Bohumil Machytka

Speciální grupy G_8 und G_4 rovinných involucí a křivky k nim invariantní

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 3, 245--253

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/124058`

Speciální grupy $\mathfrak{G}_8$ a $\mathfrak{G}_4$ rovinných involucí a křivky k nim invariantní.

Napsal *Boh. Machytka.*

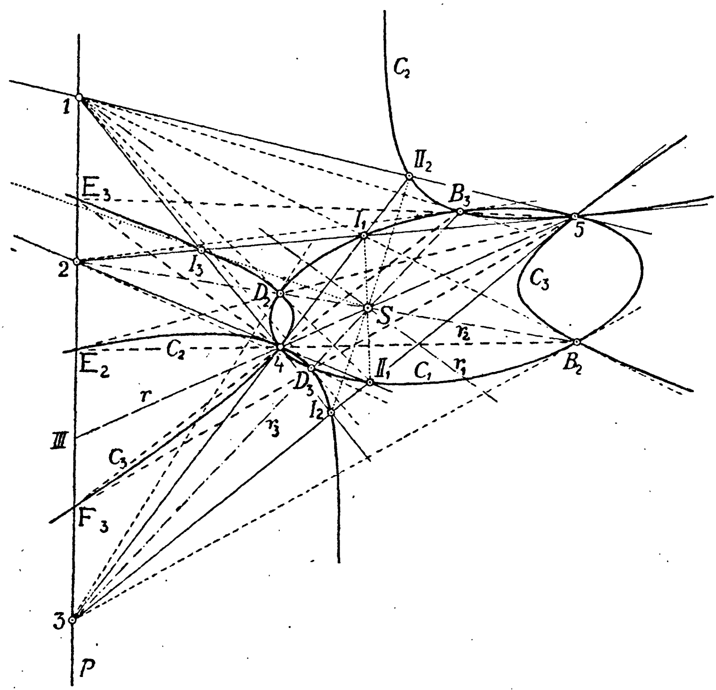
V práci „O jistých grupách Jonquièrových rovinných involucí"[1]) zabýval jsem se studiem grupy 16. stupně G_{16} kvadratických a kubických rovinných involucí, jež jest dokonale určena skupinou pěti bodů $A_1, A_2, — — A_5$ v rovině obecně položených a význačna tím, že reprodukuje ∞^r křivek stupně $6n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, které mají v pěti bodech (A) body $2n$-násobné a tvoří jistý lineární systém $\sum_r^{6n}$, jehož dimense $r = \frac{n(n+3)}{2}$. Ukázal jsem zároveň, kterak se grupa G_{16} redukuje v grupu $\mathfrak{G}_8$ resp. $\mathfrak{G}_4$ při zvláštních polohách základních pěti bodů a sice 1. jestliže tři z nich leží v přímce, 2. jestliže dvě trojice bodové leží v přímce. Chci nyní doplniti vyšetřování těchto dvou případů hlavně po stránce analytické, zvláště pak ukázati, kterak se redukcí grupy G_{16} v $\mathfrak{G}_8$ resp. $\mathfrak{G}_4$ změní charakteristické lineární systémy $\sum_r^{6n}$ v systémy $\sum_r^{4n}$ resp. $\sum_r^{2n}$.

1. V prvém případě nechť leží body A_1, A_2, A_3 na přímce p a spojnice $r \equiv \overline{A_4 A_5}$ nechť seče přímku p v bodě III. [Viz obr., kde body skupiny (A) jsou značeny toliko indexy.] Jsou-li i, h, k tři různá čísla, jež mají některou z hodnot 1, 2, 3, označme ty dva diagonálné vrcholy čtyřrohu $A_h A_k A_4 A_5$, které neleží na přímce p, znaky I_i, II_i a sestrojme dále kuželosečku C_i^2, která se dotýká přímek $\overline{A_i A_4}$ a $\overline{A_i A_5}$ v bodech A_4, A_5 a prochází mimo to body I_i a II_i; — podmínce Pascalově jest vyhověno. Kuželosečky takové jsou tři, neboť $i = 1, 2, 3$. Všechny tři spojnice $\overline{I_i II_i}$ protínají přímku r v témže bodě S, při čemž jest $(A_4 A_5 S\, III) = -1$.

Grupa G_{16} příslušná k této skupině pětibodové (A) redukuje se v grupu osmého stupně $\mathfrak{G}_8$ složenou ze tří obecných kvadratických inversí $J_i^{(2)}(A_i;\ C_i^2)$ o středu A_i a základní křivce C_i^2, ze tří kvadratických involucí třídy prvé $T_i^{(2)}$ a z involutorní lineární centrické homologie $H^{(1)}$ o ose p a středu S. Při tom jest involuce $T_i^{(2)}$ určena svými hlavními body A_4, A_5, A_i a párem bodů korespondenčních A_h, A_k.

[1]) Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Karlovy university. R. 1925, čís. 27, str. 52.

Komutativní grupa $\mathfrak{G}_8$ reprodukuje každou ze tří kuželoseček C_i^2; na křivce C_i^2 vznikají tak tři bodové involuce: involuce $g_2^1(A_h; \overline{A_k S})$ o středu A_h a ose $\overline{A_k S}$ vytvořená inversí $J_h^{(2)}$ a involucí $T_k^{(2)}$, obdobně involuce $g_2^1(A_k; \overline{A_h S})$ vytvořená transformacemi $J_k^{(2)}$ a $T_h^{(2)}$, a posléze involuce $g_2^1(S; p)$ vytvořená homologií $H^{(1)}$ a transformací $T_i^{(2)}$. Odtud plynou přímo tyto vztahy:



Každé dvě kuželosečky C_i^2 a C_h^2 protínají se mimo body A_4, A_5 v dalších dvou bodech B_k, D_k, které leží na spojnici $\overline{SA_k}$, při čemž tečny v nich sestrojené ke křivce C_i^2 se sbíhají v bodě A_h a opačně tečny v nich sestrojené ku C_h^2 jdou bodem A_i. Body B_k, D_k jsou samodružnými body involuce $T_k^{(2)}$; další dva samodružné body této involuce jsou zřejmě průsečíky E_k, F_k kuželosečky C_k^2 s přímkou p. Čtyřroh $B_k D_k E_k F_k$ má diagonální trojúhelník $A_4 A_5 A_k$.

Z komutativních součinů

$$T_i^{(2)} . T_h^{(2)} \equiv T_k^{(2)};$$

1.) $H^{(1)}.T_i^{(2)} \equiv J_i^{(2)}$, $H^{(1)}.J_i^{(2)} \equiv T_i^{(2)}$, $T_i^{(2)}.J_i^{(2)} \equiv H^{(1)}$;
$T_i^{(2)}.J_h^{(2)} \equiv J_k^{(2)}$, $J_h^{(2)}.J_k^{(2)} \equiv T_i^{(2)}$,

plyne existence podgrup: základní podgrupy G_4: 1, $T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$, $T_3^{(2)}$; tří podgrup $R_4^{(i)}$: 1, $H^{(1)}$, $T_i^{(2)}$, $J_i^{(2)}$ a tří podgrup $Q_4^{(i)}$: 1, $T_i^{(2)}$, $J_h^{(2)}$, $J_k^{(2)}$.

Grupa $\mathfrak{G}_8$ jest zvláštním případem grupy G_8 složené ze tří kubických inversí a čtyř kvadratických involucí třídy prvé,[2]) která jest co podgrupa grupy G_{16} tím význačna, že reprodukuje ∞^1 kubických křivek jistého svazku. Reprodukuje tudíž i grupa $\mathfrak{G}_8$ kubické křivky jistého svazku $\sum_1^3$, který jest tím charakterisován,[3]) že proměnná křivka K_A^3 tohoto svazku prochází pěti body A_1, A_2, — — A_5 a seče přímku $r \equiv \overline{A_4A_5}$ v dalším bodě A, který tvoří na této křivce s body A_1, A_2, A_3 čtveřinu bodů konjugovaných, které mají společný bod tečnový. Ježto body A_1, A_2, A_3 leží na přímce p, musí býti čtvrtý bod A inflexním bodem pro příslušnou křivku K_A^3 a přímka p jeho harmonickou polárou. Křivka K_A^3 jest tedy reprodukována lineární centrickou involutorní homologií $H^{(1)}$ $(A; p)$ a ježto jest též invariantní vzhledem k homologii $H^{(1)}(S; p)$, musí býti $A \equiv S$. Proměnné křivky svazku $\sum_1^3$ procházejí tedy dalším pevným bodem S přímky r.

Grupa $\mathfrak{G}_8$ *reprodukuje tedy kubické křivky, které mají společný inflexní bod* S, *dotýkají se přímek* $\overline{SA_1}$, $\overline{SA_2}$, $\overline{SA_3}$ *v bodech* A_1, A_2, A_3 *a procházejí dalšími dvěma body* A_4 *a* A_5 *tvoříce svazek* $\sum_1^3$. Inflexní tečny v bodě S ke křivkám svazku tvoří svazek; křivka, která se dotýká v bodě S přímky r, jest nutně reducibilní a skládá se zřejmě z přímky r a dvojnásobně vzaté přímky p. Podobně jest zřejmo, že ta křivka svazku, která se dotýká v bodě S přímky $r_i \equiv \overline{SA_i} \equiv \overline{B_iD_i}$, jest složena z této přímky r_i, která jest invariantní k podgrupě $R_4^{(i)}$, a tudíž z další kuželosečky K_i^2, která musí býti k téže podgrupě invariantní a která tedy musí přímce r_i odpovídati ve zbývajících transformacích grupy $\mathfrak{G}_8$.

Skutečně převádějí transformace $J_h^{(2)}$, $J_k^{(2)}$, $T_h^{(2)}$, $T_k^{(2)}$ přímku r_i v touž kuželosečku K_i^2, která prochází body A_4, A_5, B_i, D_i, A_h, A_k a v posledních dvou bodech se dotýká přímek r_h a r_k. Kuželosečka K_i^2 náleží svazku $[C_h^2, C_k^2]$; — každá kuželosečka tohoto svazku jest invariantní k podgrupě $R_4^{(i)}$.

---

[2]) Viz v uvedené práci čl. V. str. 27.
[3]) Viz tamtéž str. 22. a další.

Ve svazku $\sum_1^3$ nalézají se tudíž čtyři křivky reducibilní; křivka složená z přímky r a dvojnásobně vzaté přímky p a tři křivky složené z přímky r_i a kuželosečky K_i^2, při čemž $i = 1, 2, 3$.

Abychom v dalším doplnili úvahy po stránce analytické, zvolme v rovině soustavu souřadnou tak, že body skupiny (A) mají souřadnice:

2.) $A_5\ (1, 0, 0)$; $A_4\ (0, 1, 0)$; $A_3\ (0, 0, 1)$; $A_1\ (1, 1, 1)$; $A_2\ (1, 1, a)$.

Výpočtem snadno seznáme, že další body určeny jsou souřadnicemi:

$$\text{III}\ (1, 1, 0);\quad S\,(1, -1, 0);\quad \text{I}_1\ (0, 1, a),\quad \text{II}_1\ (1, 0, a);$$
$$\text{I}_2\ (1, 0, 1),\quad \text{II}_2\,(0, 1, 1);\quad \text{I}_3\ (a, 1, a),\quad \text{II}_3\ (1, a, a),$$

a další útvary rovnicemi:

$$3.)\ \left\{\begin{array}{l}
C_1^2 \equiv \varphi_1 \equiv a x_1 x_2 - a x_3 (x_1 + x_2) + x_3^2 = 0,\\
C_2^2 \equiv \varphi_2 \equiv a x_1 x_2 - x_3 (x_1 + x_2) + x_3^2 = 0,\\
C_3^2 \equiv \varphi_3 \equiv a x_1 x_2 - x_3^2 = 0,\\
r_1 \equiv f_1 \equiv 2x_3 - x_1 - x_2 = 0,\quad r_2 \equiv f_2 \equiv 2x_3 - a(x_1 + x_2) = 0,\\
r_3 \equiv f_3 \equiv x_1 + x_2 = 0,\quad r \equiv x_3 = 0,\quad p \equiv x_1 - x_2 = 0,\\
K_1^2 \equiv \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 2a x_1 x_2 - x_3 (x_1 + x_2) = 0,\\
K_2^2 \equiv \varphi_3 + \varphi_1 \equiv a\,(2x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3) = 0,\\
K_3^2 \equiv \varphi_1 + \varphi_2 \equiv 2a x_1 x_2 - (1 + a)\, x_3 (x_1 + x_2) + 2x_3^2 = 0.
\end{array}\right.$$

Zároveň jest zřejmo, že platí vztahy:

4.) $\varphi_2 - \varphi_3 \equiv x_3 f_1,\quad \varphi_1 - \varphi_3 \equiv x_3 f_2,\quad \varphi_1 - \varphi_2 \equiv (1 - a)\, x_3 f_3.$

Transformace grupy $\mathfrak{G}_8$ dány jsou relacemi:

$$5.)\ \left\{\begin{array}{l}
H^{(1)}:\ \varrho\xi_1 = x_2,\quad \varrho\xi_2 = x_1,\quad \varrho\xi_3 = x_3;\\
J_1^{(2)}:\ \varrho\xi_1 = (x_1 - x_3)\,(x_3 - a x_2),\quad \varrho\xi_2 = (x_2 - x_3)\,(x_3 - a x_1),\\
\qquad\qquad \varrho\xi_3 = a\,(x_2 - x_3)\,(x_3 - x_1);\\
J_2^{(2)}:\ \varrho\xi_1 = (x_2 - x_3)\,(a x_1 - x_3),\quad \varrho\xi_2 = (x_1 - x_3)\,(a x_2 - x_3),\\
\qquad\qquad \varrho\xi_3 = (a x_1 - x_3)\,(a x_2 - x_3);\\
J_3^{(2)}:\ \varrho\xi_1 = x_1 x_3,\quad \varrho\xi_2 = x_2 x_3,\quad \varrho\xi_3 = a x_1 x_2;\\
T_1^{(2)}:\ \varrho\xi_1 = (x_2 - x_3)\,(x_3 - a x_1),\quad \varrho\xi_2 = (x_1 - x_3)\,(x_3 - a x_2),\\
\qquad\qquad \varrho\xi_3 = a\,(x_2 - x_3)\,(x_3 - x_1);\\
T_2^{(2)}:\ \varrho\xi_1 = (x_1 - x_3)\,(a x_2 - x_3),\quad \varrho\xi_2 = (x_2 - x_3)\,(a x_1 - x_3),\\
\qquad\qquad \varrho\xi_3 = (a x_1 - x_3)\,(a x_2 - x_3);\\
T_3^{(2)}:\ \varrho\xi_1 = x_2 x_3,\quad \varrho\xi_2 = x_1 x_3,\quad \varrho\xi_3 = a x_1 x_2.
\end{array}\right.$$

Samodružné body B_i, D_i, E_i, F_i involucí $T_i^{(2)}$ mají souřadnice:

$$\begin{array}{lll} B_1\,(2\alpha_1-1,\ 1,\ \alpha_1) & B_2\,(2\beta_1-a,\ a,\ a\beta_1) & B_3\,(\ 1,\ -1,\ \sqrt{a}) \\ D_1\,(2\alpha_2-1,\ 1,\ \alpha_2) & D_2\,(2\beta_2-a,\ a,\ a\beta_2) & D_3\,(-1,\ 1,\ \sqrt{a}) \\ E_1\,(\ \alpha_2,\ \alpha_2,\ a\ ) & E_2\,(\ \beta_2,\ \beta_2,\ a) & E_3\,(\ 1,\ 1,\ -\sqrt{a}) \\ F_1\,(\ \alpha_1,\ \alpha_1,\ a\ ) & F_2\,(\ \beta_1,\ \beta_1,\ a) & F_3\,(\ 1,\ 1,\ \sqrt{a}), \end{array}$$

při čemž α_1, α_2 a β_1, β_2 jsou kořeny kvadratických rovnic

$$\alpha^2 - 2a\alpha + a = 0, \qquad \beta^2 - 2\beta + a = 0.$$

Seznali jsme, že svazek $\sum_1^3$ kubických křivek invariantních ke grupě $\mathfrak{G}_8$ obsahuje tři kubické křivky složené z jedné přímky r_i a jedné kuželosečky K_i^2, při čemž $i = 1, 2, 3$. Vzhledem ke vztahům 3.) můžeme tedy svazek $\sum_1^3$ vyjádřiti kteroukoli ze tří rovnic:

6.) $\lambda f_i\,(\varphi_h + \varphi_k) + \mu f_h(\varphi_k + \varphi_i) = 0$, kde $i, h, k = 1, 2, 3$.

Ježto jsme seznali, že přímka $r_k \equiv f_k = 0$ dotýká se kuželosečky

$$K_i^2 \equiv \varphi_h + \varphi_k = 0 \text{ a kuželosečky } K_h^2 \equiv \varphi_k + \varphi_i = 0$$

v témže bodě A_k, jest zřejmo opět, že rovnice 6.) značí svazek kubických křivek, které se dotýkají v bodech A_1, A_2, A_3 přímek r_1, r_2, r_3 a procházejí body A_4, A_5 a S, takže tento poslední bod jest jejich společným bodem inflexním.

Zvolíme-li $i = 1$, $h = 2$, $k = 3$, máme rovnici svazku $\sum_1^3$ ve tvaru:

6′) $$\lambda\,(2x_3 - x_1 - x_2)\,(2ax_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3) + \\ + \mu\,(2x_3 - ax_1 - ax_2)\,(2x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3) = 0.$$

Učiníme-li v této rovnici $\lambda + \mu = 0$, přejde ve tvar $x_3\,(x_1 - x_2)^2 = 0$, takže křivka se skládá z přímky r a dvojnásobně vzaté přímky p.

Síť kuželoseček

7.) $$\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 = 0$$

skládá se zřejmě z křivek invariantních vzhledem k homologii $H^{(1)}\,(S, p)$. Geometricky jest to patrno již z toho, že čtyřroh A_4, A_5, B_i, D_i, který tvoří basi svazku $\varphi_h - \lambda\varphi_k = 0$, má za diagonálný vrchol bod S a přímku p za protější diagonálnou stranu. Jacobian této sítě skládá se tedy z přímky p a dvojnásobně vzaté přímky $r \equiv \overline{A_4 A_5}$, neboť body A_4, A_5 leží na všech křivkách sítě. Plyne to ostatně ihned analyticky.

Seznali jsme, že každá kuželosečka svazku $\varphi_h + \lambda\varphi_k = 0$ jest invariantní vzhledem k podgrupě $R_4^{(i)}$ složené z transformací 1, $H^{($

$J^{(2)}$, $T_{ti}^{(2)}$. Ostatní transformace grupy $\mathfrak{G}_8$ vytvořují ve svazku tom involuci o samodružných elementech $\varphi_h = 0$, $\varphi_k = 0$. Jest tedy každá reducibilní kvartika svazku

$$\varphi_h^2 - \lambda \varphi_k^2 = 0$$

invariantní k celé grupě $\mathfrak{G}_8$. Poměry $\frac{\varphi_1{}^2}{\varphi_3{}^2}$, $\frac{\varphi_2{}^2}{\varphi_3{}^2}$ jsou tudíž identické kovarianty této grupy. Ostatně plyne to ihned analyticky, neboť značí-li $\varphi_i(\mathfrak{J})$ formu, která vzniká z kvadratické formy φ_i transformací $\mathfrak{J}$, pak platí:

$$\varphi_i(H) \equiv \varphi_i,$$
$$\varphi_i(J_1) \equiv \varepsilon_{i1}\, a\,(a-1)\,(x_1-x_3)\,(x_2-x_3)\,\varphi_i \equiv \varphi_i(T_1),$$
$$\varphi_i(J_2) \equiv \varepsilon_{i2}\,(1-a)\,(ax_1-x_3)\,(ax_2-x_3)\,\varphi_i \equiv \varphi_i(T_2),$$
$$\varphi_i(J_3) \equiv \varepsilon_{i3}\, ax_1\, x_2\, \varphi_i \equiv \varphi_i(T_3),$$

při čemž jest $\varepsilon_{ii} = -1$ a $\varepsilon_{ih} = 1$.

G r u p a $\mathfrak{G}_8$ r e p r o d u k u j e t u d í ž ∞^2 s p e c i á l n í c h e l i p t i c k ý c h k v a r t i k, k t e r é m a j í v A_4 a A_5 b o d y d v o j n é a t v o ř í s í ť $\sum_2^4$ d a n o u r e l a c í

$$8.)\qquad \lambda_1\, \varphi_1^2 + \lambda_2\, \varphi_2^2 + \lambda_3\, \varphi_3^2 = 0.$$

G e o m e t r i c k y j e s t z ř e j m o, ž e J a c o b i a n t é t o s í t ě s k l á d á s e z e t ř í z á k l a d n í c h k u ž e l o s e č e k $C_i^2 \equiv \varphi_i = 0$, z p ř í m k y p a d v o j n á s o b n ě v z a t é p ř í m k y r. Plyne to ihned též analyticky, vezmeme-li zřetel k Jacobianu sítě kuželoseček 7.). Grupa $\mathfrak{G}_8$ jest tedy zvláštním případem grupy G_8 kvadratických involucí, které reprodukují obecnou eliptickou rovinnou kvartiku, vlastně ∞^2 takových kvartik; — jedna kvadratická inverse grupy G_8 přešla v tomto případě v lineární centrickou involutorní homologii.[4])

V s í t i $\sum_2^4$ n a l é z á s e z ř e j m ě s v a z e k k u b i c k ý c h k ř i v e k $\sum_1^3$ s p o j e n ý s p ř í m k o u r. Učiníme-li totiž v rovnici 8.) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, obdržíme relaci, kterou lze psáti ve tvaru

$$\lambda_i\,(\varphi_i - \varphi_k)\,(\varphi_i + \varphi_k) + \lambda_h\,(\varphi_h - \varphi_k)\,(\varphi_h + \varphi_k) = 0,$$

a tudíž vzhledem ke vztahům 3.) a 4.) ve tvaru

$$x_3\,[\lambda_i f_h\,(\varphi_i + \varphi_k) + \lambda_h f_i\,(\varphi_h + \varphi_k)] = 0,$$

čímž, vzhledem k rovnici 6.), tvrzení prokázáno.

O b e c n ě s e z n á v á m e, ž e g r u p a $\mathfrak{G}_8$ r e p r o d u k u j e ∞^r k ř i v e k s t u p n ě $4n$, k t e r é m a j í v b o d e c h A_4 a A_5 b o d y

---

[4]) Viz B. Bydžovský: Eliptické kvartiky rovinné, projektivně specialisované. Rozpravy Akademie II., č. 32, roč. XXXIII. (1924), kap. III.

$2n$-násobné a tvoří lineární systém $\sum_r^{4n}$ daný relací

9.) $$F_n(\varphi_1^2, \varphi_2^2, \varphi_3^2) = 0,$$

kde F_n značí obecnou ternární formu n. stupně, vzhledem k φ_1^2, φ_2^2, φ_3^2 a tudíž $r = \frac{n(n+3)}{2}$.[5])

Redukcí grupy G_{16} v $\mathfrak{G}_8$ redukovaly se tudíž lineární systémy $\sum_r^{6n}$ v systémy $\sum_r^{4n}$ spojené s přímkou $p \equiv \overline{A_1 A_2 A_3}$ vzatou $2n$-násobně.

2.) V případě druhém, kdy dvě trojice bodové ze skupiny (A) leží v přímce, přejde grupa G_{16} v grupu $\mathfrak{G}_4$. Zvolme označení tak, že jest $p_1 \equiv \overline{A_1 A_2 A_3}$ a $p_2 \equiv \overline{A_3 A_4 A_5}$. Ve čtyřrohu $A_1 A_2 A_4 A_5$ sestrojme k diagonálnému vrcholu A_3 protější diagonálnou stranu p_3 a určeme průsečíky $S_2 \equiv (p_1, p_3)$ a $S_1 \equiv (p_2, p_3)$. Grupa $\mathfrak{G}_4$ skládá se potom z identity a tří lineárních centrických involutorních homologií H_1 $(S_1; p_1)$, H_2 $(S_2; p_2)$ a H_3 $(A_3; p_3)$. Zvolíme-li strany p_1, p_2, p_3 za strany souřadného trojúhelníku, pak dány jsou transformace grupy $\mathfrak{G}_4$ relacemi:

10.) $$\begin{cases} H_1: & \varrho\xi_1 = -x_1, & \varrho\xi_2 = x_2, & \varrho\xi_3 = x_3 \\ H_2: & \varrho\xi_1 = x_1, & \varrho\xi_2 = -x_2, & \varrho\xi_3 = x_3 \\ H_3: & \varrho\xi_1 = x_1, & \varrho\xi_2 = x_2, & \varrho\xi_3 = -x_3. \end{cases}$$

Transformace grupy $\mathfrak{G}_4$ reprodukují tudíž ∞^2 kuželoseček, které mají souřadný trojúhelník za polárný a tvoří síť $\sum_2^2$ danou relací

11.) $$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 = 0.$$

Jacobián sítě tvoří strany souřadného trojúhelníku.

Obecně jest patrno, že transformace grupy $\mathfrak{G}_4$ reprodukují ∞^r křivek stupně $2n$, které tvoří lineární systém $\sum_r^{2n}$ daný relací

12.) $$F_n(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0,$$

kde F_n značí formu n. stupně vzhledem k x_1^2, x_2^2, x_3^2 a tudíž dimense $r = \frac{n(n+3)}{2}$.

Redukcí grupy G_{16} v $\mathfrak{G}_4$ redukovaly se lineární systémy $\sum_r^{6n}$ v systémy $\sum_r^{2n}$ spojené s přímkami $p_1 \equiv \overline{A_1 A_2 A_3}$ a $p_2 \equiv \overline{A_3 A_4 A_5}$ vzatými $2n$-násobně.

*

[5]) Viz B. Machytka: Grupy G_8, G_{16} a G_{32} rovinných kvadratických transformací a lineární systémy křivek stupně $4n$ a $8n$ k nim invariantních. Rozpravy Akademie II. Roč. XXXIV., (1925), čís. 17, čl. I.

Sur des groupes particuliers $\mathfrak{G}_8$ et $\mathfrak{G}_4$ d'involutions planes et les courbes invariantes respectives.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur a étudié dans son travail antérieur intitulé: „Certains groupes d'involutions planes de Jonquière“[1]) un groupe du seizième ordre G_{16} d'involutions planes cubiques et quadratiques, déterminé parfaitement par cinq points A_1, A_2, ... A_5 et reproduisant ∞^r de courbes de l'ordre $6n$; ces courbes ont les points du groupe (A) pour points $2n$-uples et forment des systèmes linéaires $\sum_r^{6n}$ à la dimension $r = \frac{n(n+3)}{2}$. Il a étudié la réduction du groupe G_{16} dans les cas particuliers où 1.) trois des points du groupe A se trouvent sur une droite, 2.) deux ternes de points possèdent cette propriété. Dans le présent travail il étudie ces deux cas particuliers par la méthode analytique et il trouve les résultats principaux suivants:

1.) Dans le premier cas, où trois points, p. ex. A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite p, le groupe G_{16} se réduit à un groupe contenant trois inversions quadratiques $J_i^{(2)}(A_i, C_i^2)$ au centre A_i et ayant C_i^2 pour conique fondamentale, trois involutions quadratiques $T_i^{(2)}(A_4, A_5, A_i)$ aux points principaux A_4, A_5, A_i et une homologie involutive $H, (S, p)$ au centre S et à l'axe p. Les points et les figures caractéristiques sont donnés par les coordonnées (2) et (3), les transformations du groupe $\mathfrak{G}_8$ par les relations (5).

Les transformations du groupe $\mathfrak{G}_8$ reproduisent trois coniques fondamentales $\varphi_i = 0$ des inversions $J_i^{(2)}$ et les cubiques qui touchent, aux points A_1, A_2, A_3 respectivement, les droites $\overline{SA_1}$, $\overline{SA_2}$, $\overline{SA_3}$, et passent par les points A_4, A_5, et dont S est un point d'inflexion commun; par conséquent, ces cubiques forment un faisceau $\sum_1^3$, donné par la relation (6). L'équation du faisceau fait voir que le faisceau contient trois courbes composées de la droite $r_i \equiv SA_i \equiv f_i = 0$ et de la conique $K_i^2 \equiv \varphi_h + \varphi_k = 0$ $(i, h, k = = 1, 2, 3)$ et, en outre, la courbe composée de la droite $r \equiv \overline{A_4 A_5}$ et de la droite double $p \equiv \overline{A_1 A_2 A_3}$. Le groupe $\mathfrak{G}_8$ est caractérisé par ce qu'il reproduit ∞^r de courbes spéciales de l'ordre $4n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ayant en A_4, A_5 des points $2n$-uples et formant des systèmes linéaires $\sum_r^{4n}$, donnés par la relation (9), où F_n désigne une forme ternaire générale du n-ième ordre par rapport à φ_1^2, φ_2^2, φ_3^2. Donc, le groupe $\mathfrak{G}_8$ est un cas spécial du groupe

[1]) Publications de la faculté des sciences de l'Université Charles, 1925, No. 27.

bien connu du 8[e] ordre qui reproduit une quartique elliptique plane générale.[2]) La réduction du groupe G_{16} au groupe $\mathfrak{G}_8$ a eu pour conséquence que les systèmes linéaires $\sum_n^{6n}$ ont été réduits aux systèmes $\sum_r^{4n}$ et à la droite $p \equiv \overline{A_1 A_2 A_3}$ considérée comme droite $2n$-uple.

2. Dans le second cas, où deux ternes de points du groupe (A) sont en ligne droite, de sorte qu'on ait, p. ex., $p \equiv \overline{A_1 A_2 A_3}$, $p_2 \equiv \overline{A_3 A_4 A_5}$, le groupe G_{16} se réduit au groupe contenant trois homologies involutives H_1, H_2, H_3 données par les équations (10), le triangle de référence étant formé par les cotés p_1, p_2, p_3, (axes des homologies) et le côté p_3 faisant division harmonique avec le point A_3 par rapport aux couples A_1, A_2 et A_4, A_5. Le groupe $\mathfrak{G}_4$ est caractérisé par ce qu'il reproduit ∞^r de courbes de l'ordre $2n$ formant des systèmes linéaires $\sum_r^{2n}$, donnés par la relation (12). Par suite de la réduction du groupe G_{16} au groupe $\mathfrak{G}_4$, les systèmes linéaires $\sum_r^{6n}$ on été réduits aux systéme $\sum_r^{2n}$ et les droites p_1 et p_2 $2n$-uples.

---

[1]) Voir *B. Bydžovský:* Sur des quartiques elliptiques planes, spéciales au point de vue projectif. Bulletin international de l'Académie tchéque des Sciences, 1925, p. 200. — *B. Machytka:* Sur les groupes G_8, G_{16} et G_{32} de transformations planes quadratiques et sur les systèmes linéaires de courbes d'ordre $4n$, et $8n$ se reproduisant par ces groupes. Bul. international de l'Académie tchèque des Sciences 1925, No. 17., chap. I.