Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 1, 94--104

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124075

Aby se dal do něho vepsati kruh, třeba, aby $a+c=b+d$ čili $c-d=b-a$. Nahradíme-li v prvním činiteli pod znaménkem odmocniny $c-d$ hodnotou $b-a$, v druhém $d-c=a-b$, v třetím $a-b=d-c$, a ve čtvrtém $b-a=c-d$, nabudeme

$$P=\sqrt{abcd}.$$

Úlohy.

Úloha 1.

Dokázati jest správnost stejniny

$$ab(a+b)(a^2-b^2)+bc(b+c)(b^2-c^2)+ca(c+a)(c^2-a^2)$$
$$=-(a+b+c)^2[a(c^2-b^2)+b(a^2-c^2)+(b^2-a^2)].$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Úloha 2.

Řešiti jest rovnici

$$\frac{b^2-c^2}{x+a}+\frac{c^2-a^2}{x+b}+\frac{a^2-b^2}{x+c}=0.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Úloha 3.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=\sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}}-\sqrt[3]{\frac{b-x}{b+x}}.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Úloha 4.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt[3]{\frac{11-x}{1-x}}+\sqrt[3]{\frac{1-x}{11-x}}=\sqrt[3]{\frac{121-x^2}{1-x^2}}+\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{121-x^2}}.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Úloha 5.

Dokázati větu:
Je-li $N-5$ dělitelno číslem 9, není N úplný čtverec.

Prof. *Rud. Hruša.*

Úloha 6.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)^2(x-4)^2+27x^2(x-2)^2}$$
$$-\sqrt{1+x(x-1)(x-2)(x-3)}=10.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 7.

Které hodnotě blíží se výraz

$$u=x\,[\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt[4]{x^4+a^4}],$$

vzrůstá-li x do nekonečna?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 8.

Dvěma odmocniti jest výraz

$$V=a^2b^2(x^2-y^2)^2+x^2y^2(a^2-b^2)^2$$
$$-2abxy\,[(ax-by)^2+(bx-ay)^2].$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 9.

V arithmetické řadě jest součin prvých dvou členů $m=15$, součin následujících dvou $n=63$. Stanovte onu řadu, její obecný člen a součtový vzorec.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 10.

Řada $\quad 6,\ 24,\ 84,\ 276,\ldots$

vznikla tím, že jsme odečtli členy jedné řady geometrické od souhlasných členů druhé řady geometrické. Najděte obecný její člen a součtový vzorec.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 11.

Řada $1, 4, 17, 50, \ldots$ *vznikla tím, že jsme od členů řady geometrické odečtli souhlasné členy řady arithmetické; který jest její obecný člen a součtový vzorec?*

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 12.

Řada $10, 2, 50, 38, 290, 422, \ldots$ *vznikla sečtením souhlasných členů tří řad geometrických. Stanovte ony řady, jakož i obecný člen a součtový vzorec řady této.*

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 13.

A nabízí B 200 K s podmínkou, aby mu dal za první korunu 1 h, za druhou 2 h, za třetí 3 h a t. d. a) Kolik by dal B za všech 200 K? b) Až do kolika K mohl by B takovou nabídku přijati? c) Při kolika K vyzískal by B nejvíce?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 14.

Sestrojiti čtverec ABCD, dány-li vzdálenosti daného bodu O od tří vrcholů

$$OA = a, \qquad OB = b, \qquad OC = c.$$

Prof. *Jan Schimek* ve Št. Hradci.

Úloha 15.

V rovnoramenném trojúhelníku jest rozdíl ramene a výšky 50, rozdíl ramene a půdice 325. Vypočítejte strany trojúhelníka, poloměr kružnice opsané i kružnice vepsané.

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Úloha 16.

Lichoběžník ABCD, ve kterém jsou rovnoběžné strany $AB = 19$, $CD = 11$ *a výška* $v = 16$, *rozděliti jest příčkou* $MN \parallel AB$ *tak, aby*

$$ABNM = 4 \,.\, CDMN.$$

Jak dlouhá jest příčka MN a v kterém poměru dělí výšku?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 17.

Řešiti jest rovnici

$$2 \sin x \,.\, \sin 3x = 1.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 18.

Řešiti jest rovnici

$$2\, tg\, x - 3\, tg\, 2x = 8.$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Úloha 19.

Řešiti jest rovnici

$$tg\, x + tg\, 2x = n \,.\, tg\, 3x.$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Úloha 20.

V pravoúhlém trojúhelníku abc vedena výška cd a na přeponě přenesena úsečka am = bd. Označíme-li

$$\sphericalangle cab = \alpha, \qquad \sphericalangle acm = \varphi, \qquad \sphericalangle amd = \psi,$$

dokažte, že $\quad tg\, \varphi = tg^3\, \alpha\,, \qquad tg\, \psi = \frac{1}{2}\, tg\, 2\alpha.$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Úloha 21.

Úhly α, β, γ *sférického trojúhelníka mají se k jeho nadbytku* ε *v poměru* $\alpha : \beta : \gamma : \varepsilon = m : n : p : q.$

a) Ustanovte obsah trojúhelníka.

b) Dokažte, že trojúhelník jest pravoúhlý, je-li

$$m + n = p + q.$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Úloha 22.

Který jest středový úhel kruhové výseče, obsahuje-li kruh do výseče vepsaný 16 % plochy celého kruhu?

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Úloha 23.

Pravoúhlý rovnoběžnostěn, jehož tělesná úhlopříčka $u = 91$, má tu vlastnost, že se délka její nezmění a) zkrátíme-li délku rovnoběžnostěnu o 16, šířku o 4 a prodloužíme-li za to výšku o 12; b) zkrátíme-li délku o 27, šířku o 9 a prodloužíme-li výšku o 18. Které jsou jeho rozměry?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 24.

Který jest povrch i obsah kolmého hranolu, jehož podstava jest čtyrúhelník o stranách $a = 40$, $b = 13$, $c = 84$, $d = 76$ a jehož úhlopříčka $m = 51$ dělí jej v trojúhelníky o stranách abm, cdm; výška hranolu rovná se druhé úhlopříčce podstavy.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 25.

Podstava kolmého jehlanu jest obdélník o ploše $P = 180$, součet boků jest 384, obsah jehlanu 720. Vypočítejte rozměry jehlanu.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 26.

Daný kruh rozděliti jest ve dvě výseče tak, aby kruh vepsaný do jedné z výsečí byl podstavou kužele, jehož pláštěm jest výseč druhá.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 27.

Pravidelný čtyrstěn rozdělen jest řezem jdoucím hranou ve dvě části, jichž povrchy mají se jako 1 : 2.

a) Který úhel tvoří řez se základnou?

b) V kterém poměru jsou obsahy obou částí?

c) V kterém poměru jsou poloměry koulí částem těm vepsaných?

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Úloha 28.

Vypočítati rozměry komolého kužele, jehož povrch $P = 1368\pi$ *a povrch koule vepsané* $P_1 = 864\pi$.

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Úloha 29.

Pláštěm kužele jest výseč úhlu 60^0.

V kterém poměru jest poloměr koule kuželi vepsané k poloměru koule opsané?

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Úloha 30.

V ose X soustavy pravoúhlé dány body $s(a, 0)$, $s'(-a, 0)$. *K libovolnému bodu m v rovině přidružen bod m′ tak, že spojnice* $\overline{sm}$, $\overline{s'm'}$ *protínají se na ose Y a spojnice* $\overline{mm'}$ *prochází počátkem O.*

a) Jsou-li x, y souřadnice bodu m, které souřadnice má bod m′?

b) Je-li geom. místem bodu m přímka, které jest geom. místo bodu m′?

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Úloha 31.

Bodem m $(x_0 > 0, y_0 > 0)$ *stanoviti přímku protínající kladné části os souřadných tak, aby součet úseků na nich vzniklých byl co nejmenší.*

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Úloha 32.

Nalézti kružnici, která má střed v počátku pravoúhlé soustavy a rozpoluje obvod kruhu

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0.$$

Prof. *R. Hruša.*

Úloha 33.

Nalézti kružnici, která, dotýkajíc se os souřadných, půlí obvod kruhu

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0.$$

Prof. *R. Hruša.*

Úloha 34.

Nalézti kružnici, která rozpoluje obvod kruhů daných rovnicemi

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$$
$$K_3 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 6 = 0.$$

Prof. *R. Hruša.*

Úloha 35.

Nalézti kružnici, která má střed v počátku soustavy a dělí v poměru 1 : 2 obvod kruhu

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 6 = 0.$$

Prof. *R. Hruša.*

Úloha 36.

Bodem M (11, 11) vésti tečny k ellipse

$$2x^2 + 5y^2 = 77$$

a stanoviti délky jejich od bodu M až k bodům dotyčným, jakož i odlehlosti jejich od středu ellipsy.

Prof. *Antonín Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 37.

Jest dokázati větu:

Valí-li se tečna T po ellipse E, procházejí všechny ellipsy mající za poloosy úseky m, n, jež přímka T na (prodloužených) osách ellipsy E odtíná, vrcholy obdélníka ellipse této opsaného a k osám jejím souměrného.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 38.

Sestrojiti ellipsu, dán-li vrchol její A, příslušné k němu ohnisko F a délka druhé osy $CD = 2b$.

Prof. *Jan Schimek* ve Št. Hradci.

Úloha 39.

Na parabole $y^2 = 2px$ ustanoviti bod, aby součet (rozdíl) průvodiče a normály bodu tomu příslušné měl hodnotu danou s. Zvláště vyšetřiti $s = 4p$.

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Úloha 40.

K bodu m paraboly $y^2 = 2px$ sestrojen průvodič fm a pořadnice mn. a) Jest ustanoviti poloměr kružnice vepsané trojúhelníku fmn; b) vyšetřiti geom. místo středů kružnic způsobem tím vepsaných.

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Úloha 41.

Do barometrické trubice průřezu q (cm^2), jejíž evakuovaný prostor má výšku v (cm), vnikl vzduch, tak že pozorovaný tlak p_1 (cm) nutno opraviti korrekcí k_1 (cm) na skutečný tlak vzduchu. Jak velká bublinka vzduchu x (cm^3) vnikla do barometru? Jak velkou korrekci k má tlakoměr při pozorovaném tlaku p? Kolik *se odečítá na něm při skutečném tlaku p_2? Vypočtěte hodnoty x a k, když $q = 1\ cm^2$, $v = 8\ cm$, $p_1 = 71{\cdot}1\ cm$, $k_1 = 0{\cdot}9\ cm$, $p = 74\ cm$ a $p_2 = 76\ cm$.*

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Úloha 42.

Poloměry dvou malých kulových vodičů jsou v poměru $2:3$. Menší koule má náboj $+1$, větší má neznámý náboj negativní $-x$. Jak velký jest tento náboj, nezmění-li se vzájemné působení obou koulí, spojíme-li je teninkým drátem?

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Úloha 43.

Poměr kapacit dvou lejdských lahví jest k. Lahev první byla nabita a vybita. Na to se nabije znovu na týž potencial a vybije částečně spojením vnitřních polepů s druhou dosud nenabitou lahví. Konečně vybije se každá lahev pro sebe. Jest dokázati, že energie čtyř oněch výbojů jsou v poměru

$$(k+1)^2 : (k+1) : k^2 : k.$$

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Úloha 44.

Kolik akkumulatorů elektrom. síly $2{\cdot}05$ volt a vnitřního odporu $0{\cdot}01$ ohm jest nejméně potřebí ku světlu 100 žárovek vedle sebe spojených, vyžaduje-li každá lampa proud $0{\cdot}75$ ampère a napjetí 65 volt?

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Úloha 45.

Pod skleněným zvonem ve vzduchu zapálí se proužek magnesia; povstalý kysličník naplní hořejšek zvonu v podobě husté mlhy, která se zvolna snáší. Jak velké jsou částice kysličníku, *předpokládáme-li tvar kulový, snáší-li se oblak stálou rychlostí* $v = 4 \frac{cm}{sec}$?

(*Specif. hmota* MgO *jest* $3{\cdot}22 \frac{g}{cm^3}$, *koefficient viskosity vzduchu* $\mu = 0{\cdot}000188$, *tangenciální síly vznikající viskositou určeny výrazem* $6\pi\mu v a$, *kde* a *značí poloměr kulové částice padajícího prášku.*)

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Vypsání cen za řešení úloh.

Výbor Jednoty českých mathematiků usnesl se, aby za správná řešení úloh v „*Příloze*" uveřejněných uděleny byly ceny tyto:

1. Ceny první:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XXI.
Briot-Pšenička: Mechanická theorie tepla.
Machovec: Zobrazování tečen a středů křivosti křivek.
Steinich; Počátky zeměpisu hvězdářského.
Studnička: Bohatýrové ducha (vázané).

2. Ceny druhé:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XXI.
Cremona-Weyr: Úvod do geometrické theorie křivek.
Monin: O některých druzích souřadnic projektivických.
Pokorný: Důchod invalidní.
Studnička: Bohatýrové ducha (vázané).

3. Ceny třetí:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XXI.
Jelínek: Úkoly tělesoměrné.

Seydler: Izák Newton a jeho principia.
Studnička: Bohatýrové ducha (vázané).
Šolín: Počátkové arithmografie.

Ceny *první* obdrží ti, kteří správně rozřeší *úlohy 1.—40.*; z ostatních řešitelů těchže úloh obdrží dle počtu a dokonalosti řešení 10 řešitelů ceny *druhé* a dalších 20 řešitelů ceny *třetí.*

Za 10 nejlepších řešení všech 5ti úloh fysikálních (41. až 45.) udělí se jako zvláštní cena po 1 výtisku: Dr. *F. J. Studničky,* Kartografie, k čemuž pan spisovatel 10 výtisků své knihy věnoval.

Řešení prvních 20ti úloh buďtež zaslána do *konce ledna* 1903, ostatních 25ti úloh do *konce března* téhož roku.

Připomenutí. Pp. řešitelé se žádají, aby zasílali řešení úloh psaná toliko na jedné straně čtvrtek obyčejného formátu, s podpisem na každé čtvrtce.