Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sýkora

Jak vyjádříme plochu trojúhelníka těžnicemi jeho

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 1, 86--88

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/124070`

Příklad 1.

$$\frac{3}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}=1+\sqrt[3]{2}.$$

Příklad 2.

$$\frac{24}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}}=3(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}).$$

Jak vyjádříme plochu trojúhelníka těžnicemi jeho.

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

Plocha P trojúhelníka vyjádřená stranami jeho, jest

$$16P^2=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2. \tag{I}$$

Značíme-li těžnici spojující střed strany a s protilehlým vrcholem písmenem α, a úhel, jejž s touto stranou tvoří a proti straně b leží, μ, máme

$$b^2=\alpha^2+\frac{a^2}{4}-a\,\alpha\cos\mu$$

$$c^2=\alpha^2+\frac{a^2}{4}+a\,\alpha\cos\mu$$

a sečtouce

$$b^2+c^2-\frac{a^2}{2}=2\alpha^2.$$

Obdobně dostaneme pro těžnice β, γ,

$$a^2+c^2-\frac{b^2}{2}=2\beta^2,$$

$$a^2+b^2-\frac{c^2}{2}=2\gamma^2.$$

Vypočtouce z rovnic těchto a^2, b^2, c^2, nabudeme

$$a^2=\frac{4}{9}(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2)$$

$$b^2 = \frac{4}{9}(2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2)$$

$$c^2 = \frac{4}{9}(2\,\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2)$$

a zavedeme-li tyto hodnoty do vzorce (I),

$$81\,P^2 = 4\,(2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2)\,(2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2) - (5\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2$$

čili

$$9\,P^2 = 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4.$$

Výraz na pravé straně této rovnice značí 16eronásobnou druhou mocninu plochy trojúhelníka o stranách α, β, γ, totiž plochy trojúhelníka, jehož strany jsou těžnice daného trojúhelníka; poznamenáme-li ji P_t, jest

$$9\,P^2 = 16\,P_t^2,$$

tedy

$$P = \frac{4}{3}P_t\,,$$

t. j. „*Plocha trojúhelníka rovná se* $\frac{4}{3}$ *plochy trojúhelníka sestrojeného z jeho těžnic.*“

Naopak

$$P_t = \frac{3}{4}P\,,$$

t. j. „*Plocha trojúhelníka sestrojeného z těžnic daného trojúhelníka jako stran rovná se* $\frac{3}{4}$ *plochy trojúhelníka původního.*“

Vskutku, vložíme-li hodnoty

$$\alpha^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

$$\beta^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4},$$

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

do rovnice

$$16\,P_t^2 = 4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2,$$

nabudeme

$$16\,P_t^2 = \left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right) - \frac{1}{16}(5c^2 - a^2 - b^2)^2$$

aneb

$$(16\,P_t)^2 = 9\,(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2\,b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) = 9\,.\,16P^2,$$

tudíž

$$P_t = \frac{3}{4}\,P.$$

Poznámka redakční. K témuž výsledku dospějeme touto úvahou:

Protínají-li se těžnice trojúhelníka ABC v bodě T a prodloužíme-li těžnici CC' o délku $C'D = TC'$, jest

$$AT = \frac{2}{3}\,\alpha, \quad AD = BT = \frac{2}{3}\,\beta, \quad DT = \frac{2}{3}\,\gamma;$$

mimo to jest

$$\triangle\,ADT = \triangle\,ABT = \frac{1}{3}\,\triangle\,ABC.$$

Trojúhelník ABC rovná se tedy obsahem 3násobnému trojúhelníku sestrojenému ze stran $\frac{2}{3}\,\alpha$, $\frac{2}{3}\,\beta$, $\frac{2}{3}\,\gamma$

$$\triangle\,ABC = P = 3P_t, \quad \triangle\,ADT = \frac{4}{9}\,P_t,$$

tudíž

$$P = \frac{4}{3}\,P_t.$$

O barometrickém měření výšek.

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

Tlak vzduchu jest působen vahou jeho a měří se výškou rtuťového sloupce, který jej drží v rovnováze.

* Tlak B vzduchu na povrchu země (moře) liší se od tlaku b vzduchu ve výšce x o váhu vzduchového sloupce o výšce x.