jedna prochází bodem P_1 a druhá bodem P_2, t. j. protějších stěn šestirohů normálně vepsaných, jichž póly RS, protější rohy šestistěnů normálně opsaných, nacházejí se na ploše normopolární $\mathbf{P}^{(4)}$.

Probíhá-li bod R libovolnou přímku, tu roviny $\mathbf{R}_a$ resp. $\mathbf{R}_b$ a $\mathbf{R}_c$, sestrojené bodem resp. kolmo na osy a, b, c, vytvořují svazek rovin rovnoběžných a s řadou bodu R perspektivní; všechny tyto speciální svazky rovinové jsou tedy vzájemně perspektivní. I jsou svazky rovin $\mathbf{S}_a$, $\mathbf{S}_b$ a $\mathbf{S}_c$, souvisící s nimi uvedenými involucemi, vzájemně projektivní; jich výtvarem jest prostorová křivka stupně třetího, kterou patrně vytvořuje bod S, sdružený s bodem R těmi involucemi. Při tom vytvořuje rovina **R** svazek rovinový a rovina **S** vyplňuje svazek rovinový třetí třídy. A obráceně.

Vyplňuje-li bod R libovolnou rovinu **T** o pólu T vzhledem k elipsoidu, náleží jeho rovina polární rovinovému svazu o středu T. Bod S opisuje pak plochu třetího řádu, ježto na libovolné přímce t nacházejí se tři takové body S, sdružené patrně ku třem rovinám **R**, které bodem T procházejí a náleží rovinovému svazku třetí třídy, sdruženému k bodům S na přímce t. Rovina **S** obaluje pak plochu třetí třídy, neboť libovolnou přímkou t možno sestrojiti tři její tečné roviny, ježto v rovině **T** jsou tři body R prostorové křivky třetího stupně, sdružené s rovinami **S** svazku o ose t.

Prochází-li rovina **R** bodem P_1, nachází se její pól R v tečné rovině $\mathbf{P}_1$ elipsoidu. Probíhá-li bod R rovinu $\mathbf{P}_1$, vyplňuje bod S, sdružený s ním vytčenými involucemi, plochu třetího řádu. Musí tedy body S nacházeti se na průseku této plochy a plochy normopolární $\mathbf{P}^{(4)}$, mimo to pak v rovině tečné $\mathbf{P}_2$, ježto rovina **S** má procházeti bodem P_2. I jest celkem dvanáct dvojin bodových RS, tedy dvanáct dvojin **RS** tečných rovin plochy $\mathbf{P}^4$, z nichž jedna prochází bodem P_1 a druhá bodem P_2.

Z deseti synnormál procházejících obecně průsečíkem $P \equiv n_1 . n_2$ jsou čtyři toho druhu, že jedna přiřazená rovina prochází osou $P_1 P_2$ a jednou z dalších čtyř pat normál, sestrojených bodem P na elipsoid, druhá pak zbývajícími čtyřmi patami. Šest synnormál bodem P procházejících jest pak toho druhu, že jedna rovina každé z nich přiřazená (**R**) prochází bodem P_1 a druhá (**S**) bodem P_2. Těchto šest synnormál, procházejících průsečíkem P a protínajících tedy obě normály v rovině **N**, neleží obecně v této rovině*); leží tedy v libovolné rovině **N** obecně toliko synnormál šest, čímž dána jest třída jich kongruence. Důkaz platí stejně i pro hyperboloidy. Tedy:

*Kongruence synnormál středových ploch druhého stupně jest desátého řádu a šesté třídy.***)

Poznámka k polaritě trojúhelníkové a čtyřstěnové.

Napsal **Václav Obešlo**.

1. Vzhledem k danému trojúhelníku ABC přísluší, jak známo, každému bodu P roviny určitá přímka p jako harmonikála. Možno ji též zváti polárou bodu k trojúhelníku, neboť jest přímou polárou bodu toho ke křivce 3. stupně, kterou trojúhelník představuje. Spojnice bodu P s vrcholem trojúhelníka a průsečík přímky p s protilehlou stranou jsou oběma vrcholy této strany harmonicky odděleny. Jde-li o konstrukci poláry k danému bodu, promítněme bod z vrcholů na protilehlé strany do bodů P_1, P_2, P_3, načež přímka p jest osou perspektivity trojúhelníků ABC, $P_1P_2P_3$ při středu P. Je-li naopak dána přímka p, spojme její průsečíky se stranami vždy s vrcholem protilehlým, načež vzniklý

---

*) Libovolnou přímkou p procházejí toliko čtyři roviny té vlastnosti, že normály v nich ležící protínají se na přímce, t. j. *kongruence normál elipsoidu jest „pořadí" čtvrtého* (Sturmův „Rang"; viz jeho „Liniengeometrie", díl II., str. 1). Neboť geometrickým místem průsečíku obou normál v rovině pro případ, že rovina probíhá rovinový svazek o ose p, jest křivka pátého řádu, mající přímku p za čtyřnásobnou sečnu (viz uvedené pojednání Waelschovo); a to jest křivka v Sturmově knize (str. 3) označená $|l|$ řádu $\frac{1}{2}n(n-1)+r$, je-li n třída (2) a r pořadí (tedy 4) kongruence.

**) Ukázal první *W. van der Woude* v dissertační práci »Over elkaar snijdende normalen aan een ellipsoide en een hyperellipsoide«, Deventer 1908, pomocí pojmu »centra« roviny, zavedeného *Laguerrem* v anal. pojednání »Sur les normales aux surfaces du second ordre«, Nouv. annales mathém., sér. 2, vol. 17, Paříž 1874.