Václav Obešlo

Poznámka k polaritě trojúhelníkové a čtyřstěnové

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 208--219

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124090

druhu, že jedna rovina každé z nich přiřazená (**R**) prochází bodem P_1 a druhá (**S**) bodem P_2. Těchto šest synnormál, procházejících průsečíkem P a protínajících tedy obě normály v rovině **N**, neleží obecně v této rovině*); leží tedy v libovolné rovině **N** obecně toliko synnormál šest, čímž dána jest třída jich kongruence. Důkaz platí stejně i pro hyperboloidy. Tedy:

*Kongruence synnormál středových ploch druhého stupně jest desátého řádu a šesté třídy.***)

Poznámka k polaritě trojúhelníkové a čtyřstěnové.

Napsal **Václav Obešlo**.

1. Vzhledem k danému trojúhelníku ABC přísluší, jak známo, každému bodu P roviny určitá přímka p jako harmonikála. Možno ji též zváti polárou bodu k trojúhelníku, neboť jest přímou polárou bodu toho ke křivce 3. stupně, kterou trojúhelník představuje. Spojnice bodu P s vrcholem trojúhelníka a průsečík přímky p s protilehlou stranou jsou oběma vrcholy této strany harmonicky odděleny. Jde-li o konstrukci poláry k danému bodu, promítněme bod z vrcholů na protilehlé strany do bodů P_1, P_2, P_3, načež přímka p jest osou perspektivity trojúhelníků ABC, $P_1P_2P_3$ při středu P. Je-li naopak dána přímka p, spojme její průsečíky se stranami vždy s vrcholem protilehlým, načež vzniklý

---

*) Libovolnou přímkou p procházejí toliko čtyři roviny té vlastnosti, že normály v nich ležící protínají se na přímce, t. j. *kongruence normál elipsoidu jest „pořadí" čtvrtého* (Sturmův „Rang"; viz jeho „Liniengeometrie", díl II., str. 1). Neboť geometrickým místem průsečíku obou normál v rovině pro případ, že rovina probíhá rovinový svazek o ose p, jest křivka pátého řádu, mající přímku p za čtyřnásobnou sečnu (viz uvedené pojednání Waelschovo); a to jest křivka v Sturmově knize (str. 3) označená $|l|$ řádu $\frac{1}{2} n (n - 1) + r$, je-li n třída (2) a r pořadí (tedy 4) kongruence.

**) Ukázal první *W. van der Woude* v dissertační práci »Over elkaar snijdende normalen aan een ellipsoide en een hyperellipsoide«, Deventer 1908, pomocí pojmu »centra« roviny, zavedeného *Laguerrem* v anal. pojednání »Sur les normales aux surfaces du second ordre«, Nouv. annales mathém., sér. 2, vol. 17, Paříž 1874.

tím třístran $p_1 p_2 p_3$ jest opět s daným perspektivní dle středu P a osy p. Přímka p jest polárou bodu P nejen k trojúhelníku ABC, ale též k trojúhelníku $P_1 P_2 P_3$ a třístranu $p_1 p_2 p_3$.

Uvažujme vztah polí rovinných bodu P a přímky p. Ježto kvadratickou transformaci dvou polí bodových možno definovati tím, že v prvním poli vytkneme dva svazky paprskové M, N a ve druhém poli svazky M', N', projektivní k prvním, resp. tak, že přímce MN neodpovídá ani v jedné ani ve druhé projektivnosti přímka $M'N'$, plyne z definice vztahu mezi bodem a jeho harmonikálou — ježto svazky promítající bod P z vrcholů A, B, C jsou projektivní k řadám vyťatým přímkou p resp. na stranách BC, CA, AB — že vztah obou rovinných polí jest reciprokou kvadratickou transformací, při čemž trojúhelník ABC jest hlavním trojúhelníkem v obou polích. Každému vrcholu odpovídá svazek, jehož středem jest vrchol ten, každé straně řada bodů na straně té.*)

Za účelem analytického studia naší transformace zvolíme soustavu homogenních souřadnic o základním trojúhelníku ABC. Základní vlastnosti uvažované polarity vyvodil již Max Greiner: Pol und Polare des Dreiecks (Archiv der Mathematik und Physik, 59. Teil), vztahuje však útvary k libovolné soustavě pravoúhlé. Ježto pak pro naši soustavu souřadnic rovnice plynoucí z rovnic tam obdržených snadno získáme, poukažme ve příčině základních vztahů prostě k tomuto pojednání a připojme pouze některé dodatky.

a) Libovolná kuželosečka $\varphi(p)$, dotýkající se všech tří stran trojúhelníka ABC, jest obálkou polár bodů určité přímky p, jejíž pól P ke křivce $\varphi(p)$ jest zároveň jejím pólem k trojúhelníku. Libovolný bod T křivky jest průsečíkem dvou soumezných jejích tečen t_1, t'_1, jejichž póly jsou dva soumezné body T_1, T'_1 přímky p. Odtud plyne, že pólová kuželosečka $\Pi(T)$ bodu T dotýká se přímky p v bodě T_1, jenž jest pólem tečny t_1 bodu T křivky $\varphi(p)$. Duálně platí věta, že obalová kuželosečka každé tečny u kuželosečky $\Pi(P)$ jdoucí všemi vrcholy trojúhelníka má v bodě

*) Viz: R. Sturm, Die Lehre von den geom. Verwandschaften, Bd. IV. str. 61.

P — pro nějž jest křivka $\Pi(P)$ kuželosečkou pólovou — za tečnu přímku u_1, poláru bodu dotyčného U_1 tečny u.

b) Snadný výpočet v našich souřadnicích praví nám dále, že místem pólů přímky p ke kuželosečkám pólovým bodů přímky — kteréžto kuželosečky tvoří svazek o čtvrtém základním bodě P — jest právě obalová kuželosečka $\varphi(p)$ přímky p.*) Věta duální praví, že obálkou polár bodu P k obalovým kuželosečkám přímek svazku P jest právě pólová kuželosečka bodu P.

c) Kuželosečky $\Pi(P)$, $\varphi(p)$ dotýkají se ve společných průsečných bodech Q_1, Q_2 s přímkou p přímek PQ_1, PQ_2. Body Q_1, Q_2 jsou sdruženě imaginární, jak nám výpočet potvrdí**), a určují s bodem P „polární trojúhelník“ k naší polaritě. Důsledkem věty *a*) jest tedy, že pólové kuželosečky bodů Q_1, resp. Q_2 dotýkají se přímky p v bodech Q_2, resp. Q_1 a že obalové kuželosečky přímek PQ_1, resp. PQ_2 dotýkají se v bodě P přímek PQ_2, resp. PQ_1.

d) Možno tedy vzhledem k základním vlastnostem a k předchozímu vysloviti na př. větu: „Jsou-li dány body A, B, C, P a jsou-li P_1, P_2, P_3 průměty bodu P na strany trojúhelníka ABC z jeho protilehlých vrcholů, má perspektivní osa p trojúhelníků ABC, $P_1P_2P_3$ tu vlastnost, že póly její ke kuželosečkám svazku $(ABCP)$ vyplňují kuželosečku φ, dotýkající se v bodech P_1, P_2, P_3 stran trojúhelníka ABC. Při tom každé tečně kuželosečky φ přísluší jedna z kuželoseček svazku, dotýkající se ve vrcholech trojúhelníka ABC spojnic s průsečíky tečny té se stranami protilehlými a mající tu vlastnost, že pól tečny té vzhledem k ní leží na přímce p. Sdruženě imaginární průsečíky křivky φ s přímkou p — dvojné to body elliptické involuce svazkem $(ABCP)$ vyťaté — určují s bodem P trojúhelník „polární“ v polaritě trojúhelníka ABC.“ Snadno vyplyne opět věta duální.

Ježto specielně polárou těžiště jest nekonečně vzdálená přímka, možno též říci: „Vrcholy libovolného trojúhelníka a jeho těžištěm jest dán svazek hyperbol, jejichž středy vyplňují ellipsu

---

*) Srovnej: R. Sturm, tamtéž, str. 47., Reye-ova kvadrat. transformace dvou polí rovinných.

**) Doplň v uvedeném článku Greinerově.

φ, dotýkající se stran trojúhelníka v půlících bodech. Těžiště jest středem ellipsy a směry asymptot každé z hyperbol svazku určují směry dvou jejích sdružených průměrů. Hyperbola svazku, mající střed v bodě V ellipsy, dotýká se ve vrcholech trojúhelníka spojnic s průsečíky tečny v křivky φ v bodě V s protilehlými jeho stranami. Současně tvoří paraboly dotýkající se stran trojúhelníka řadu takového druhu, že poláry těžiště vzhledem k nim obalují ellipsu Π, dotýkající se ve vrcholech přímek rovnoběžných s protilehlými stranami a mající každou dvojici tečen z těžiště, jež jest rovněž jejím středem, k jednotlivým parabolám řady vedených za dvojici sdružených průměrů. Parabola řady, pro niž polárou těžiště jest tečna w ellipsy, dotýká se stran trojúhelníka v bodech, jež jsou průměty dotyčného bodu W tečny w z protilehlých vrcholů. Ellipsa Π jest k ellipse φ nejen soustředná, ale též homothetická (jsouc jejím dvojnásobkem), v souhlase s tím, že involuce tečen k parabolám řady těžištěm vedených jest perspektivní s involucí vyťatou hyperbolami svazku na nekonečně vzdálené přímce."

Tato perspektivita obou involucí v obecném případě, kdy místo těžiště volíme libovolný bod roviny, jest důsledkem souvislosti protilehlých prvků trojúhelníka PQ_1Q_2.

e) Uvažujeme-li kromě rovnic pólové kuželosečky $\Pi(P)$ bodu $P(x_1, x_2, x_3)$, obalové kuželosečky $\varphi(p)$ jeho poláry p a kuželosečky přecházející ve dvojnou přímku p

$$\Pi(P) = \Sigma \frac{\xi_i \xi_k}{x_i x_k} = 0, \quad \varphi(p) = \Sigma \frac{\xi_i^2}{x_i^2} - \Sigma \frac{\xi_i \xi_k}{x_i x_k} = 0,$$

$$p^2 = \Sigma \frac{\xi_i^2}{x_i^2} + \Sigma \frac{\xi_i \xi_k}{x_i x_k} = 0,$$

kde $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$, $i \gtrless k$, též rovnici kuželosečky, jež má trojúhelník ABC polárním a prvky P, p pólem a polárou,

$$k = \Sigma \frac{\xi_i^2}{x_i^2} = 0,$$

vidíme, že všecky čtyři tyto kuželosečky náleží témuž svazku, t. j. kuželosečky $\Pi(P)$, $\varphi(p)$ dotýkají se nejen navzájem, ale též s kuželosečkou k ve společných imaginárních průsečících s přímkou p.

f) V souhlase s tím, že trojúhelníková polarita jest reciprokou kvadratickou transformací, odpovídá obecné kuželosečce jako obálce tečen, tedy jako křivce 2. třídy, křivka 4. řádu

$$A\,\xi_1^2\xi_2^2 + \ldots + 2\xi_1\xi_2\xi_3\,(D\xi_1 + \ldots) = 0,$$

mající vrcholy trojúhelníka body dvojnými. Naopak křivce 2. řádu odpovídá křivka 4. třídy, mající strany trojúhelníka dvojnými tečnami.

Specielně kuželosečce k (v *e)* uvedené) jako obálce tečen odpovídá křivka 4. řádu

$$k' = \frac{\xi_1^2\xi_2^2}{x_1^2 x_2^2} + \frac{\xi_2^2\xi_3^2}{x_2^2 x_3^2} + \frac{\xi_3^2\xi_1^2}{x_3^2 x_1^2} = 0,$$

mající vrcholy trojúhelníka rovněž body dvojnými, avšak tečny v bodech těch jsou zde stranami trojúhelníka harmonicky odděleny. Obdobně pro křivku k jako místo bodů.

Kuželosečce $\Pi(P)$ jdoucí vrcholy trojúhelníka, jako obálce tečen, odpovídá křivka 4. řádu, mající ve vrcholech body vratu, jejichž tečny vratu procházejí bodem P. Duálně kuželosečce $\varphi(p)$ dotýkající se stran, jako místu bodů, odpovídá křivka 4. třídy, mající strany tečnami inflexními v bodech průsečných s přímkou p.

Možno tedy mimochodem vysloviti věty: „Křivka 4. řádu, mající tři body vratu, má tu vlastnost, že všecky tři tečny vratu protínají se v témž bodě P; v polaritě trojúhelníka bodů vratu odpovídají bodům křivky tečny kuželosečky pólové bodu P k trojúhelníku." — „Křivka 3. řádu, mající tři body inflexní, má tu vlastnost, že všecky tři inflexní body leží na téže přímce p; v polaritě třístranu inflexních tečen odpovídají tečnám křivky body obalové kuželosečky φ přímky p."

g) Poznámka. Jsou-li dány 4 body A, B, C, D, možno uvažovati poláru každého z nich k trojúhelníku ostatních tří bodů. Stopní trojúhelník $A_1B_1C_1$ jest ve všech těchto čtyřech případech společný, jsa diagonálním třírohem úplného čtyřrohu $ABCD$ a zároveň diagonálním třístranem úplného čtyřstranu $abcd$ všech čtyř polár. „Je-li tedy dán úplný čtyřroh $ABCD$ a je-li $A_1B_1C_1$ jeho diagonální tříroh, pak perspektivní osy a, b, c, d trojúhelníka $A_1B_1C_1$ a trojúhelníků BCD, CDA, DAB, ABC, jsouce polárami bodů A, B, C, D k trojúhelníkům těm, tvoří čtyřstran, jehož diagonální třístran jest totožný s třírohem $A_1 B_1 C_1$."

2. Budiž dán čtyřstěn $ABCD$ a libovolný bod P v prostoru. Promítneme-li bod P z vrcholů na stěny protilehlé do bodů P_1, P_2, P_3, P_4, pak poláry těchto bodů k příslušným trojúhelníkům stěnovým leží v jedné rovině, harmonikální rovině P bodu P ke čtyřstěnu; zveme ji též polární rovinou bodu P ke čtyřstěnu, neboť jest poslední polárou bodu P ku ploše 4. stupně, kterou čtyřstěn představuje. Rovina tato prochází harmonickými body k vrcholům vzhledem ku patám příček vedených bodem P vždy ke dvěma protilehlým hranám čtyřstěnu.

Jsou-li (x_1, x_2, x_3, x_4) souřadnice bodu P ke čtyřstěnu, jest

$$\mathsf{P} = \frac{\xi_1}{x_1} + \frac{\xi_2}{x_2} + \frac{\xi_3}{x_3} + \frac{\xi_4}{x_4} = 0$$

rovnice polárné roviny P.

Čtyrstěny $ABCD$, $P_1P_2P_3P_4$ jsou perspektivní dle středu P a roviny P, čehož možno užiti ke konstrukci polárné roviny daného bodu. Chceme-li naopak k dané rovině P sestrojiti pól P, užijme čtyřstěnu $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2\mathsf{P}_3\mathsf{P}_4$, jehož stěny spojují stopy roviny na stěnách daného čtyřstěnu s protilehlými vrcholy a jenž jest rovněž perspektivní s daným dle středu P a roviny P.

Specielně jest stěna čtyřstěnu polárnou rovinou všech svých bodů, vrchol pólem všech svých rovin a každá rovina jdoucí hranou rovinou polárnou všech bodů hrany.

a) Vytvoří-li polárná rovina prostorový svazek o středu $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$, jest místo jejího pólu dáno rovnicí

$$\frac{x_1}{\xi_1} + \frac{x_2}{\xi_2} + \frac{x_3}{\xi_3} + \frac{x_4}{\xi_4} = 0.$$

Odpovídá tedy v čtyřstěnové polaritě bodu P jako středu svazku rovin jako místo bodů plocha

$$\Pi^3(P) = x_1\xi_2\xi_3\xi_4 + x_2\xi_3\xi_4\xi_1 + x_3\xi_4\xi_1\xi_2 + x_4\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$$

3. řádu, mající vrcholy body dvojnými. Jest to první polára bodu P ke čtyřstěnu, jako ploše 4. stupně, a v celkovém počtu 27 jejích přímek čítány jsou hrany čtyřstěnu jako přímky quaternární. Mimo ně obsahuje plocha tři přímky unární, příčky to vždy dvou protilehlých hran, ležící v rovině P. Rovina jdoucí

hranou čtyřstěnu a površkou ji protínající, spojující tedy hranu s průsečíkem roviny **P** s hranou protilehlou, dotýká se plochy podél celé hrany.*)

První polárou bodu P ku ploše $\Pi^3(P)$, čili 2. polárou ku čtyřstěnu, jest plocha

$$\Pi^2(P) = \Sigma \frac{\xi_i \xi_k}{x_i x_k} = 0, \quad i = 1, \ldots 4; \; k = 1, \ldots 4; \; i \gtrless k.$$

Jest to plocha 2. stupně, jež se ve vrcholech dotýká rovin promítajících stopy roviny **P** na stěnách protilehlých; bod P a rovina **P** jsou k ní pólem a polární rovinou. Stěny čtyřstěnu protíná v kuželosečkách, jež jsou pólovými kuželosečkami průmětů P_i bodu P k trojúhelníkům stěnovým. Každá z těchto kuželoseček promítá se z protilehlého vrcholu kuželem 2. stupně, jenž jest ve vrcholu tom, jako dvojném bodě plochy $\Pi^3(P)$, tečným kuželem této plochy, takže rovina promítající stopu roviny **P** na protilehlé stěně jest k tomuto kuželi polární rovinou paprsku promítajícího bod P.

b) Duálně odpovídá v naší čtyřstěnové polaritě rovině **P** jako místu bodů jako obálka rovin plocha Φ_3(**P**) 4. řádu třetí třídy, mající stěny rovinami dvojnými. V celkovém počtu 27 rovinových svazků jejích rovin tečných čítati jest svazky kolem hran čtyřstěnu jako svazky quaternární. Mimo ně má plocha ještě tři unární svazky tečných rovin, jejichž osy jsou příčkami vždy dvou protilehlých hran a protínají se v jednom bodě P. Průsečík hrany čtyřstěnu s osou ji protínající jest společným dotyčným bodem všech tečných rovin hranou jdoucích. Stěny tetraedru jako dvojné tečné roviny plochy dotýkají se jí podél kuželoseček, jež jsou vzhledem k trojúhelníkům stěnovým obalovými kuželosečkami stop roviny **P**. (Dotýkají se tedy tyto kuželosečky vždy po dvou ve zmíněných průsečících hran s osami unárními, čehož důsledkem právě jest vlastnost těchto bodů.)

c) Plocha 2. stupně $\Pi^2(P)$, obdobná k ní plocha Φ_2(**P**) o bodové rovnici

$$\Sigma \frac{\xi_i^2}{x_i^2} - \frac{1}{2} \Sigma \frac{\xi_i \xi_k}{x_i x_k} = 0$$

*) Srovnej: R. Sturm, Flächen 3. Ordnung; Die Lehre von d. g. Verw. III., str. 420.

dále plochy **K**, **H**

$$\mathsf{K} = \Sigma \frac{\xi_i^2}{x_i^2} = 0, \quad \mathsf{H} = \Sigma \frac{\xi_i^2}{x_i^2} - \Sigma \frac{\xi_i \xi_k}{x_i x_k} = 0,$$

jež obě mají bod P a rovinu **P** pólem a polární rovinou a z nichž prvá má čtyřstěn čtyřstěnem polárním a druhá dotýká se hran čtyřstěnu, a konečně plocha 2. stupně přecházející ve dvojnou rovinu **P** náleží témuž svazku, t. j. všecky čtyři první plochy dotýkají se podél průseku s rovinou **P**.

d) Plocha **H** usnadňuje nám představu ploch $\Pi^3(P)$, $\Phi_3(\mathsf{P})$; možno říci: „Každá z ∞^3 ploch 2. stupně dotýkajících se hran daného čtyřstěnu má tu vlastnost, že všecky tři spojnice dotyčných jejích bodů vždy s dvěma protilehlými hranami procházejí týmž bodem P *) a všecky tři průsečnice vždy dvou příslušných rovin tečných leží v téže rovině **P**, jež jest polárnou rovinou bodu P vzhledem ke čtyřstěnu. Tyto tři přímky jsou unárními osami tečných rovin a stopní kuželosečky plochy **H** jsou styčnými kuželosečkami stěn pro plochu 4. řádu 3. třídy $\Phi_3(\mathsf{P})$, odpovídající v čtyřstěnové polaritě bodovému poli **P**; ony tři přímky jsou površkami a tečné kužele z vrcholů ku ploše **H** jsou tečnými kuželi ve vrcholech pro plochu 3. řádu $\Pi^3(P)$ odpovídající svazku rovin o středu P.“

e) Pohybuje-li se bod P po přímce, tvoří příslušná mu plocha $\Pi^3(P)$ svazek ploch protínajících se kromě hran čtyřstěnu v křivce k^3 3. stupně, procházející vrcholy čtyřstěnu **). Označíme-li Plückerovy souřadnice přímky p, jako spojnice dvou bodů, obvyklým způsobem, jest na př.

$$p_{12}\xi_3\xi_4 + p_{13}\xi_2\xi_4 + p_{14}\xi_2\xi_3 = 0$$

rovnice kužele 2. stupně, jenž protíná křivku tu z vrcholu (1, 0, 0, 0).

Odpovídá tedy takto každé přímce p jako ose svazku rovin jedna z ∞^4 křivek 3. stupně k^3 vrcholy čtyřstěnu jdoucích. Jako jest přímka dána dvěma rovinami jí jdoucími, tak jest křivka k^3 určena dalšími dvěma body. Ježto bodem P prochází ∞^2 přímek, leží na ploše $\Pi^3(P)$ celkem ∞^2 křivek k^3 jdoucích

*) Srovnej ve příčině této části věty: R. Sturm, Die Lehre . . . I. str. 160.

**) Srovnej: R. Sturm, Die Lehre . . ., III. str. 421.

dvojnými body. Každé dvě křivky k^3 na ploše ležící protínají se ještě v jednom bodě, jenž jest též průsečíkem jedné z obou křivek s každou plochou jdoucí druhou křivkou, čili jediným — kromě hran tetraedru — průsečíkem tří ploch našeho druhu, jsa pólem roviny, příslušnými plochám těm body určené; bodem plochy prochází ∞^1 křivek k^3 plochy. Vše plyne přechodem k příslušným přímkám. Ježto dále bod P jest dán jako průsečík tří rovin, které neprocházejí touž přímkou, jest plocha $\Pi^3(P)$ dána, jsou-li kromě čtyřstěnu dány tři její body, které neleží na téže křivce k^3. — Snadno plynou opět úvahy duální.

Jako příklad konstruktivní applikace uveďme převedení úlohy sestrojiti přímkou tečné roviny ku ploše 4. řádu $\Phi_3(\mathsf{P})$ v úlohu sestrojiti průsečíky křivky 3. stupně s rovinou.

3. Polarita čtyřstěnová jest případem *reciproké kubické transformace* prostoru. Že tomu tak jest, plyne na př. z toho, že svazek rovin promítajících z jedné hrany čtyřstěnu body P jest projektivní s řadou bodů vyťatých rovinami P na hraně protilehlé.

Mějme dány v prostoru dva trojúhelníky ABC, $A_1B_1C_1$. Svazkům rovin kolem jednotlivých stran prvního přiřaďme projektivně svazky rovin kolem příslušných stran druhého, ale tak, aby rovině ABC v žádné z těchto projektivností neodpovídala rovina $A_1B_1C_1$. Pak jest transformace přiřazující průsečíku rovin prvních tří svazků průsečík rovin homologických druhých dvou svazků transformací oboustranně kubickou obou prostorů. Tetraedry $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, kde D_1 resp. D jest průsečíkem rovin homologických k rovině ABC resp. $A_1B_1C_1$, jsou pak základními čtyřstěny obou prostorů; bod D_1 odpovídá totiž všem bodům roviny ABC atd. *)

Z vytčeného vztahu pólů a polárních rovin plyne již, že polarita ke čtyřstěnu jest reciprokou k transformaci právě definované. Oba tetraedry zde splývají v jediný, jehož protilehlé elementy jsou homologickými. Platí zde tedy značná analogie s rovinou, jež vedla by nás k studiu soustav našich ploch.

---

*) Jest to táž transformace jako v knize: R. Sturm, Die Lehre ... IV. str. 388.

4. Uvažujme nyní jeden z ∞^2 svazků kuželoseček majících daný trojúhelník společným trojúhelníkem polárním. Svazek ten vytkneme tím, že zvolíme jeden jeho základní bod A. Učiňme bod A jednotkovým bodem $(1, 1, 1)$ soustavy souřadnic vztažených k danému trojúhelníku. Další tři základní body našeho svazku mají pak souřadnice $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$ a svazek možno vyjádřiti rovnicí

$$(\xi_1^2 - \xi_2^2) + \lambda(\xi_2^2 - \xi_3^2) = 0.$$

Poláry bodu (x_1, x_2, x_3) ke kuželosečkám svazku tvoří pak svazek o středu $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right)$. Náš svazek kuželoseček stanoví tudíž involutorní kvadratickou příbuznost (Reyeovu) bodů v rovině takovou, že souřadnice příslušných bodů mají reciproké hodnoty.

Dále uvažujme polaritu ke kuželosečce

$$k \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

jež má souřadný trojúhelník trojúhelníkem polárním, přiřazuje však bodu $(1, 1, 1)$ jako poláru přímku $(1, 1, 1)$, jež jest polárou bodu toho v polaritě vzhledem k trojúhelníku souřadnému; též trojúhelníkové poláry bodů $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$ jsou jejich polárami ke kuželosečce k.

Polárou bodu (x_1, x_2, x_3) ke kuželosečce k jest přímka (x_1, x_2, x_3), tudíž polárou bodu $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right)$ přímka $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right)$.

Uvážíme-li nyní, že v polaritě vzhledem k trojúhelníku souřadnému jest polárou bodu (x_1, x_2, x_3) přímka $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right)$, nabýváme věty: „Polára bodu k trojúhelníku jest polárou ke kuželosečce k pro bod, jenž danému odpovídá v involutorní kvadratické příbuznosti stanovené některým svazkem kuželoseček, majících trojúhelník společným trojúhelníkem polárním, jestliže kuželosečka k má trojúhelník rovněž polárním a je-li vzhledem k ní pro jeden (a tudíž pro každý) ze čtyř základních bodů svazku jeho polára k trojúhelníku polárou.“

Tím nabýváme souvislosti mezi polaritou trojúhelníkovou a známou příbuzností Reyeovou. Věty o prvé příbuznosti platné možno tedy na druhou snadno přenášeti. Zejména seznáváme opět, že polarita k trojúhelníku jest kvadratickou příbuzností.

5. Analogický vztah platí pro prostor. Berouce uvažovaný čtyřstěn za souřadný, uvažujme plochu 2. stupně o rovnici

$$\mathsf{P} \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0.$$

Souřadný čtyřstěn jest jejím čtyřstěnem polárním a bodům $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1, -1)$, $(-1, 1, -1, 1)$, $(-1, -1, 1, 1)$, $(-1, -1, -1, -1)$ přísluší ku ploše té jejich polární roviny ke čtyřstěnu jako roviny polární. Těchto 8 bodů (jež možno rozděliti vždy po čtyřech do dvou rovin jdoucích hranou čtyřstěnu) určuje 2-mocný svazek ploch 2. stupně majících daný čtyřstěn společným čtyřstěnem polárním (svazků těch jest ∞^3), daný na př. rovnicí

$$(\xi_1^2 - \xi_2^2) + \lambda (\xi_2^2 - \xi_3^2) + \mu (\xi_3^2 - \xi_4^2) = 0.$$

Polární roviny bodu (x_1, x_2, x_3, x_4) ku plochám svazku tvoří prostorový svazek o středu $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}\right)$, čímž jest definována involutorní příbuznost bodů v prostoru. Tato příbuznost jest kubická (na př. přímé řadě bodů odpovídá výtvor tří projektivních svazků rovinových kolem hran čtyřstěnu, t. j. prostorová křivka kubická). Obě roviny promítající homologické body z téže hrany čtyřstěnu jsou dvojicí involuce rovinové, jejíž jednou dvojicí jsou obě stěny hranou jdoucí.

A uvážíme-li, že polární rovinou bodu $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}\right)$ ku ploše P jest polární rovina $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}\right)$ bodu (x_1, x_2, x_3, x_4) ke čtyřstěnu, nabýváme věty analogické ku větě v rovině, seznávajíce zejména opět polaritu ke čtyřstěnu jako transformaci kubickou: „Polární rovina bodu ke čtyřstěnu jest polární rovinou ku ploše 2. stupně P pro bod, jenž danému odpovídá v involutorní kubické příbuznosti stanovené některým 2-mocným svazkem ploch 2. stupně, majících čtyřstěn společným čtyřstěnem polárním, jestliže plocha **P** má čtyřstěn rovněž polárním a je-li vzhledem k ní pro jeden (a tudíž pro každý) z osmi základních bodů svazku jeho polární rovina ke čtyřstěnu rovinou polární."

Poznámka. Applikací předchozího pro případ, že jedna strana trojúhelníka resp. jedna stěna čtyřstěnu ubíhá do nekonečna, nabýváme vět, jež namnoze plynou jednodušeji, uvažujeme-li k jednomu z obou homologických útvarů útvar souměrný dle počátku souřadnic (v konečnu ležícího vrcholu trojúhelníka resp. čtyřstěnu), takže přiřazujeme bodu přímku resp. rovinu, jejíž úseky na osách souřadných rovnají se souřadnicím bodu.

Příspěvek ku vyčíslení funkce Γ.

Napsal **J. Janko.**

Rozvineme-li funkci $\Gamma(z)$ podle theoremu Mittag-Lefflerova v konvergentní řadu, obdržíme

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)} + g(z), \tag{1}$$

kdež $g(z)$ je jistá funkce celistvá. Tento výsledek lze také odvodit z definice funkce $\Gamma(z)$ omezeným integrálem

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx,$$

který má ovšem význam jen v tom případě při komplexním z, je-li reálná část z větší než nula. Můžeme totiž psáti

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\,dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx$$

a rozvineme-li e^{-x} v řadu, můžeme první integrál stanovit, takže

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{z+2} - \ldots + \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx, \tag{2}$$