Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Methodický příspěvek k theorii funkce Gamma. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 1, 22--39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124071

Methodický příspěvek k theorii*) funkce Gamma.

Napsal

Vilém Jung,

professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

1.

Budiž definován druh jednoznačných funkcí analytických $F(z)$ funkcionální rovnicí

$$F(z+1) = z\,F(z). \tag{1}$$

*) Theorie funkce *Gamma*, k jejímuž založení dal podnět *Euler* tím, že vyšetřoval vlastnosti jistých druhů omezených integrálů, byla a jest posud pěstována celou řadou mathematiků. Literatura tohoto předmětu se týkající vzrostla značnou měrou, tak že by to příliš mnoho místa zaujalo, kdybych tu měl podati přehledný obraz její. V té příčině odkazuji čtenáře na pojednání *„Monographie de la Fonction Gamma“* par *M. G. Brunel.* (Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux; 3e Série, Tome III. Paris, Gauthier-Villars, 1887). V této monografii lze nalézti literárně historická data jakož i celou bibliografii chronologicky srovnanou až do konce r. 1883. O další literatuře tohoto předmětu po r. 1883 lze se orientovati v časopise *„Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“*, begr. von *C. Ohrtmann*, herausg. von *E. Lampe* (Berlin — G. Reimer).

Zajímavo jest, že již před *Eulerem* zabývali se mathematikové *Wallis*, *Stirling* a *Vandermonde* jistými výrazy limitními, které nabyly později významu v theorii funkce *Gamma.*

V novější době užito bylo při vyšetřování vlastností této funkce method a theorémů z obecné theorie analytických funkcí komplexního argumentu.

Z českých mathematiků zabývá se vyšetřováním funkce *Gamma* a jiných funkcí s touto příbuzných zejména prof. *M. Lerch,* od něhož pochází celá řada cenných pojednání o tomto předmětě. Prof. *Ed. Weyr* napsal do tohoto časopisu dva zajímavé články, související s theorií funkce *Gamma.* Mimo to napsal prof. *Aug. Pánek* několik článků o *Eulerových* integrálech 1. a 2. způsobu. Tento můj příspěvek neobsahuje žádných nových výsledků z theorie této funkce a má pouze význam methodický. Způsob, kterým tu uvádím čtenáře do základů theorie funkce *Gamma*, vycházeje z její první hlavní vlastnosti $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, jakož i způsob, kterým tu odvozuji druhou její vlastnost $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ a při tom vyvozuji theorii jednoznačných elementárních funkcí transcendentních (jednoduše periodických) čistě analyticky na základě souvislosti těchto funkcí s funkcí *Gamma*, jest, pokud mi známo, nový.

Tyto funkce nemají míti v *konečnu* žádných *podstatných singularit*; mohou tedy míti v *konečnu* pouze *isolované nepodstatně singulárné body, t. j. póly určitého řádu konečného.* Ježto mají býti tyto funkce *jednoznačnými*, nesmí míti také žádných *bodů rozvětvení.*

Poznáme, že z funkcí definovaných rovnicí (1) možno voliti takové, které těmto podmínkám vyhovují. Dále shledáme, že nejjednodušší typ těchto funkcí má v místech $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$ *póly 1. řádu;* v ostatním konečnu jsou tyto funkce *regulárnými* a v bodě $z = \infty$ mají *podstatnou singularitu.*

Jistá skupina funkcí tohoto typu nemá v konečnu žádných *bodů nullových*, a z těch nejjednodušší jest funkce *Gamma.*

Z (1) plyne

$$F(2) = F(1). \tag{2}$$

Předpokládejme, že jest F(1) hodnota konečná, lišící se od nully.

Značí-li m celistvé číslo kladné, platí obecně

$$F(z+m) = (z+m-1)(z+m-2)\ldots(z+1)\,zF(z). \tag{3}$$

Derivováním této rovnice podle z obdržíme rovnici

$$F'(z+m) = (z+m-1)(z+m-2)\ldots$$

$$.(z+1)\,z\left\{F'(z) + F(z)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z+k-1}\right\}$$

$$= F(z+m)\,.\left\{\frac{F'(z)}{F(z)} + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z+k-1}\right\},$$

z čehož se podává

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{F'(z+m)}{F(z+m)} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z+k-1}. \tag{4}$$

Z rovnice (4) obdržíme pro $z = 1$ rovnici

$$\frac{F'(1)}{F(1)} = \frac{F'(1+m)}{F(1+m)} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}. \tag{5}$$

Odečtením rovnice (5) od rovnice (4) plyne

$$(6)\qquad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{F'(1)}{F(1)} + \frac{F'(z+m)}{F(z+m)} - \frac{F'(1+m)}{F(1+m)} + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k-1}\right).$$

Násobme obě strany rovnice (6) differenciálem dz a integrujme od 1 do z podél křivky, která se dá vepsati do jednoduše souvislého oboru, jenž neobsahuje žádný nullový bod ani pól funkce $F(z)$ a tedy neobsahuje žádný pól funkce *log* $F(z)$, jenž jest zároveň jejím bodem rozvětvení nekonečně vysokého řádu.

Tím obdržíme*)

$$(7)\qquad \log F(z) - \log F(1) = (z-1)\frac{F'(1)}{F(1)} + \log\frac{F(z+m)}{F(1+m)} - (z-1)\frac{F'(1+m)}{F(1+m)} + \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{z-1}{k} - \log\frac{z+k-1}{k}\right].$$

Z rovnice (7) plyne pro $z = 2$ se zřetelem k rovnici (2) a vzhledem k tomu, že máme na mysli pouze hlavní hodnoty funkcí logarithmických, rovnice

$$\log F(2) - \log F(1) = 0$$

a tedy

$$(8)\qquad 0 = \frac{F'(1)}{F(1)} + \log\frac{F(2+m)}{F(1+m)} - \frac{F'(1+m)}{F(1+m)} + \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{k} - \log\frac{k+1}{k}\right].$$

Násobíme-li rovnici (8) výrazem $(z-1)$, odečteme-li potom od rovnice (7) a uvážíme-li, **) že

$$(z-1)\log\frac{F(2+m)}{F(1+m)} = \log(1+m)^{z-1} = \log m^{z-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z-1},$$

*) Symbolem *log* označujeme přirozený logarithmus a přihlížíme tu pouze k jeho hlavní hodnotě.

**) Přihlížíme zde také pouze k hlavním hodnotám funkcí potenčních.

obdržíme

$$(9)\qquad \log\frac{F(z)}{F(1)}=\log\frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+m-1)\,.\,F(z)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m\,.\,F(1)\,.\,m^{z-1}\,.\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z-1}}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left[(z-1)\log\frac{k+1}{k}-\log\frac{z+k-1}{k}\right].$$

Dejme číslu m vzrůsti ve směru osy kladných čísel reálných do $+\infty$, potom jest

$$\lim_{m=+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z-1}=1$$

pro jakékoliv konečné z.

Položíme-li v rovnici (9) na pravé straně

$$(10)\qquad F(z)\,.\lim_{m=+\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m\,.\,m^{z-1}}=f(z),$$

obdržíme po krátké redukci rovnici

$$(11)\qquad \log F(z)=\log f(z)+\sum_{m=1}^{+\infty}\left[(z-1)\log\frac{m+1}{m}-\log\frac{z+m-1}{m}\right].$$

Označme obecný člen nekonečné řady na pravé straně této rovnice symbolem u_m, absolutní hodnotu $|z-1|$ písmenem ζ a zvolme celistvé kladné číslo $h>\zeta$, potom obdržíme

$$\sum_{m=1}^{+\infty}u_m=\sum_{m=1}^{h-1}u_m+\sum_{m=h}^{+\infty}u_m.$$

Vyšetřme konvergenci druhého součtu.

Předpokládáme-li $m>1$, $m>\zeta$, obdržíme následující absolutně konvergentní rozvoj

$$u_m=(z-1)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{z-1}{m}\right)^k$$

$$=(z-1)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{z-1}{m}\right)^k.$$

Z toho soudíme, že

$$|u_m|<\frac{\zeta}{m^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^k+\frac{\zeta^2}{m^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta}{m}\right)^k,$$

čili

$$|u_m| < \frac{\zeta}{m^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{m}} + \frac{\zeta^2}{m^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta}{m}},$$

t. j.

$$|u_m| < \frac{\zeta}{m(m-1)} + \frac{\zeta^2}{m(m-\zeta)}.$$

Proto

$$\sum_{m=h}^{+\infty} |u_m| < \zeta \sum_{m=h}^{+\infty} \frac{1}{m(m-1)} + \zeta^2 \sum_{m=h}^{+\infty} \frac{1}{m(m-\zeta)}.$$

Ježto jest m kladné číslo celistvé, hovící podmínce $m > 1$, $m > \zeta$, mají součty na pravo pro jakékoliv konečné ζ hodnoty konečné.

Konverguje tedy řada $\sum_{m=1}^{+\infty} u_m$ *absolutně**) pro jakékoliv konečné z, vyjímajíc hodnoty $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$.

Je-li totiž $z = -(m-1)$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, má hlavní hodnota funkce $\log \frac{z+m-1}{m}$ hodnotu nekonečnou, tak že jeden člen řady jest nekonečně velký a tedy také součet řady má hodnotu nekonečnou.

V poslední nerovnosti na pravo možno volbou dosti velkého h první člen učiniti libovolně malým, nechť jest ζ jakékoliv konečné číslo.

Značí-li r libovolné kladné číslo celistvé a zvolíme-li

$$h > \zeta + r, \quad \text{tedy} \quad h - \zeta > r,$$

můžeme psáti

$$\sum_{m=h}^{+\infty} \frac{1}{m(m-\zeta)} < \sum_{m=h}^{+\infty} \frac{1}{(m-\zeta)^2} < \sum_{m=r}^{+\infty} \frac{1}{m^2},$$

tak že druhý člen můžeme volbou dosti velkého r, t. j. volbou dosti velkého h učiniti taktéž libovolně malým, nechť jest ζ jakékoliv konečné číslo.

---

*) Při tom se musí ovšem výraz v hranatých závorkách za znamením Σ bráti pokaždé za jeden člen řady a nesmí se libovolně rozčleňovati.

Můžeme tedy zbytek řady $\sum_{m=1}^{+\infty} u_m$ učiniti libovolně malým, nechť jest z jakékoliv konečné číslo. Z té příčiny konverguje zmíněná řada *stejnoměrně* v celém konečnu, vyjímajíc místa $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$

Z rovnice (10) plyne

$$(12)\quad F(z) = f(z) . \lim_{m=+\infty} \frac{1 . 2 . 3 \ldots m . m^{z-1}}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+m-1)}.$$

Označíme-li výraz za znamením *lim* symbolem p_m, obdržíme pro jakékoliv konečné $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{m=+\infty} \frac{p_{m+r}}{p_m} = \lim_{m=+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1+\frac{r}{m}\right)}{\left(1+\frac{z}{m}\right)\ldots\left(1+\frac{z+r-1}{m}\right)} . \left(1+\frac{r}{m}\right)^{z-1} = 1,$$

při čemž může míti z jakoukoliv konečnou hodnotu.

Jest tedy podmínka *nutná* pro konvergenci nekonečného součinu vyplněna.

Co nejdříve se přesvědčíme,*) že výraz p_m konverguje pro jakékoliv konečné z, roste-li m do $+\infty$, *k určité konečné hodnotě*, lišící se od nully, když žádný z činitelů v jeho jmenovateli nerovná se nulle.

Pro $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$ rovná se pokaždé jeden z těchto činitelů nulle, tak že má zmíněný výraz v těchto místech hodnoty nekonečně velké 1. řádu.

Ze vzorce

$$\lim_{m=+\infty} p_m(z) = \lim_{m=+\infty} \frac{(m-1)!\, m^z}{z(z+1)\ldots(z+m-1)}$$

obdržíme pro $z = 1$

$$\lim_{m=+\infty} p_m(1) = \lim_{m=+\infty} \frac{(m-1)!\, m}{m!} = 1,$$

pro $z = 2$

$$\lim_{m=+\infty} p_m(2) = \lim_{m=+\infty} \frac{(m-1)!\, m^2}{(m-1)!\, m(m+1)} = 1,$$

*) Dokážeme totiž, že reciproká hodnota tohoto výrazu konverguje *absolutně* (bezpodmínečně) pro jakékoliv konečné z, a že má *nullové hodnoty 1. řádu* pouze v místech $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$

pro $z = \nu$, značí-li ν *celistvé kladné číslo*,

$$\lim_{m=+\infty} p_m(\nu) = (\nu-1)!\lim_{m=+\infty}\frac{(m-1)!\,m^\nu}{(m-1)!\,m(m+1)\dots(m+\nu-1)}$$
$$= (\nu-1)!$$

Funkce $f(z)$ v rovnici (12) se vyskytující jest jednoznačnou analytickou funkcí, mající*) periodu 1 a hovící podmínce

$$f(1) = \mathrm{F}(1).$$

Z rovnice (10) totiž plyne

$$f(z+1) = \mathrm{F}(z+1)\lim_{m=+\infty}\frac{(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)(z+m)}{1\,.\,2\,.\,3\dots m\,.\,m^z}$$
$$= z\mathrm{F}(z)\lim_{m=+\infty}\frac{(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots m\,.\,m^{z-1}}\cdot\lim\frac{z+m}{m}.$$

Ježto $\lim\limits_{m=+\infty}\frac{z+m}{m} = 1$ pro jakékoliv konečné z, obdržíme

$$f(z+1) = \mathrm{F}(z)\,.\lim_{m=+\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots m\,.\,m^{z-1}} = f(z).$$

Funkcionální rovnicí (1) jest tedy definováno nesčíslně mnoho funkcí $\mathrm{F}(z)$, jež mezi sebou jistým způsobem souvisejí a dají se pomocí jisté nejjednodušší funkce toho druhu vyjádřiti. Tuto funkci obdržíme, zvolíme-li $f(z) = 1$; označme pro tento případ funkci $\mathrm{F}(z)$ symbolem $\Gamma(z)$.

Z (12) pak plyne

$$(13)\qquad \Gamma(z) = \lim_{m=+\infty}\frac{1\,.\,2\,.\,3\dots m\,.\,m^{z-1}}{z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)}$$
$$= \lim_{m=+\infty} m^{z-1}\prod_{k=1}^{m}\frac{k}{z+k-1},$$

---

*) Tato vlastnost funkce $f(z)$ plyne ostatně přímo z funkcionální rovnice (1). Hoví-li této rovnici funkce $\mathrm{F}(z)$, hoví jí také funkce

$$\Phi(z) = f(z)\,.\,\mathrm{F}(z),\quad \text{když}\quad f(z+1) = f(z),$$

neboť

$$\Phi(z+1) = f(z+1)\,.\,\mathrm{F}(z+1) = f(z)\,.\,z\mathrm{F}(z) = z\,.\,f(z)\mathrm{F}(z) = z\,\Phi(z).$$

Číslo 1 nemusí býti právě *primitivní* periodou funkce $f(z)$; primitivní periodou této funkce může býti obecně číslo $\frac{1}{n}$, značí-li n číslo celistvé. Funkce $f(z)$ může býti také *konstantou*.

kterýmžto výrazem definoval *Gauss* obecně funkci $\Gamma(z)$ pro jakékoliv konečné hodnoty argumentu z.

Jest tedy speciální funkce $\Gamma(z)$ definována funkcionální rovnicí

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)$$

a mimo to podmínkou

$$\lim_{m=+\infty}\frac{\Gamma(z+m)}{(m-1)!\,m^z}=1\,; \tag{13'}$$

z těchto pak plyne

$$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1.$$

Při tom značí m celistvé číslo *kladné*.

Funkce

$$m^z=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(z\log m)^k}{k\,!}$$

má *jednoznačnou* hodnotu, kterou obdržíme, přihlížejíce pouze k *reálnému* logarithmu *kladného* čísla m.

Obecná funkce $\mathrm{F}(z)$ hovící rovnici (1) vyjadřuje se pak vzorcem

$$\mathrm{F}(z)=f(z)\,.\,\Gamma(z). \tag{14}$$

Funkci $f(z)$ nutno voliti tak, aby měla periodu 1, a aby funkce $\mathrm{F}(z)$ hověla podmínkám z předu vyznačeným. Jest přirozeno, že se stala funkce $\Gamma(z)$ předmětem bližšího vyšetřování.

Gaussův limitní výraz v rovnici (13) můžeme následujícím dovoleným způsobem přetvořiti

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\lim_{m=+\infty}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{k}{z+k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^z$$

$$=\frac{1}{z}\lim_{m=+\infty}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^z}{1+\frac{z}{k}}.$$

Ježto jest

$$\lim_{m=+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^z}{1+\frac{z}{m}}=1$$

pro jakékoliv*) konečné z, můžeme tohoto činitele přidati, čímž obdržíme vzorec

$$(15)\qquad \Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}}{1+\frac{z}{m}}=\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{e^{z\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}}{1+\frac{z}{m}},$$

jenž byl znám již *Eulerovi.***)

Pro reciprokou hodnotu $\frac{1}{\Gamma(z)}$ obdržíme vzorec

$$(16)\qquad \frac{1}{\Gamma(z)}=z\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{1+\frac{z}{m}}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}}=z\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}.$$

Nekonečný součin na pravé straně rovnice (16) konverguje *absolutně* (bezpodmínečně) *v každém konečném oboru* argumentu z, proto vyjadřuje *celistvou funkci transcendentní****) argumentu z.

Absolutní konvergenci tohoto nekonečného součinu pro jakékoliv konečné z dokážeme, dokážeme-li *absolutní* konvergenci řady

$$\sum_{m=1}^{+\infty} v_m,$$

---

*) Přihlížíme tu pouze k reálné hodnotě $\log 1=0$, tak že platí $1^z=e^{z\log 1}=e^0=1$ pro jakékoliv konečné z.

**) V r. 1729 podal *Euler* formuli

$$\Gamma(z)=\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z-1}}{1+\frac{z-1}{m}}.$$

Tato dá se odvoditi z formule (15) pomocí rovnice $\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1)$.

***) Celistvá transcendentní funkce argumentu z jest jednoznačná analytická funkce, která nemá *v konečnu žádných bodů singulárných*; pro konečné hodnoty argumentů z má vesměs hodnoty konečné a v bodě $z=\infty$ má *podstatnou singularitu.* Tato funkce dá se vůči kterémukoli bodu z_0, jenž nalézá se v konečnu roviny kompl. argumentu z, vyjádřiti potenční řadou stoupající dle celistvých a kladných mocnin binomu $(z-z_0)$ a *neustále* konvergentní, t. j. v celém konečnu roviny kompl. argumentu z. Má tedy tato funkce *v celém konečnu* karaktér celistvé funkce racionální.

položivše před tím

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}=1+v_m.$$

Patrno, že pro jakékoliv konečné z platí absolutně konvergentní rozvoj

$$1+v_m=\left(1+\frac{z}{m}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left\{-z\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}^k}{k!}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{(-1)^{k-1}\left[\log(1+\frac{1}{m})\right]^{k-1}\right.$$

$$\left.\cdot\left[\frac{1}{m.(k-1)!}-\frac{1}{k!}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]z^k\right\},$$

tedy

$$(17)\quad v_m=\left\{\frac{1}{m}-\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}z-\left[\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{m\,.\,1!}-\frac{1}{2!}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}z^2+\left[\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]^2$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{m\,.\,2!}-\frac{1}{3!}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}z^3-\ldots$$

Ježto jest m celistvé číslo kladné, platí

$$\frac{1}{m}>\log\left(1+\frac{1}{m}\right),\ \text{tedy}\ \left(\frac{1}{m}\right)^k>\left[\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]^k,$$

mimo to

$$\left\{\frac{1}{m\,.\,(k-1)!}-\frac{1}{k!}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}<\frac{k-1}{k!}\cdot\frac{1}{m}+\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2m^2},$$

při čemž $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Položíme-li $|z|=\zeta$, platí patrně

$$|v_m|<\left(\frac{1}{2!}\frac{\zeta^2}{m^2}+\frac{2}{3!}\frac{\zeta^3}{m^3}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1!}\frac{\zeta}{m^2}+\frac{1}{2!}\frac{\zeta^2}{m^3}+\ldots\right);$$

ježto jest

$$\frac{k-1}{k!}<\frac{1}{(k-1)!},$$

můžeme psáti

$$|v_m| < \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\xi}{1!}\frac{1}{m^2} + \frac{\xi^2}{2!}\frac{1}{m^3} + \frac{\xi^3}{3!}\frac{1}{m^4} + \dots\right)$$

Nekonečná řada na pravo této nerovnosti konverguje absolutně pro jakékoliv konečné ξ. Vypíšeme-li tyto nerovnosti pro $m = 1, 2, 3, \dots$, obdržíme na pravo sečtením dle sloupců *dvojitou absolutně konvergentní* řadu,*) následkem toho jest

$$\sum_{m=1}^{\infty} |v_m| < \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \cdot \left[\frac{\xi}{1!}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^2}\right) + \frac{\xi^2}{2!}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^3}\right) + \dots\right].$$

Součet konvergentní řady na pravo má hodnotu konečnou pro jakékoliv konečné ξ, proto konverguje řada $\sum_{m=1}^{+\infty} v_m$ *absolutně v každém konečném oboru*, což má za následek *absolutní* konvergenci zmíněného nekonečného součinu v rovnici (16) pro jakékoliv konečné z.

Z té příčiny možno v tomto nekonečném součinu prováděti změny jako v součinu o konečném počtu činitelů.

---

*) Pro tuto *dvojitou* řadu nekonečnou obdržíme schéma

$$\frac{\zeta}{1!}\cdot\frac{1}{1^2} + \frac{\zeta^2}{2!}\cdot\frac{1}{1^3} + \frac{\zeta^3}{3!}\cdot\frac{1}{1^4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta^k}{k!}\cdot\frac{1}{1^{k+1}}$$

$$\frac{\zeta}{1!}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{\zeta^2}{2!}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{\zeta^3}{3!}\cdot\frac{1}{2^4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta^k}{k!}\cdot\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\vdots$$

Sečtením sloupců obdržíme řadu

$$\frac{\zeta}{1!}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^2}\right) + \frac{\zeta^2}{2!}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^3}\right) + \frac{\zeta^3}{3!}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^4}\right) + \dots$$

Řady v řádcích konvergují *absolutně*, řady v sloupcích konvergují taktéž *absolutně* pro jakékoliv konečné ζ; zároveň také konverguje *absolutně* pro jakékoliv konečné ζ řada součtů sloupců. Jest tedy *dvojitá* řada tímto schématem vyznačená *absolutně* konvergentní, tak že tu platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\zeta^k}{k!}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^{k+1}}\right)\right] = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta^k}{k!}\cdot\frac{1}{m^{k+1}}\right)\right].$$

Přihlížejíce k tomu, můžeme psáti

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}} e^{z\left\{\frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right\}}$$

$$= z e^{z \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \left\{\frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right\}} \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}},$$

t. j.

$$(18) \qquad \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}},$$

kteroužto formuli podal *Weierstrass*.

Nekonečná řada

$$(19) \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{\frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right\} = C$$

konverguje *absolutně*, neboť má samé kladné členy a součet její má hodnotu konečnou.

Ježto jest m celistvé číslo kladné, platí

$$0 < \left\{\frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right\} < \frac{1}{2} \frac{1}{m^2}.$$

Sečtením těchto nerovností pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ obdržíme

$$0 < \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{\frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right\} < \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Hodnota tohoto součtu

$$C = 0{\cdot}5772156649015328606065120 \ldots$$

nazývá se *Euler*-ovou aneb také *Mascheroni*-ho konstantou.*)

Buďtež a_m, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ nullové body 1. řádu celistvé transcendentní funkce $f(z)$, při čemž jest $|a_{m+1}| \geqq |a_m|$, $\lim\limits_{m=+\infty} |a_m| = \infty$, t. j. bod $z = \infty$ jest *mezným bodem* nullových bodů funkce $f(z)$, jež má v tomto bodě *podstatnou singularitu.*

Bod nullový k-ho řádu považujeme za k nullových bodů

---

*) Tato konstanta se nám později ještě několikráte vyskytne.

1. řádu a předpokládáme prozatím, že bod $z = 0$ není nullovým bodem funkce $f(z)$.

Konverguje-li řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{a_m} \right|,$$

dá se dle *Cauchy*-ho theorému funkce $f(z)$ vyjádřiti nekonečným součinem absolutně konvergentním pro jakékoliv konečné z, t. j.

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_m}\right),$$

při čemž značí $g(z)$ celistvou funkci racionální nebo transcendentní.

Tento *Cauchy*-ho theorém zevšeobecnil *Weierstrass* také pro případy, kde řada $\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{a_m} \right|$ nekonverguje. (Berlínská Akademie, 1876).

Konverguje-li totiž řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^{p_m}}{a_m^{p_m}(z - a_m)}$$

v kterémkoliv konečném oboru *stejnoměrně*, vyjímajíc místa a_m, což nastane vždy, konverguje-li řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{a_m} \left(\frac{z}{a_m}\right)^{p_m} \right|$$

neustále — při čemž jest p_m celistvé a kladné číslo, *obecně* pro každý index *m jiné* — dá se vyjádřiti funkce $f(z)$, má-li mimo to ještě v bodě $z = 0$ nullový bod k-ho řádu, obecnou formulí

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_m}\right) e^{G_{p_m}\left(\frac{z}{a_m}\right)}.$$

V této formuli konverguje nekonečný součin *primárních faktorů* (kmenných činitelů) *absolutně* (bezpodmínečně) pro jakékoliv konečné z.

Při tom značí $g(z)$ celistvou funkci buď racionální nebo transcendentní.

Funkce $G_{p_m}\left(\frac{z}{a_m}\right)$ jest pak definována rovnicí

$$G_{p_m}\left(\frac{z}{a_m}\right)=\sum_{r=1}^{p_m}\frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_m}\right)^r.$$

Dá-li se pro veškeré nullové body a_m, vyjímajíc bod $a_m=0$, nalézti celistvé a kladné číslo p, *pro veškeré indexy m stejné*, tak že konverguje řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\left|\frac{1}{a_m}\right|\right)^{p+1},$$

konverguje také řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{z^p}{a_m^p\,(z-a_m)}$$

ve zmíněném oboru *stejnoměrně* a tu možno užiti *Weierstrass*-ovy formule k vyjádření celistvé transcendentní funkce nekonečným součinem primárních faktorů.

Celistvé funkce transcendentní toho druhu mají dle *Laguerre*-a *určitý rod* (genre), a taková funkce jest rodu p-ho, značí-li p nejmenší celistvé a kladné číslo, pro veškeré indexy m stejné, pro které konverguje řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\left|\frac{1}{a_m}\right|\right)^{p+1}.$$

Ježto řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{p+1}$$

konverguje již pro $p=1$, jsou celistvé funkce transcendentní, mající v místech $0, -1, -2, \ldots$ *nullové body 1. řádu* funkcemi *1. rodu*; označme je symbolem $\frac{1}{F(z)}$.

Můžeme tedy psáti

$$\frac{1}{F(z)}=z\,e^{g(z)}\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}},$$

kde značí $g(z)$ celistvou funkci buď racionální nebo transcendentní, karakterisující funkci $\frac{1}{\mathrm{F}(z)}$.

Má-li funkce $\mathrm{F}(z)$ hověti rovnici (1), musí

$$\frac{1}{\mathrm{F}(z+1)}=\frac{1}{z\,\mathrm{F}(z)},$$

tak že

$$(z+1)\,e^{g(z+1)}\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z+1}{m}\right)e^{-\frac{z+1}{m}}=e^{g(z)}\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}$$

čili

$$(z+1)\,e^{g(z+1)}\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{z+m+1}{m}\,e^{-\frac{z}{m}}\,e^{-\frac{1}{m}}=e^{g(z)}\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{z+m}{m}\,e^{-\frac{z}{m}},$$

z čehož srovnáním pro jakékoliv *konečné* z plyne

$$e^{g(z+1)-g(z)}=\lim_{m=+\infty}\frac{e^{\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k}}}{z+m+1}=\lim_{m=+\infty}\frac{e^{\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k}}}{m},$$

tedy

$$e^{g(z+1)-g(z)}=e^{\lim\limits_{m=+\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\log m\right]}.$$

Později dokážeme, že

$$\lim_{m=+\infty}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\log m\right]=\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{m}-\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]=\mathrm{C}.$$

Přihlížejíce k tomu, můžeme psáti

$$e^{g(z+1)-g(z)}=e^{\mathrm{C}}.$$

Tomu vyhovuje obecně funkce

$$g(z)=a+\mathrm{C}z+b\,.\,\gamma(z),$$

kde značí C *Euler*-ovu konstantu, a, b *libovolné* konstanty, $\gamma(z)$ pak celistvou funkci transcendentní, hovící podmínce

$$\gamma(z+1)-\gamma(z)=\frac{2r\pi i}{b},$$

značí-li r *celistvé* číslo reálné.

Z toho vysvítá, že jest celistvých funkcí transcendentních, majících v místech 0, -1, $-2, \ldots$ *nullové body 1. řádu,* a jichž reciproké hodnoty hoví rovnici (1) nesčíslné množství.

Nejjednodušší z nich obdržíme, položíme-li $a = 0$, $b = 0$, t. j. zvolíme-li

$$g(z) = Cz.$$

Analytický výraz, jejž v tomto případě pro funkci $\frac{1}{F(z)}$ obdržíme, jest totožný s výrazem, vyjadřujícím funkci $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ve vzorci (18).

Obecná funkce $\frac{1}{F(z)}$ toho druhu dá se pak vyjádřiti vzorcem

$$(18') \qquad \frac{1}{F(z)} = e^{a + b \cdot \gamma(z)} \cdot \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

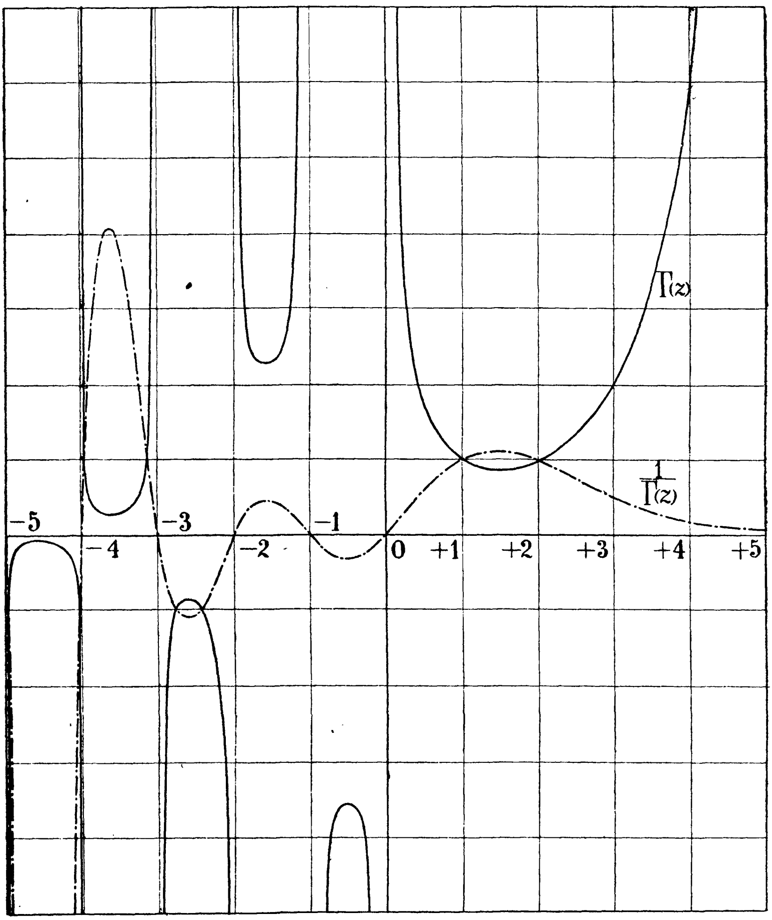
Ježto jest funkce $e^{-z \log(1 + \frac{1}{m})}$ celistvou funkcí transcendentní bez bodů nullových, plyne přímo z rovnice (16), že jest funkce $\frac{1}{\Gamma(z)}$ celistvou funkcí transcendentní mající *nullové body 1. řádu* pouze v místech $z = 0$, -1, $-2, \ldots$; v těchto místech rovnají se totiž nulle jednotlivé primární faktory nekonečného součinu absolutně konvergentního, vyjadřujícího funkci $\frac{1}{\Gamma(z)}$ a proto jen v těchto místech rovná se hodnota tohoto součinu nulle.

V *reálném* oboru argumentu z má tato funkce hodnoty *reálné*; v oboru *kladném* vesměs hodnoty *kladné*; v oboru *záporném* hodnoty *záporné* v intervallech $[-2n, -(2n+1)]$; hodnoty *kladné* v intervallech $[-(2n+1), -(2n+2)]$ pro $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Pro $\lim z = +\infty$, t. j., blíží-li se z k bodu $z = \infty$ v *kladném* směru osy *reálných* čísel, jest $\lim \frac{1}{\Gamma(z)} = 0$; pro $\lim z = -\infty$, t. j. blíží-li se z k bodu $z = \infty$ v *záporném* směru osy *reálných* čísel, nemá $\lim \frac{1}{\Gamma(z)}$ určitou hodnotu, nýbrž kolísá mezi $+\infty$ a $-\infty$.

Blíží-li se z k místu $z = \infty$ některou jinou cestou v rovině komplexního argumentu, nemá taktéž lim $\frac{1}{\Gamma(z)}$ určitou hodnotu.

Bod $z = \infty$ jest podstatně singulárným bodem*) funkce $\frac{1}{\Gamma(z)}$.



Z předeslaného vysvítá, že jest funkce $\Gamma(z)$ jednoznačnou funkcí, mající v místech $z = 0, -1, -2, \ldots$ *póly 1. řádu*; mimo tyto jest v celém konečnu *regulárnou* a nemá v konečnu

*) Bod $z = \infty$ jest *mezným* bodem *nullových* bodů *1. řádu* funkce $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

žádných bodů nullových, což jest přímo z rovnice (15) zjevno. Pro $\lim z = +\infty$ jest $\lim \Gamma(z) = +\infty$; pro $\lim z = -\infty$ nemá $\lim \Gamma(z)$ určitou hodnotu, nýbrž kolísá mezi $+\infty$ a $-\infty$.

Blíží-li se z k místu $z = \infty$ některou jinou cestou v rovině komplexního argumentu, nemá taktéž $\lim \Gamma(z)$ určitou hodnotu.

Bod $z = \infty$ jest podstatně singulárným bodem*) funkce $\Gamma(z)$.

Ve vedlejším obrazci jsou příslušnými křivkami graficky vyjádřeny průběhy funkcí $\Gamma(z)$ a $\frac{1}{\Gamma(z)}$ pro část reálného oboru argumentu z.

(Pokračování.)

Rapports présentés au Congrés International de Physique,

réuni à Paris en 1900 sous les auspices de la Société Française de Physique, ressemblés et publiés par *Ch. Ed. Guillaume* et *L. Poincaré.*

Referuje

Dr. **Vladimír Novák**,
professor české techniky v Brně.

III. díl:

Elektrooptika a ionisace, fysika praktická, kosmická a biologická.**)

1. *Theorie v novější době odkrytých zjevů magneticko-optických. H. A. Lorentz.*

Zjev Zeemanův, jímž dokázáno bylo působení pole magnetického na emissi světelnou, stal se základem četných prací experimentálních i theoretických, které prohloubily studium radiace i absorpce.

Auktor, omezuje se pouze na theoretickou část, uvádí předem elementární theorii zjevu Zeemanova. Emissi vy-

---

*) Bod $z = \infty$ jest mezným bodem *pólů 1. řádu* funkce $\Gamma(z)$.

**) O I. a II. díle bylo referováno v lonském ročníku tohoto Časopisu.