Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

V. Zimmerman

O reálném integrálu

$\backslash int\backslash frac(Bx + C), dx(\backslash alphax^2 + 2\backslash betax + \backslash gamma)\backslash, \backslash sqrtax^2 + 2bx +$

s podmínkou $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 3-4, 226--248

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/124021`

O reálném integrálu $\int \frac{(Bx+C)\,dx}{(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+2bx+c}}$ s podmínkou $\alpha\gamma-\beta^2>0$.

Napsal Dr. *V. Zimmerman.*

§ 1. Jest integrovati

$$\int^{[D]}\frac{(Bx+C)\,dx}{(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+2\,bx+c}}, \tag{1}$$

kde $B, C, \alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ jsou daná čísla reálná. α, β, γ a a, b, c splňují ještě podle předpokladu nerovniny

$$\alpha\gamma-\beta^2>0 \tag{2}$$

(odkud plyne $\alpha\gamma>0$, $\alpha\neq 0$, $\gamma\neq 0$)

$$ac-b^2\neq 0. \tag{3}$$

Předpokládajíce, že proměnná x je reálná, budeme uvažovati integrál (1) v oboru D, kde platí podle předpokladu[1] ax^2+2bx+ $+c>0$. Položíme-li

$$\left.\begin{aligned}\alpha x^2+2\,\beta x+\gamma&=\psi(x),\\ ax^2+2\,bx+c&=f(x),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\sqrt{f(x)}=k,$$

integrál (1) nabude tvaru

$$\int^{[D]}\frac{(Bx+C)\,dx}{\psi(x)\,k}.$$

Definujme funkci t v témže oboru D rovnicí

$$t=\frac{\mu x+\nu}{k}\quad(D), \tag{5}$$

kde μ a ν jsou čísla reálná. Diferencováním obdržíme

$$dt=\frac{[(b\mu-a\nu)\,x+c\mu-b\nu]\,dx}{f(x)\,k}\quad(D). \tag{6}$$

[1]) Budeme označovati ve vzorcích definiční obor uvažovaných funkcí; u integrálů neurčitých je obor naznačen nad znakem integračním.

§ 2. Uvažujme nejprve případ, že koeficienty polynomů $\psi(x)$ a $f(x)$ jsou navzájem úměrné. V tomto případě platí

$$a = \varkappa\alpha, \qquad b = \varkappa\beta, \qquad c = \varkappa\gamma, \tag{7}$$

při čemž $\varkappa$ jest nutně různé od nuly, což ostatně plyne z nerovnin (2) a (3), v souhlase s identitou $ac - b^2 = \varkappa^2 (\alpha\gamma - \beta^2)$, již snadno odvodíme pomocí rovnic (7). Užijeme-li rovnic (6) a (7), dostaneme

$$\frac{\varkappa\,[(\beta\mu - \alpha\nu)\,x + \gamma\mu - \beta\nu]\,dx}{\varkappa\,\psi(x)\,k} = dt \quad (D)$$

anebo

$$\frac{[(\beta\mu - \alpha\gamma)\,x + \gamma\mu - \beta\nu]\,dx}{\psi(x)\,k} = dt \quad (D), \tag{8}$$

při čemž reálné konstanty μ a ν až doposud zůstaly libovolné. Na základě nerovniny (2) můžeme způsobit, aby konstanty μ a ν vyhovovaly rovnicím

$$\beta\mu - \alpha\nu = B, \quad \gamma\mu - \beta\nu = C,$$

tím, že položíme

$$\mu = \frac{\alpha C - \beta B}{\alpha\gamma - \beta^2}, \quad \gamma = \frac{\beta C - \gamma B}{\alpha\gamma - \beta^2}.$$

Pro tyto hodnoty μ a ν máme

$$\frac{(Bx + C)\,dx}{\psi(x)\,k} = dt = d\left(\frac{\mu x + \nu}{k}\right) \quad (D),$$

odkud plyne

$$\int^{[D]} \frac{(Bx + C)\,dx}{\psi(x)\,k} = t = \frac{\mu x + \nu}{k}$$

anebo

$$\int^{[D]} \frac{(Bx + C)\,dx}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{(\alpha C - \beta B)\,x + \beta C - \gamma B}{(\alpha\gamma - \beta^2)\sqrt{ax^2 + 2\,bx + c}}. \tag{9}$$

Příklad: Uvažujme integrál

$$\int \frac{(5x + 8)\,dx}{(3\,x^2 - 3\,x + 6)\sqrt{2\,x^2 - 2\,x + 4}}.$$

Koeficienty mnohočlenů $3\,x^2 - 3\,x + 6$ a $2\,x^2 - 2\,x + 4$ vyhovují podmínkám (2) a (3); jsou dokonce úměrné. Vzhledem k tomu, že mnohočlen $2\,x^2 - 2\,x + 4$ je stále kladný v oboru $[-\infty \ldots +\infty]$, obdržíme podle vzorce (9)

$$\int^{[-\infty \ldots +\infty]} \frac{(5\,x + 8)\,dx}{(3\,x^2 - 3\,x + 6)\sqrt{2\,x^2 - 2\,x + 4}} = \frac{2\,x - \frac{8}{3}}{\sqrt{2\,x^2 - 2\,x + 4}}.$$

§ 3. V dalším uvažujeme pouze případ, že koeficienty mnohočlenů $\psi(x)$ a $f(x)$ nejsou úměrné; jinými slovy, předpokládáme, že pro každou hodnotu $\varkappa$ platí

$$|a\varkappa - a| + |\beta\varkappa - b| + |\gamma\varkappa - c| > 0. \tag{10}$$

V tomto případě budeme potřebovati několik známých vět z teorie forem. Majíce na mysli některé modifikace a další dodatky těchto vět, podáme nejen jejich znění, nýbrž i důkaz.

Pomocná věta I. *Identita*

$$ux^2 + 2vx + w = \frac{(\mu x + \nu)^2}{\varrho}, \tag{11}$$

kde x značí nezávisle proměnnou, $u, v, w, \mu, \nu, \varrho$, konstanty, je možná pouze, platí-li

$$uw - v^2 = 0. \tag{12}$$

Identita (11) jest ekvivalentní s identitami

$$u = \frac{\mu^2}{\varrho},\quad v = \frac{\mu\nu}{\varrho},\quad w = \frac{\nu^2}{\varrho}, \tag{13}$$

z nichž plyne vztah

$$uw - v^2 = \frac{\mu^2}{\varrho}\cdot\frac{\nu^2}{\varrho} - \left(\frac{\mu\nu}{\varrho}\right)^2 = 0.$$

Z toho plynou tyto důsledky: 1. *Je-li $u = w = 0$, a identita* (11) *je splněna, platí také $v = 0$ a $\mu = \nu = 0$, při čemž číslo ϱ jest stále libovolné, ale různé od nuly.*

V souhlase se vztahem (12) a za předpokladu $u = 0$ (anebo $w = 0$) dostaneme $v = 0$. Mimo to máme, vzhledem k rovnosti $u = w = 0$, podle první a třetí z rovnic (13), $\mu = 0$ a $\nu = 0$. Platí tedy $u = v = w = \mu = \nu = 0$, a identita (11) jest splněna, při čemž ϱ zůstává libovolné, avšak, již podle tvaru této identity, různé od nuly.

2. *Je-li identita* (11) *splněna a platí-li zároveň $u \neq 0$ a $w \neq 0$, platí také $v \neq 0$.*

Tuto větu odvodíme přímo ze vztahu (12). V případě, že u, v, w, jsou reálná (což budeme v dalším stále předpokládati), plynou z identity (11) tyto věty:

3. *Platí-li $u \neq 0$ nebo $w \neq 0$ (anebo, po případě, zároveň $u \neq 0$ a $w \neq 0$); součet $u + w$ je různý od nuly a má totéž znaménko jako to z čísel u, w, které je různé od nuly.*

Neboť, platí-li $u \neq 0$, dostaneme vzhledem k rovnici (12),

$$u(u + w) = u^2 + uw = u^2 + v^2 \geq u^2 > 0,$$

odkud plyne, že u a $u + w$ mají totéž znaménko.

Zcela obdobně se dokáže, že je-li $w \neq 0$, mají w a $u + w$ rovněž totéž znaménko.

4. *Platí-li zároveň $u \neq 0$ a $w \neq 0$, všecka tři čísla u, w, $u + w$ mají totéž znamení.*

Tato věta plyne bezprostředně z věty předcházející.

Pomocná věta II. *Buďtež* $\psi(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ a $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ *dva mnohočleny druhého stupně s koeficienty* $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, *které nejsou, podle předpokladu, úměrné, čímž je podmínka* (10) *splněna.*

Jest dokázati, že identita

$$\sigma\psi(x) - f(x) \equiv \sigma(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) - (ax^2 + 2bx + c) = \frac{(\mu x + \nu)^2}{\varrho}, \quad (14)$$

kde $\sigma, \mu, \nu, \varrho$ *jsou konstanty, může býti splněna pouze, platí-li*

$$\Delta(\sigma) \equiv (\alpha\sigma - a)(\gamma\sigma - c) - (\beta\sigma - b)^2 = 0 \quad (15)$$

anebo

$$\Delta(\sigma) \equiv (\alpha\gamma - \beta^2)\sigma^2 - (\alpha c + \gamma a - 2\beta b)\sigma + ac - b^2 = 0, \quad (15')$$

při čemž $\Delta(\sigma)$ *označuje levou stranu této rovnice. Je-li identita* (14) *splněna, platí mimoto*

$$\alpha\sigma - a \neq 0 \quad \text{anebo} \quad \gamma\sigma - c \neq 0. \quad (16)$$

První část této věty dokážeme tak, že identitu (14) napíšeme ve tvaru (11) a tím, že položíme

$$u = \alpha\sigma - a, \quad v = \beta\sigma - b, \quad w = \gamma\sigma - c, \quad (17)$$

jako přímý důsledek pomocné věty I. Abychom dokázali druhou část, předpokládejme, že platí současně $\alpha\sigma - a = 0$ a $\gamma\sigma - c = 0$. Za tohoto předpokladu jest také podle rovnice (15) $\beta\sigma - b = 0$, odkud plyne

$$|\alpha\sigma - a| + |\beta\sigma - b| + |\gamma\sigma - c| = 0,$$

což jest ve sporu s podmínkou (10). Platí tedy buď $\alpha\sigma - a \neq 0$, anebo $\gamma\sigma - c \neq 0$.

Z této druhé pomocné věty plynou tyto důsledky:

1. *Platí-li současně* $\alpha\sigma - a = 0$ *a* $\gamma\sigma - c = 0$, *platí také* $\beta\sigma - b = 0$.

V případě, že čísla $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \sigma$ jsou reálná (což předpokládáme stále v dalším), obdržíme tyto věty:

2. *Součet*

$$\alpha\sigma - a + \gamma\sigma - c = (\alpha + \gamma)\sigma - (a + c) \quad (18)$$

je různý od nuly; má totéž znaménko jako to z čísel $\alpha\sigma - a$ *a* $\gamma\sigma - c$, *které jest různé od nuly.*

3. *Platí-li současně* $\alpha\sigma - a \neq 0$ *a* $\gamma\sigma - c \neq 0$, *mají tři čísla*

$$\alpha\sigma - a, \quad \gamma\sigma - c, \quad (\alpha + \gamma)\sigma - (a + c) \quad (19)$$

totéž znaménko.

Tyto věty vyplývají bezprostředně z důsledků 2., 3., 4., pomocné věty I., máme-li při tom na zřeteli nerovniny (16).

§ 4. Zavedeme v dalším funkci $\Phi[\xi]$, definovanou v oboru $-\infty \ldots +\infty$ rovnicemi[2])

$$\Phi[\xi] = 1 \quad (\xi \geqq 0), \qquad \Phi[\xi] = -1 \quad (\xi < 0).$$

Z této definice se snadno odvodí rovnice

$$\xi = |\xi| \,.\, \Phi(\xi), \quad |\xi| = \xi\, \Phi[\xi], \quad (\Phi[\xi])^2 = 1 \quad (-\infty \ldots +\infty).$$

Věta I. *Mějme mnohočlen druhého stupně $ux^2 + 2vx + w$, kde koeficienty u, v, w jsou reálné, a kde jeden z koeficientů u, w je podle předpokladů různý od nuly. Vyhověti identitě* (11) *reálnými čísly μ, ν, ϱ je možno pouze s podmínkou* (12). *Je-li tato podmínka splněna, je třeba a je také možno vzíti za ϱ jakékoliv číslo splňující nerovninu*

$$\varrho\,(u + w) > 0 \tag{20}$$

a tedy různé od nuly, ale jinak libovolné. Každé hodnotě ϱ takto zvolené odpovídají dvě (a jen dvě) soustavy čísel μ a ν, pro něž rovnice (11) se stává identitou, totiž

$$\mu = \sqrt{\varrho u}, \quad \nu = \Phi[\varrho v] \,.\, \sqrt{\varrho w} \tag{21$_1$}$$

$$\mu = -\sqrt{\varrho u}, \quad \nu = -\Phi[\varrho v] \,.\, \sqrt{\varrho w}, \tag{21$_2$}$$

béřeme-li všude artimetické druhé kořeny.

Nutnost vztahu (12) jest již dokázána (§ 3, pomocná věta I). Mimoto, poněvadž identita (11) je ekvivalentní s rovnicemi (13), plyne z první a třetí z těchto rovnic

$$u + w = \frac{\mu^2 + \nu^2}{\varrho},$$

odkud vyplývá, ježto μ, ν, ϱ jsou podle předpokladu reálná,

$$\varrho\,(u + w) \geqq 0. \tag{22}$$

Protože pak jedno z čísel u, w je od nuly různé, platí $u + w \neq 0$ (§ 3, důsledek 3 pomocné věty I). Na druhé straně podle tvaru samého identity (11) platí $\varrho \neq 0$. Z podmínky (22) plyne tedy nerovnina (20). Zvolme za ϱ jakékoliv číslo mající totéž znamení jako součet $u + w$. Když pak definujeme μ a ν vzorci (21)$_1$ nebo (21)$_2$, které dávají podle nerovniny (20) pro tato dvě čísla hodnoty reálné (§ 3, důsledky 3. a 4. pomocné věty I.), obdržíme identicky pro každou z těchto dvou definic

$$(\mu x + \nu)^2 = (\sqrt{\varrho u} \,.\, x + \Phi[\varrho v] \,.\, \sqrt{\varrho w})^2 = \varrho u x^2 + 2x\, \Phi[\varrho v] \sqrt{\varrho^2 uw} + \\ + \{\Phi[\varrho v]\}^2 \varrho w.$$

Avšak podle rovnice (12) dostaneme

$$\sqrt{\varrho^2 uw} = \sqrt{\varrho^2 v^2} = |\varrho v|;$$

---

[2]) Tato funkce se liší od známé Kroneckerovy funkce sign ξ jen pro hodnotu $\xi = 0$.

a zároveň v souhlase s vlastnostmi funkce $\Phi(\xi)$, obdržíme

$$\Phi[\varrho v] \, . \, |\varrho v| = \varrho v, \qquad \{\Phi[\varrho v]\}^2 = 1.$$

Dostaneme tedy postupně

$$\varrho u x^2 + 2\Phi[\varrho v] \, . \, |\varrho v| \, x + \varrho w = (\mu x + \nu)^2,$$
$$\varrho u x^2 + 2\varrho v x + \varrho w = (\mu x + \nu)^2,$$

odkud plyne, ježto ϱ je různé od nuly,

$$u x^2 + 2 v x + w = \frac{(\mu x + \nu)^2}{\varrho}$$

anebo, dosadíme-li tam hodnoty μ a ν,

$$u x^2 + 2 v x + w = \frac{1}{\varrho}(\sqrt{\varrho u} \, . \, x + v\,\Phi[\varrho v]\sqrt{\varrho w})^2. \tag{23}$$

Tak každá soustava čísel reálných μ, ν, definovaná vzorci $(21)_1$ a $(21)_2$ vyhovuje identitě (11), při čemž ϱ jest libovolné číslo reálné, vyhovující nerovnině (20). Předpokládejme nyní, že dvě reálná čísla μ a ν vyhovují identitě (11), při čemž vztah (12) je splněn a ϱ jest zvoleno podle nerovniny (20). Napíšeme-li pro tutéž hodnotu ϱ identitu (23) a máme-li při tom na zřeteli identitu (11), obdržíme identicky

$$\frac{(\mu x + \nu)^2}{\varrho} = \frac{(\sqrt{\varrho u} \, . \, x + \Phi[\varrho v]\sqrt{\varrho w})^2}{\varrho}$$

nebo

$$\mu x + \nu = \pm (\sqrt{\varrho u} \, . \, x + \Phi[\varrho v]\sqrt{\varrho w}),$$

to jest

$$\mu = \sqrt{\varrho u}, \quad \nu = \Phi[\varrho v]\sqrt{\varrho w} \quad \text{anebo} \quad \mu = -\sqrt{\varrho u}, \quad \nu = -\Phi[\varrho v]\,\varrho w.$$

Tak docházíme opět ke vzorcům $(21)_1$ a $(21)_2$.

§ 5. **Věta II.** *Jsou-li koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$, mnohočlenů $\psi(x)$ a $f(x)$ definovaných dvěma prvními vzorci* (4) *reálné a jsou-li podmínky* (2) *a* (10) *splněny, rovnice* (15) [(*anebo* (15')] *druhého stupně vzhledem k σ má dva kořeny $\sigma = \sigma_1$ a $\sigma = \sigma_2$ reálné, a to různé.*

Na základě nerovniny (2) zůstává mnohočlen $\Delta(\sigma)$ kladný pro σ ať kladné či záporné, ale mající prostou hodnotu dostatečně velikou. Položíme-li pak

$$\sigma' = \frac{\alpha c + \gamma a}{2\alpha\gamma},$$

dostaneme

$$\Delta(\sigma') = \left(\frac{\alpha c + \gamma a}{2\gamma} - a\right)\left(\frac{\alpha c + \gamma a}{2\alpha} - c\right) - \left[\frac{(\alpha c + \gamma a)\beta}{2\alpha\gamma} - b\right]^2$$

nebo

$$\Delta(\sigma') = -\frac{(\alpha c - \gamma a)^2}{4\alpha\gamma} - \frac{(\alpha\beta c + \beta\gamma a - 2\alpha\gamma b)^2}{4\alpha^2\gamma^2}.$$

Předpokládáme-li, že $ac - \gamma a \neq 0$, vyjde nám podle nerovniny $\alpha\gamma > 0$, která plyne z podmínky (2), $\Delta(\sigma') < 0$. Platí-li $ac - \gamma a = 0$, obdržíme, klademe-li $\frac{a}{\alpha} = \varkappa$, a hledíme-li k podmínce (10),

$$a - \varkappa\alpha = 0, \quad c - \varkappa\gamma = 0, \quad b - \varkappa\beta \neq 0.$$

Z toho odvodíme

$$\alpha\beta c + \beta\gamma a - 2\,\alpha\gamma b = \varkappa\alpha\beta\gamma + \varkappa\alpha\beta\gamma - 2\,\alpha\gamma b = -2\,\alpha\gamma(b - \varkappa\beta) \neq 0,$$

odkud plyne $\Delta(\sigma') < 0$ jako v případě přecházejícím. Mnohočlen $\Delta(\sigma')$ mění tedy znaménko v každém z obou intervalů

$$-\infty \ldots \frac{\alpha c + \gamma a}{2\,\alpha\gamma} \quad \text{a} \quad \frac{\alpha c + \gamma a}{2\,\alpha\gamma} \ldots + \infty,$$

a má tudíž jeden kořen v každém z těchto intervalů; tyto kořeny jsou tedy reálné a různé.

Pozn. Tuto větu můžeme dokázati přímo, přesvědčíme-li se, že výraz

$$D = (\alpha c + \gamma a - 2\,\beta b)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(ac - b^2)$$

má kladnou hodnotu. K tomu cíli vypočítejme výraz $a^2 D$, hledíce k nerovnině $\alpha \neq 0$. Dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 D &= a^2 \{(\alpha c + \gamma a - 2\,\beta b)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(ac - b^2)\} - \\ &- \{a(\alpha c - \gamma a) + 2\,\beta(\beta a - \alpha b)\}^2 + \{a(\alpha c - \gamma a) + 2\,\beta(\beta a - \alpha b)\}^2 = \\ &= 4\,(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta a - \alpha b)^2 + \{\alpha\,(\alpha c - \gamma a) + 2\beta\,(\beta a - \alpha b)\}^2. \end{aligned}$$

V případě, že platí $\beta a - \gamma b \neq 0$, dostaneme tak $a^2 D > 0$, odkud plyne $D > 0$. Platí-li naopak $\beta a - \alpha b = 0$, vyjde postupně, položíme-li $\frac{a}{\alpha} = \varkappa$ a hledíme-li k podmínce (10),

$$a - \varkappa\alpha = 0, \quad b - \varkappa\beta = 0, \quad c - \varkappa\gamma \neq 0, \quad \alpha^2 D = \alpha^4\,(c - \varkappa\gamma)^2 > 0,$$

odkud vyplývá jako před tím $D > 0$.

Věta III. *Splňují-li reálné koeficienty mnohočlenů $\psi(x)$ a $f(x)$, definovaných dvěma prvními vztahy* (4), *podmínky* (2) *a* (10), *identita*

$$\begin{aligned} \sigma\psi(x) - f(x) &\equiv \\ \equiv \sigma\,(\alpha x^2 + 2\,\beta x + \gamma) - (ax^2 + 2\,bx + c) &= \frac{(\mu x + \nu)^2}{\varrho} \qquad (14') \end{aligned}$$

může býti splněna pouze dvěma soustavami

$$\sigma = \sigma_1, \ \varrho = \varrho_1, \ \mu = \mu_1, \ \nu = \nu_1 \ \text{a} \ \sigma = \sigma_2, \ \varrho = \varrho_2, \ \mu = \mu_2, \ \nu = \nu_2$$

reálných čísel σ, ϱ, μ, ν. Tyto dvě soustavy se určí takto:

Každé z čísel σ_1, σ_2 musí býti rovno jednomu z kořenů rovnice (15)*; tyto dva kořeny jsou reálné, různé. V každé dvojici čísel $\alpha\sigma_i - a$, $\gamma\sigma_i - c$ $(i = 1, 2)$ jedno je určitě různé od nuly a každý součet*

$$(a\sigma_i - a) + (\gamma\sigma_i - c) = (\alpha + \gamma)\,\sigma_i - (a + c) \quad i = 1,\ 2 \tag{24}$$

jest rovněž různý od nuly. Klademe-li v identitě (14′) $\sigma = \sigma_i$ $(i = 1, 2)$, *můžeme zvoliti za* ϱ_i *číslo stejného znaménka se součtem* (24), *ale jinak libovolné. Je-li* ϱ_i *stanoveno, určíme* μ *a* ν *v vzorci*

$$\mu_i = \pm \sqrt{\varrho_i(a\sigma_i - a)},\ \nu_i = \pm\, \Phi[\varrho_i(\beta\sigma_i - b)]\sqrt{\varrho_i(\gamma\sigma_i - c)},\ (i = 1,\ 2), \tag{25}$$

kde vezmeme současně stejná znaménka u odmocnin. Dvě soustavy čísel $\sigma_1, \varrho_1, \mu_1$ a $\sigma_2, \varrho_2, \mu_2, \nu_2$, *takto získaných splňují identity*[3])

$$\sigma_1\,(ax^2 + 2\,\beta x + \gamma) - (ax^2 + 2\,bx + c) = \frac{(\mu_1 x + \nu_1)^2}{\varrho_1}, \tag{14$_1$}$$

$$\sigma_2\,(ax^2 + 2\,\beta x + \gamma) - (ax^2 + 2\,bx + c) = \frac{(\mu_2 x + \nu_2)^2}{\varrho_2}. \tag{14$_2$}$$

Píšeme-li identitu (14′) v tvaru (11), kde u, v, w jsou definována vzorci (17), dokážeme vyslovenou větou jako přímý důsledek vět předcházejících, a to: pomocné věty II., věty II., důsledku (2.) pomocné věty II a věty I.

Pozn. V dalším užijeme věty na mnohočleny $\varphi(x)$ a $f(x)$, které splňují podmínky (2), (3), (10). Tu jest na místě poznamenati, že podmínka (3) není nutná pro správnost vět II a III.

§ 6. **Věta IV.** *Jsou-li splněny všecky předpoklady věty III a čísla* μ_1, ν_1 a μ_2, ν_2 *s čísly jim odpovídajícími* σ_1, ϱ_1 a σ_2, ϱ_2 *definována v souhlase se zněním této věty, platí*

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{26}$$

Mimo to čísla ϱ_1, ϱ_2 *mají různá znaménka, stejně, jako čísla*

$$(\alpha + \gamma)\,\sigma_1 - (a + c), \quad (\alpha + \gamma)\,\sigma_2 - (a + c), \tag{27}$$

jež mají znaménka čísel ϱ_1 *a* ϱ_2.

Identity $(14)_1$ a $(14)_2$ jsou ekvivalentní rovnostem

$$\frac{\mu_1^2}{\varrho_1} = a\sigma_1 - a,\quad \frac{\mu_1\nu_1}{\varrho_1} = \beta\sigma_1 - b,\quad \frac{\nu_1^2}{\varrho_1} = \gamma\sigma_1 - c$$

a

$$\frac{\mu_2^2}{\varrho_2} = a\sigma_2 - a,\quad \frac{\mu_2\nu_2}{\varrho_2} = \beta\sigma_2 - b,\quad \frac{\nu_2^2}{\varrho_2} = \gamma\sigma_2 - c.$$

Vzhledem k těmto rovnostem obdržíme

---

[3]) Až na některé podrobnosti lze tuto větu odvoditi přímo ze známých vlastností funkcionálního determinantu dvou kvadratických forem. Viz L. Bianchi: Lezioni di geometria differenziale, 1894, str. 55—57, § 31, anebo W. Fr. Meyer: Allgemeine Formen- und Invarianten-theorie, sv. I 1909, str. 24—32, § 4.

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\cdot\begin{vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}\frac{\mu_1}{\varrho_1} & \mu_1\\ \frac{\nu_1}{\varrho_1} & \nu_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\mu_1 & \frac{\mu_2}{\varrho_2}\\ \nu_1 & \frac{\nu_2}{\varrho_2}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\frac{\mu_1}{\varrho_1} & \mu_2\\ \frac{\nu_1}{\varrho_1} & \nu_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\mu_1 & -\frac{\mu_2}{\varrho_2}\\ \nu_1 & -\frac{\nu_2}{\varrho_2}\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}\frac{\mu_1^2}{\varrho_1}-\frac{\mu_2^2}{\varrho_2} & \frac{\mu_1\nu_1}{\varrho_1}-\frac{\mu_2\nu_2}{\varrho_2}\\ \frac{\mu_1\nu_1}{\varrho_1}-\frac{\mu_2\nu_2}{\varrho_2} & \frac{\nu_1^2}{\varrho_1}-\frac{\nu_2^2}{\varrho_2}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\alpha(\sigma_1-\sigma_2) & \beta(\sigma_1-\sigma_2)\\ \beta(\sigma_1-\sigma_2) & \gamma(\sigma_1-\sigma_2)\end{vmatrix}=$$

$$=-(\sigma_1-\sigma_2)^2\,.\,(\alpha\gamma-\beta^2).$$

Dostaneme tedy

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\cdot\begin{vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}^2=-(\sigma_1-\sigma_2)^2\,.\,(\alpha\gamma-\beta^2),$$

odkud plyne, béřeme-li v úvahu nerovnost reálných čísel σ_1, σ_2 (věta III) a vztah (2),

$$\begin{vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}\neq 0 \text{ a } \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}<0.$$

Z toho plyne, že čísla ϱ_1 a ϱ_2 mají protivná znaménka. Ježto pak znaménka dvou čísel ϱ_1, ϱ_2 souhlasí, podle věty III se znaménky prvního a druhého čísla (27), tato dvě čísla mají rovněž protivná znaménka.

Věta V. *Jest řešiti vzhledem k neznámým P a Q soustavu rovnic*

$$\begin{aligned}(b\mu_1-a\nu_1)P+(b\mu_2-a\nu_2)Q&=B,\\ (c\mu_1-b\nu_1)P+(c\mu_2-b\nu_2)Q&=C.\end{aligned}\tag{28}$$

Splňují-li čísla a, b, c podmínku (3), *jsou-li B a C čísla libovolná a platí-li mimo to*

$$\begin{vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}\neq 0,\tag{29}$$

má soustava (28) *pro neznámé P a Q určité řešení.*

Neboť, vypočítáme-li determinant soustavy lineárních rovnic (28), obdržíme

$$\begin{vmatrix}b\mu_1-a\nu_1 & b\mu_2-a\nu_2\\ c\mu_1-b\nu_1 & c\mu_2-b\nu_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b & -a\\ c & -b\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}=(ac-b^2)\,.\begin{vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}.$$

Je tedy na základě nerovností (3) a (29) tento determinant různý od nuly.

§ 7. Vraťme se nyní k výpočtu integrálu (1) s reálnými koeficienty B, C, α, β, γ, a, b, c, jsou-li při tom splněny, podle předpokladu, podmínky (2), (3), (10). Sestavme rovnici (15) a určeme její kořeny σ_1 a σ_2 reálné, různé (věta III); napišme pak identity $(14)_1$ a $(14)_2$ určujíce čísla ϱ_1, μ_1, ν_1 a ϱ_2, μ_2, ν_2 podle pravidel věty III (§ 5). Ježto prosté hodnoty ϱ_1, ϱ_2 jsou kladné, mimo to však libovolné (věta III), položme

$$|\varrho_i| = 1 \quad (i = 1, 2). \tag{30}$$

Potom jedno z čísel ϱ_1, ϱ_2 bude rovno 1 a druhé — 1, neboť tato dvě čísla mají protivná znaménka (věta IV). Zavedeme-li mimoto funkci $\Phi(\xi)$ (§ 4), dostaneme podle věty III

$$\Phi[\varrho_i] = \Phi[(\alpha + \gamma)\,\sigma_i - (a + c)] \quad (i = 1, 2),$$

odkud plyne na základě rovnosti (30)

$$\varrho_i = |\varrho_i| \,.\, \Phi[(\alpha + \gamma)\,\sigma_i - (a + c)] = \Phi[(\alpha + \gamma)\,\sigma_i - (a + c)],$$

anebo tedy

$$\varrho_i = \Phi[(\alpha - \gamma)\,\sigma_i - (a + c)] \quad (i = 1, 2). \tag{31}$$

Užijeme-li zkráceného označení (4) a položíme-li

$$t_1 = \frac{\mu_1 x + \nu_1}{k}, \quad (D) \quad (32)_1 \qquad t_2 = \frac{\mu_2 x + \nu_2}{k}, \quad (D) \quad (32)_2$$

obdržíme, diferencujeme-li ještě tyto identity podle vzorce (6),

$$\frac{[(b\mu_i - a\nu_i)\,x + c\mu_i - b\nu_i]\,dx}{f(x)\,k} = dt_i \quad (i = 1, 2). \tag{33}$$

V souhlase se vztahy

$$(\mu_i x + \nu_i)^2 = k^2 t_i^2 = f(x)\,t_i^2 \quad (i = 1, 2),$$

které vycházejí z rovnic $(32)_1$ a $(32)_2$, můžeme psáti identity $(14)_1$ a $(14)_2$ ve tvaru

$$\sigma_i\,\psi(x) - f(x) = \frac{t_i^2 f(x)}{\varrho_i} \quad (i = 1, 2)$$

anebo, béřeme-li v úvahu nerovniny $\sigma_i \neq 0$ [(2), (3); (15'), § 3],

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{t_i^2 + \varrho_i}{\sigma_i \varrho_i} \quad (i = 1, 2) \tag{34}$$

Dělením rovnic (33) rovnicemi (34) obdržíme

$$\left.\begin{aligned} \frac{[(b\mu_1 - a\nu_1)\,x + c\mu_1 - b\nu_1]\,dx}{\psi(x)\,k} &= \frac{\sigma_1\varrho_1\,dt}{t_1^2 + \varrho_1}, \\ \frac{[(b\mu_2 - a\nu_2)\,x + c\mu_2 - b\nu_2]\,dx}{\psi(x)\,k} &= \frac{\sigma_2\varrho_2\,dt}{t_2^2 + \varrho_2}, \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

z čehož plyne integrací

$$\int^{[D]} \frac{[(b\mu_1 - a\nu_1)\,x + c\mu_1 - b\nu_1]\,dx}{\psi(x)\,k} = \sigma_1\varrho_1 \left\{ \int^{[E_1]} \frac{dt_1}{t_1^2 + \varrho_1} \right\}_{t_1 = \frac{\mu_1 x + \nu_1}{k}} \tag{35$_1$}$$

$$\int^{[D]} \frac{[(b\mu_2 - a\nu_2)\,x + c\mu_2 - b\nu_2]\,dx}{\psi(x)\,k} = \sigma_2\varrho_2 \left\{ \int^{[E_2]} \frac{dt_2}{t_2^2 + \varrho_2} \right\}_{t_2 = \frac{\mu_2 x + \nu_2}{k}}, \tag{35$_2$}$$

při čemž (E_1) a (E_2) označují obory, kde platí $t_1^2 + \varrho_1 \neq 0$ a $t_2^2 + \varrho_2 \neq 0$. Poněvadž determinant (26) je různý od nuly (věta IV), můžeme nalézti v souhlase s nerovninou (3) dvě čísla P a Q taková (věta V), která vyhovují soustavě rovnic (28). Řešme tuto soustavu, násobme činiteli P, Q takto určenými rovnice $(35)_1$, $(35)_2$ a sečtěme výsledky. Obdržíme

$$\int^{[D]} \frac{(Bx + C)\,dx}{\psi(x)\,k} = \sigma_1\varrho_1 P \left\{\int^{[E_1]} \frac{dt_1}{t_1^2 + \varrho_1}\right\}_{t_1 = \frac{\mu_1 x + \nu_1}{k}} + \sigma_2\varrho_2 Q \left\{\int^{[E_2]} \frac{dt_2}{t_2^2 + \varrho_2}\right\}_{t_2 = \frac{\mu_2 x + \nu_2}{k}}. \tag{36}$$

Protože jedno z čísel ϱ_1, ϱ_2 se rovná 1 a druhé -1, je viděti, že jeden z integrálů

$$\int \frac{dt_i}{t_i^2 + \varrho_i} \qquad (i = 1,\ 2), \tag{37}$$

se vždy vyjádří funkcí arctg t_i ($i = 1$ nebo 2) a druhý funkcí

$$\frac{1}{2} \log \left|\frac{t_i - 1}{t_i + 1}\right| \qquad (i = 2 \text{ nebo } 1).$$

Pozn. 1. Dohodněme se, že budeme označovati písmenem σ_1 větší kořen rovnice (15), bude-li platit $\alpha > 0$, a menší kořen, bude-li platit $\alpha < 0$. Na základě této dohody vždycky rozhodnouti, který z integrálů (37) dává funkci arctg a který funkci logaritmickou. Uvažujme totiž rozdíl

$$(\alpha + \gamma)\,\sigma_1 - (a + c) - [(\alpha + \gamma)\,\sigma_2 - (a + c)] = (\alpha + \gamma)(\sigma_1 - \sigma_2)$$

dvou čísel (27) (§ 6). Na základě dohody právě naznačené čísla α a $\sigma_1 - \sigma_2$ mají totéž znaménko. Avšak, podle nerovniny (2), α a $\alpha + \gamma$ mají rovněž táž znaménka. Obdržíme tedy

$$(\alpha + \gamma)(\sigma_1 - \sigma_2) > 0 \text{ a následkem toho}$$

$$(\alpha + \gamma)\,\sigma_1 - (a + c) - [(\alpha + \gamma)\,\sigma_2 - (a + c)] > 0. \tag{38}$$

Ježto čísla $(\alpha + \gamma)\,\sigma_1 - (a + c)$ a $(\alpha + \gamma)\,\sigma_2 - (a + c)$ mají podle věty IV. opačná znaménka, nalezneme na základě nerovniny (38),

$$(\alpha + \gamma)\,\sigma_1 - (a + c) > 0, \quad (\alpha + \gamma)\,\sigma_2 - (a + c) < 0.$$

Z toho odvodíme, v souhlase se vzorcem (31),

$$\varrho_1 = \Phi[(\alpha + \gamma)\,\sigma_1 - (a + c)] = 1,$$
$$\varrho_2 = \Phi[(\alpha + \gamma)\,\sigma_2 - (a + c)] = -1.$$

Vzorec (36) nabude tedy tvaru

$$\int^{[D]} \frac{(Bx + C)\,dx}{\psi(x)k} = \sigma_1 P \left\{\int^{[E_1]} \frac{dt_1}{t_1^2 + 1}\right\}_{t_1 = \frac{\mu_1 x + \nu_1}{k}} -$$

$$[E_3] \qquad -\sigma_2 Q\left\{\int \frac{dt_2}{t_2^2-1}\right\}_{t_2=\frac{\mu_2 x+\nu_2}{k}}$$

nebo, vypočítáme-li integrály na pravé straně,

$$[D] \qquad \int \frac{(Bx+C)\,dx}{(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \sigma_1 P \operatorname{arctg} \frac{\mu_1 x+\nu_1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} + $$

$$+\frac{\sigma_2 Q}{2}\log\left|\frac{\sqrt{ax^2+2bx+c}+\mu_2 x+\nu_2}{\sqrt{ax^2+2bx+c}-\mu_2 x-\nu_2}\right|. \qquad (36')$$

2. Někdy se stane při počítání funkcí t_1, t_2 a příslušných diferenciálů dt_1, dt_2 podle vzorců $(32)_1$, $(32)_2$ a (33), že koeficienty B a C v integrálu (1) jsou úměrné číslům $b\mu_1 - a\nu_1$, $c\mu_1 - b\nu_1$ nebo číslům $b\mu_2 - a\nu_2$, $c\mu_2 - b\nu_2$. V tomto případě jeden ze vzorců (33) nám dovoluje převésti integrál (1) pomocí vhodného koeficientu úměrnosti na integrál (37), aniž řešíme soustavu rovnic (28).

§ 8. Uvažujme nyní ty zvláštní případy, kdy čísla μ_1, ν_1, μ_2, ν_2, která vystupují v identitách $(14)_1$ a $(14)_2$ nejsou všecka od nuly různá. Nejdříve jest poznamenati, že nenastane nikdy, na základě nerovniny (26) současně $\mu_1 = 0$, $\nu_1 = 0$ nebo $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ ($\mu_2 = 0$, $\nu_2 = 0$ nebo $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0$).

Podle vzorců (25) věty III (§ 5) nalezneme

$$|\mu_1| = \sqrt{\varrho_1(\alpha\sigma_1 - a)}, \quad |\nu_1| = \sqrt{\varrho_1(\gamma\sigma_1 - c)}; \; |\mu_2| = \varrho_2\sqrt{(\alpha\sigma_2 - a)},$$

$$|\nu_2| = \sqrt{\varrho_2(\gamma\sigma_2 - c)}, \qquad (39)$$

kde ϱ_1 a ϱ_2 jsou různá od nuly. Následkem toho rovnost $\mu_1 = 0$ je možná jen, když platí

$$\alpha\sigma_1 - a = 0. \qquad (40)_1$$

Vyhovuje-li však σ_1 rovnici (15), vztah $(40)_1$ má za následek rovnost

$$\beta\sigma_1 - b = 0. \qquad (40)_2$$

Z rovností $(40)_1$ a $(40)_2$ odvodíme rovnici

$$\beta a - \alpha b = 0. \qquad (41)$$

Tato rovnice nám dává nutnou podmínku pro to, aby bylo $\mu_1 = 0$. Právě takovou podmínku nutnou (41) nalezneme pro $\mu_2 = 0$ a analogicky se obdrží podmínka

$$\gamma b - \beta c = 0, \qquad (42)$$

jež jest nutná pro to, aby byla $\nu_1 = 0$ nebo $\nu_2 = 0$. Naproti tomu podmínka (41) jest rovněž postačující pro to, aby jedno z čísel μ_1, μ_2 se rovnalo nule, právě tak podmínka (42) jest postačující, aby $\nu_1 = 0$ nebo $\nu_2 = 0$. Neboť, budiž $\beta a - \alpha b = 0$; klademe-li $\varkappa = \dfrac{a}{\alpha}$ obdržíme

$$\Delta(\varkappa) = (\alpha\varkappa - a)(\gamma\varkappa - c) - (\beta\varkappa - b)^2 = \left(\frac{\alpha a}{\alpha} - a\right)\left(\frac{\gamma a}{\alpha} - c\right) - \\ - \left(\frac{\beta a}{\alpha} - b\right)^2 = 0.$$

Budeme tedy mít $\sigma_1 = \frac{a}{\alpha}$ nebo $\sigma_2 = \frac{a}{\alpha}$, odkud plyne, podle prvního a třetího ze vzorců (39), $\mu_1 = 0$ nebo $\mu_2 = 0$. Obdobným způsobem se dokáže tím, že se vypočítá $\Delta\left(\frac{c}{\gamma}\right)$, že podmínka (42) má za následek jednu z rovností $\nu_1 = 0$ nebo $\nu_2 = 0$.

§ 9. Předpokládejme, že koeficienty α, β, a, b polynomů $\psi(x)$ a $f(x)$ (§ 1) splňují rovnici (41). Jinými slovy, že platí, klademe-li $\varkappa = \frac{a}{\alpha}$,

$$a = \varkappa\alpha, \quad b = \varkappa\beta, \tag{43}$$

kde $\varkappa$ jest číslo, které nemůže býti rovno nule. Neboť, z rovnosti $\varkappa = 0$ vyplývá, podle vzorců (43), $a = b = 0$ a následkem toho $ac - b^2 = 0$, což odporuje podmínce (3). Poněvadž pak α jest různé od nuly podle nerovniny (2), dostaneme v souhlase s prvním ze vztahů (43), $a \neq 0$. Viděli jsme (§ 8), že v uvažovaném případě jeden z kořenů funkce (§ 3).

$$\Delta(\sigma) = (\alpha\gamma - \beta^2)\sigma^2 - (\alpha c + \gamma a - 2\beta b)\sigma + ac - b^2$$

je roven číslu $\varkappa = \frac{a}{\alpha}$; budeme jej označovati σ_2. Dostaneme tedy

$$\sigma_1 = \frac{ac - b^2}{\alpha\gamma - \beta^2} : \frac{a}{\alpha} = \frac{\alpha(ac - b^2)}{a(\alpha\gamma - \beta^2)}.$$

Takto obdržíme kořeny rovnice (15)

$$\sigma_1 = \frac{\alpha(ac - b^2)}{a(\alpha\gamma - \beta^2)}, \quad \sigma_2 = \frac{a}{\alpha}. \tag{44}$$

Z nich pak odvodíme, na základě vzorců (39) a vztahu $\beta^2 a^2 = \alpha^2 b^2$, který plyne z rovnosti (41),

$$|\mu_1| = \sqrt{\varrho_1(\alpha\sigma_1 - a)} = \sqrt{\frac{\varrho_1(\alpha^2 ac - \alpha^2 b^2 - \alpha\gamma a^2 + \beta^2 a^2)}{a(\alpha\gamma - \beta^2)}} = \\ = \sqrt{\frac{\varrho_1(\alpha^2 ac - \alpha\gamma a^2)}{a(\alpha\gamma - \beta^2)}} = \sqrt{\frac{\varrho_1\alpha(\alpha c - \gamma a)}{\alpha\gamma - \beta^2}},$$

$$|\nu_1| = \sqrt{\varrho_1(\gamma\sigma_1 - c)} = \sqrt{\frac{\varrho_1(\beta^2 ac - \alpha\gamma b^2)}{a(\alpha\gamma - \beta^2)}} = \sqrt{\frac{\varrho_1(\beta^2 a^2 c - \alpha\gamma a b^2)}{a^2(\alpha\gamma - \beta^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varrho_1 (a^2 b^2 c - a\gamma a b^2)}{a^2(\alpha\gamma - \beta^2)}} = \sqrt{\frac{\varrho_1 b^2 a (\alpha c - \gamma a)}{a^2(\alpha\gamma - \beta^2)}}.$$

Analogicky dostaneme

$$|\mu_2| = \sqrt{\varrho_2(\alpha\sigma_2 - a)} = 0, \quad |\nu_2| = \sqrt{\varrho_2(\gamma\sigma_2 - c)} = \sqrt{\frac{\varrho_2(\gamma a - \alpha c)}{\alpha}}.$$

V uvažovaném případě jistě platí $\alpha\gamma - \gamma a \neq 0$, neboť, kdybychom připustili rovnost $\alpha c - \gamma a = 0$, platilo by současně $\mu_1 = 0$ a $\mu_2 = 0$ (a zároveň $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0$), což se nesrovnává s nerovninou (26). Můžeme tudíž klásti, podle věty III,

$$|\varrho_1| = \frac{a^2(\alpha\gamma - \beta^2)}{|a(\alpha c - \gamma a)|}, \quad |\varrho_2| = \frac{|\alpha|}{|\gamma a - \alpha c|}.$$

Z čehož odvodíme, vzhledem k tomu, že čísla μ_1 a ν_2 jsou reálná,

$$\frac{\varrho_1 a (\alpha c - \gamma a)}{\alpha\gamma - \beta^2} = \left|\frac{\varrho_1 a(\alpha c - \gamma a)}{\alpha\gamma - \beta^2}\right| = \frac{|\varrho_1| \cdot |a(\alpha c - \gamma a)|}{\alpha\gamma - \beta^2} = a^2, \qquad (45)_1$$

$$\frac{\varrho_2(\gamma a - \alpha c)}{\alpha} = \left|\frac{\varrho_2(\gamma a - \alpha c)}{\alpha}\right| = \frac{|\varrho_2| \cdot |\gamma a - \alpha c|}{|\alpha|} = 1, \qquad (45)_2$$

$$|\mu_1| = \sqrt{a^2} = |a|, \quad |\nu_1| = \sqrt{b^2} = |b|, \quad |\nu_2| = 1.$$

V uvažovaném případě můžeme tedy položiti

$$\mu_1 = a, \quad \nu_1 = b, \quad \mu_2 = 0, \quad \nu_2 = 1.$$

Neboť v souhlase (§ 5) se vzorci (25) [anebo $(21)_1$, $(21)_2$, § 4, klademe-li $u = \alpha\sigma_i - a$, $v = \beta\sigma_i - b$, $w = \gamma\sigma_i - c$ $(i = 1, 2)$], lze zvoliti znaménka čísel μ_1 a ν_2 libovolně. Následkem toho můžeme položiti $\mu_1 = a$, $\nu_2 = 1$; mimoto platí, jak bylo nalezeno výše, $\mu_2 = 0$. Zbývá jen vypočítati ν_1 pomocí rovnosti $|\nu_1| = |b|$. Máme-li $b = 0$, pak platí také $|\nu_1| = |b| = 0$, čili $\nu_1 = b = 0$. Platí-li $b \neq 0$, obdržíme na základě vzorců (39), při čemž číslo a je různé od nuly,

$$|\mu_1| = \sqrt{\varrho_1(\alpha\sigma_1 - a)} = |a| \neq 0, \quad |\nu_1| = \sqrt{\varrho_1(\gamma\sigma_1 - c)} = |b| \neq 0$$

ježto ϱ_1 je také různé od nuly, dostaneme tedy $\alpha\sigma_1 - a \neq 0$ a $\gamma\sigma_1 - c \neq 0$, odkud plyne podle důsledku 1. pomocné věty II (§ 3) $\beta\sigma_1 - b \neq 0$. Avšak podle vzorce (25) pro $i = 1$ má součin $\mu_1\nu_1 = a\nu_1$ totéž znaménko jako součin $\varrho_1 v = \varrho_1(\beta\sigma_1 - b)$; mimoto má totéž znaménko součin $uv = (\alpha\sigma_1 - a)(\beta\sigma_1 - b)$, neboť čísla ϱ_1, $u + w = (\alpha + \gamma)\sigma_1 - (a + c)$, $u = \alpha\sigma_1 - a$ a $w = \gamma\sigma_1 - c$ mají totéž znaménko (věta III, § 5; důsledek 3. pomocné věty II, § 3.) Má tudíž číslo $a\nu_1$ totéž znaménko jako součin $(\alpha\sigma_1 - a)(\beta\sigma_1 - b)$. Na základě rovností (43) obdržíme

$$(\alpha\sigma_1 - a)(\beta\sigma_1 - b) = \left(\frac{a\sigma_1}{\varkappa} - a\right)\left(\frac{b\sigma_1}{\varkappa} - b\right) = ab\left(\frac{\sigma_1}{\varkappa} - 1\right)^2 =$$

$$= ab\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right)^2,$$

neboť podle druhé z rovnic (44) platí $\varkappa = \frac{a}{\alpha} = \sigma_2 \neq 0$. Podle nerovnosti $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (věta II., § 5), platí $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right)^2 > 0$. Mají tedy součiny $a\nu_1$ a ab totéž znaménko. Je tedy rovnost $\nu_1 = b$ důsledkem rovnosti $|\nu_1| = |b|$. V uvažovaném případě přejdou identity $(14)_1$ a $(14)_2$ z věty III v tyto identity

$$\begin{aligned}(\alpha\sigma_1 - a)\,x^2 + 2\,(\beta\sigma_1 - b)\,x + \gamma\sigma_1 - c &= \frac{(ax+b)^2}{\varrho_1},\\ (\alpha\sigma_2 - a)\,x^2 + 2\,(\beta\sigma_2 - b)\,x + \gamma\sigma_2 - c &= \frac{1}{\varrho_2},\end{aligned} \tag{46}$$

kde čísla σ_1, σ_2 jsou definována rovnicemi (44), a ϱ_1 a ϱ_2 se vyjádří podle vztahů $(45)_1$ a $(45)_2$ rovnostmi

$$\varrho_1 = \frac{a^2\,(\alpha\gamma - \beta^2)}{\alpha\,(ac - \gamma a)},\quad \varrho_2 = \frac{a}{\gamma a - ac}.$$

Vzhledem k těmto hodnotám σ_1, ϱ_1, σ_2, ϱ_2 můžeme psáti identity (46) ve tvaru

$$\frac{a\,(ac - b^2)}{a\,(\alpha\gamma - \beta^2)}\,.\,\psi(x) = f(x) + \frac{\alpha\,(ac - \gamma a)}{a^2\,(\alpha\gamma - \beta^2)}\,.\,(ax+b)^2,$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\psi(x) = f(x) + \frac{\gamma a - ac}{\alpha}$$

anebo

$$\frac{\alpha a\,(ac - b^2)\,\psi(x)}{f(x)} = a^2\,(\alpha\gamma - \beta^2) + \frac{\alpha\,(ac - \gamma a)\,(ax+b)^2}{f(x)},$$

$$\frac{a\,\psi(x)}{f(x)} = \alpha + \frac{\gamma a - ac}{f(x)},$$

kde užíváme, jako všude v dalším, zkráceného označení (4).

Položíme-li

$$t_1 = \frac{ax+b}{k},\quad t_2 = \frac{1}{k}\quad (D), \tag{47}$$

dostaneme

$$\frac{\alpha a\,(ac - b^2)\,\psi(x)}{f(x)} = a^2\,(\alpha\gamma - \beta^2) + \alpha\,(ac - \gamma a)\,t_1^2,$$

$$\frac{a\,\psi(x)}{f(x)} = \alpha + (\gamma a - ac)\,.\,t_2^2.$$

Mimoto obdržíme diferencováním rovnic (47)

$$dt_1 = \frac{(ac - b^2)\,dx}{f(x)\,k},\quad dt_2 = -\frac{(ax+b)\,dx}{f(x)\,k} \quad (D).$$

Výsledkem dělení těchto dvou rovnic dvěma předcházejícími jsou vztahy

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{\psi(x)\,k} &= \frac{a\alpha\,dt_1}{\alpha\,(ac-\gamma a)\,t_1^2 + a^2\,(\alpha\gamma - \beta^2)}, \\ \frac{(ax+b)\,dx}{\psi(x)\,k} &= -\frac{a\,dt_2}{(\gamma a - \alpha c)\,t_2^2 + \alpha}, \end{aligned}\right\} \quad (D),$$

odkud plyne integrací

$$\left.\begin{aligned} \int^{[D]} \frac{dx}{\psi(x)\,k} &= a\alpha \left\{ \int^{[E_1]} \frac{dt_1}{\alpha\,(ac-\gamma a)\,t_1^2 + a^2(\alpha\gamma - \beta^2)} \right\}_{t_1 = \frac{ax+b}{k}}, \\ \int^{[D]} \frac{(ax+b)\,dx}{\psi(x)\,k} &= a \left\{ \int^{[E_2]} \frac{dt_2}{(\alpha c - \gamma a)\,t_2^2 - \alpha} \right\}_{t_2 = \frac{1}{k}}, \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

při čemž mají obory (D), (E_1), (E_2) tentýž význam jako v paragrafu 7. Použijeme-li identity

$$Bx + C = \frac{B\,(ax+b)}{a} - \frac{bB}{a} + C = \frac{B}{a}(ax+b) + \frac{aC - bB}{a},$$

obdržíme

$$\int^{[D]} \frac{(Bx+C)\,dx}{\psi(x)\,k} = \frac{B}{a}\int^{[D]} \frac{(ax+b)\,dx}{\psi(x)\,k} + \frac{aC - bB}{a}\cdot\int^{[D]} \frac{dx}{\psi(x)\,k},$$

odkud vyplývá podle vzorců (48)

$$\begin{aligned} \int^{[D]} \frac{(Bx+C)\,dx}{\psi(x)\,k} &= B \left\{ \int^{[E_2]} \frac{dt_2}{(\alpha c - \gamma a)\,t_2^2 - \alpha} \right\}_{t_2 = \frac{1}{k}} + \\ &+ \alpha\,(aC - bB) \left\{ \int^{[E_1]} \frac{dt_1}{\alpha\,(ac - \gamma a)\,t_1^2 + a^2\,(\alpha\gamma - \beta^2)} \right\}_{t_1 = \frac{ax+k}{k}} \end{aligned} \quad (49)$$

Rozeznávajíce dva případy, $\alpha\,(ac - \gamma a) > 0$ a $\alpha\,(ac - \gamma a) < 0$, dostali bychom definitivní vzorce: tyto vzorce by se ostatně nemohly lišit od vzorců (36) paragrafu 7. Integrál (1) se v našem případě nalezne pomocí substitucí (47), z nichž první jest substituce Abelova.

§ 10. Obdobné výsledky obdržíme v případě, že podmínky (2), (3), (10) jsou splněny jako v předcházejícím a zároveň koeficienty mnohočlenů $\psi(x)$ a $f(x)$ splňují vztah (§ 8, (42))

$$\gamma b - \beta c = 0, \quad (42')$$

který je ekvivalentní s rovnostmi

$$b = l\beta, \qquad c = l\gamma. \tag{50}$$

Na základě podmínky (3) platí $l \neq 0$; mimoto platí podle nerovniny (2) $\gamma \neq 0$ a tudíž $c \neq 0$. V našem případě jeden z kořenů mnohočlenů $\Delta(\sigma)$ [§ 3, (15)] je roven, podle vztahu (42), $l = \frac{c}{\gamma}$ a druhý podílu

$$\frac{ac - b^2}{a\gamma - \beta^2} : \frac{c}{\gamma} = \frac{\gamma\,(ac - b^2)}{c\,(a\gamma - \beta^2)}.$$

Položíme

$$\sigma_1 = \frac{c}{\gamma}, \quad \sigma_2 = \frac{\gamma\,(ac - b^2)}{c\,(a\gamma - \beta^2)}. \tag{51}$$

Úvahou právě takovou jako v případě předešlém (§ 9) obdržíme postupně na základě vzorců (25) a (51), používáme-li při tom vztahu $\beta^2 c^2 = \gamma^2 b^2$, který plyne z rovnice (49):

$$|\mu_1| = \sqrt{\varrho_1\,(a\sigma_1 - a)} = \sqrt{\frac{\varrho_1\,(ac - \gamma a)}{\gamma}}, \quad |\nu_1| = \sqrt{\varrho_1\,(\gamma\sigma_1 - c)} = 0,$$

$$|\mu_2| = \sqrt{\varrho_2\,(a\sigma_2 - a)} = \sqrt{\frac{\varrho_2\,(\beta^2\,ac - a\gamma b^2)}{c\,(a\gamma - \beta^2)}} = \sqrt{\frac{\varrho_2\,(\beta^2 ac^2 - a\gamma b^2 c)}{c^2\,(a\gamma - \beta^2)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\varrho_2 b^2 \gamma\,(\gamma a - ac)}{c^2\,(a\gamma - \beta^2)}},$$

$$|\nu_2| = \sqrt{\varrho_2\,(\gamma\sigma_2 - c)} = \sqrt{\frac{\varrho_2\,(\gamma^2 ac - \gamma^2 b^2 - a\gamma c^2 + \beta^2 c^2)}{c\,(a\gamma - \beta^2)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\varrho_2\,\gamma\,(\gamma a - ac)}{a\gamma - \beta^2}}.$$

Jest třeba poznamenati, že platí $ac - \gamma a \neq 0$, neboť rovnice $ac - \gamma a = 0$ by měla za následek rovnost $\mu_1 = 0$, což by bylo ve sporu s výsledkem již dříve nalezeným $\nu_1 = 0$. Čísla $|\varrho_1|$ a $|\varrho_2|$ mohou býti libovolná kladná. Mimoto platí, jdežto čísla μ_1 a ν_2 jsou reálná a různá od nuly, na základě nerovniny $ac - \gamma a \neq 0$, že

$$\frac{\varrho_1\,(ac - \gamma a)}{\gamma} > 0, \quad \frac{\varrho_2 \gamma\,(\gamma a - ac)}{a\gamma - \beta^2} > 0.$$

Můžeme tedy klásti

$$\varrho_1 = \frac{\gamma}{ac - \gamma a}, \quad |\varrho_2| = \frac{c^2\,(a\gamma - \beta^2)}{\gamma\,(\gamma a - ac)}, \tag{52}$$

odkud se odvodí

$$|\mu_1| = 1, \quad |\nu_1| = 0, \quad |\mu_2| = |b|, \quad |\nu_2| = |c|.$$

Úvaha úplně obdobná s úvahou v případě předešlém (§ 9) nám dovoluje klásti

$$\mu_1 = 1, \quad \nu_1 = 0; \quad \mu_2 = b, \quad \nu_2 = c.$$

Takto obdržíme tyto identity

$$\sigma_1\psi(x) - f(x) = \frac{x^2}{\varrho_1}, \quad \sigma_2\psi(x) - f(x) = \frac{(bx+c)^2}{\varrho_2},$$

kde čísla σ_1, σ_2 a ϱ_1, ϱ_2 jsou definována vzorci (51) a (52). Substitucí těchto hodnot obdržíme identity

$$\frac{c\,\psi(x)}{\gamma} = f(x) + \frac{(ac - \gamma a)\,x^2}{\gamma},$$

$$\frac{\gamma\,(ac - b^2)\,\psi(x)}{c\,(\alpha\gamma - \beta^2)} = f(x) + \frac{\gamma\,(\gamma a - ac)\,(bx + c)^2}{c^2\,(\alpha\gamma - \beta^2)}$$

anebo

$$\frac{c\,\psi(x)}{f(x)} = \gamma + \frac{(ac - \gamma a)\,x^2}{f(x)},$$

$$\frac{\gamma c\,(ac - b^2)\,\psi(x)}{f(x)} = c^2\,(\alpha\gamma - \beta^2) + \frac{\gamma\,(\gamma a - ac)\,(bx + c)^2}{f(x)}.$$

Položme nyní

$$t_1 = \frac{x}{k}, \quad t_2 = \frac{bx + c}{k}.$$

Z toho odvodíme postupně

$$\frac{c\,\psi(x)}{f(x)} = \gamma + (ac - \gamma a)\,t_1^2, \quad \frac{\gamma c\,(ac - b^2)\,\psi(x)}{f(x)} =$$

$$= c^2\,(\alpha\gamma - \beta^2) + \gamma\,(\gamma a - ac)\,t_2^2,$$

$$\frac{(bx + c)\,dx}{f(x)\,k} = dt_1, \quad \frac{(ac - b^2)\,x\,dx}{f(x)\,k} = -dt_2,$$

$$\frac{(bx + c)\,dx}{\psi(x)\,k} = \frac{c\,dt_1}{(ac - \gamma a)\,t_1^2 + \gamma}, \quad \frac{x\,dx}{\psi(x)\,k} =$$

$$= \frac{\gamma c\,dt_2}{\gamma\,(ac - \gamma a)\,t_2^2 - c^2\,(\alpha\gamma - \beta^2)}, \tag{D}$$

$$\int^{[D]} \frac{(bx + c)\,dx}{\psi(x)\,k} = c\left\{\int^{[E_1]} \frac{dt_1}{(ac - \gamma a)\,t_1 + \gamma}\right\}_{t_1 = \frac{x}{k}},$$

$$\int^{[D]} \frac{x\,dx}{\psi(x)\,k} = \gamma c\left\{\int^{[E_2]} \frac{dt_2}{\gamma\,(ac - \gamma a)\,t_2^2 - c^2\,(\alpha\gamma - \beta^2)}\right\}_{t_2 = \frac{bx+c}{k}}. \tag{53}$$

Vzhledem k identitě

$$Bx + C = \frac{(cB - bC)\,x}{c} + \frac{C\,(bx + c)}{c}$$

dostaneme

$$\int^{[D]}\frac{(Bx+C)\,dx}{\psi(x)\,k}=\frac{cB-bC}{c}\int^{[D]}\frac{x\,dx}{\psi(x)\,k}+\frac{C}{c}\int^{[D]}\frac{(bx+c)\,dx}{\psi(x)\,k},$$

z čehož vychází podle vzorců (53)

$$\begin{aligned}\int^{[D]}\frac{(Bx+C)\,dx}{\psi(x)\,k}&=C\left\{\int^{[E_1]}\frac{dt_1}{(\alpha c+\gamma a)\,t_1^2+\gamma}\right\}_{t_1=\frac{x}{k}}+\\&+\gamma\,(cB-bC)\left\{\int^{[E_2]}\frac{dt_2}{\gamma\,(\alpha c-\gamma a)\,t_2-c^2\,(\alpha\gamma-\beta^2)}\right\}_{t_2=\frac{bx+c}{k}}.\end{aligned}\tag{54}$$

Aby se obdržely definitivní vzorce, zbývá uvažovati zvlášť případ $\gamma\,(\alpha c-\gamma a)>0$, a případ $\gamma\,(\alpha c-\gamma a)<0$.

§ 11. Příklady. 1*). Jest integrovati

$$\int\frac{(1-2x)\,dx}{(5x^2-18x+17)\sqrt{10x^2-22x+13}}.$$

Řešení. Používáme-li označování a úvah svrchu uvedených, obdržíme postupně

$$\psi(x)=5\,x^2-18\,x+17,\qquad(5\,.\,17-9^2>0),$$
$$f(x)=10\,x^2-22\,x+13,\qquad(10\,.\,13-11^2>0).$$
$$f(x)>0\quad(D)\equiv[-\infty\ldots+\infty],\quad\sqrt{f(x)}=k.$$
$$\psi(x)\,\sigma-f(x)=(5\,\sigma-10)\,x^2+2\,(-9\,\sigma+11)\,x+17\,\sigma-13,$$
$$\Delta(\sigma)=(5\,\sigma-10)\,(17\,\sigma-13)-(9\,\sigma-11)^2=4\,\sigma^2-37\,\sigma+9.$$
$$\Delta(\sigma)=4\,\sigma^2-37\,\sigma+9=0,\ \sigma_1=9,\ \sigma_2=\tfrac14.$$

A) $\sigma_1=9$; $9\,(5x^2-18\,x+17)-(10\,x^2-22\,x+13)=$
$$35\,x^2-140\,x+140=(\sqrt{35}\,x-2\sqrt{35})^2,$$

$$t_1=\frac{(x-2)\sqrt{35}}{k},\quad dt_1=\frac{9\sqrt{35}\,(x-1)\,dx}{f(x)\,k};$$
$$9\,\psi(x)-f(x)=(\sqrt{35}\,x-2\sqrt{35})^2,$$
$$\frac{\psi(x)}{f(x)}=\frac{t_1^2+1}{9};\quad\frac{(x-1)\,dx}{\psi(x)\,k}=\frac{dt_1}{(t_1^2+1)\sqrt{35}},$$

$$U=\int^{[D]}\frac{(x-1)\,dx}{\psi(x)\,k}=\frac{1}{\sqrt{35}}\int^{[E_1]}\frac{dt_1}{t_1^2+1}=\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{(x-2)\sqrt{35}}{k}.$$

B) $\sigma_2=\tfrac14$; $\tfrac14\,(5\,x^2-18\,x+17)-(10\,x^2-22\,x+13)=$

*) Viz. L. A. Sohnke's Sammlung von Aufgaben aus der Differential und Integralrechnung, 2 Th., S. 47 (Integralrechnung, I. Unbestimmte Integrale, § 5, Beis. p. 131).

$$-\frac{35}{4}x^2+\frac{70}{4}x-\frac{35}{4}=-\left(\frac{\sqrt{35}}{2}x-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)^2,$$

$$t_2=\frac{\sqrt{35}\,(x-1)}{2\,k},\quad dt_2=\frac{\sqrt{35}\,(-x+2)\,dx}{2\,f(x)\,k};$$

$$\tfrac{1}{4}\,\psi(x)-f(x)=-\left(\frac{\sqrt{35}}{2}x-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)^2,$$

$$\frac{\psi(x)}{f(x)}=-4\,(t_2^2-1);\quad \frac{(-x+2)\,dx}{\psi(x)\,k}=-\frac{dt_2}{2\,(t_2^2-1)\sqrt{35}},$$

$$V=\int^{[D]}\frac{(-x+2)\,dx}{\psi(x)\,k}=-\frac{1}{2\sqrt{35}}\int^{[E_1]}\frac{dt_2}{t_2^2-1}=-\frac{1}{4\sqrt{53}}\lg\left|\frac{t_2-1}{t_2+1}\right|$$

V našem případě lze klásti

$$\left|\frac{t_2-1}{t_2+1}\right|=\frac{1-t_2}{1+t_2}=\frac{2\,k-(x-1)\sqrt{35}}{2\,k+(x-1)\sqrt{35}},$$

neboť platí

$$-4\,(t_2^2-1)=\frac{\psi(x)}{f(x)}>0\;[-\infty\ldots+\infty],$$

$$[t_2\,(x)+1]\,[t_2\,(x)-1]<0\;[-\infty\ldots+\infty].$$

Máme tedy

$$V=\int^{[D]}\frac{(-x+2)\,dx}{\psi(x)\,k}=-\frac{1}{4\sqrt{35}}\log\frac{2\,k-(x-1)\sqrt{35}}{2\,k+(x-1)\sqrt{35}}.$$

C) $\quad 1-2\,x=P\,(x-1)+Q\,(-x+2);\; P=-3,\; Q=-1.$

$$\int^{[D]}\frac{(1-2x)\,dx}{\psi(x)\,k}=-3U-V,$$

$$\int^{[-\infty\ldots+\infty]}\frac{(1-2\,x)\,dx}{(5\,x^2-18\,x+17)\,10\,x^2-22\,x+13}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{(2-x)\sqrt{35}}{\sqrt{10\,x^2-22\,x+13}}+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{35}}\log\frac{2\sqrt{10\,x^2-22\,x+13}-(x-1)\sqrt{35}}{2\sqrt{10\,x^2-22\,x+13}+(x-1)\sqrt{35}}.$$

2. $$\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Řešení.

$$\int_{[-\infty\ldots\infty+]} \frac{(x+1)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \sqrt{2}\,\operatorname{arctg} \frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Výpočet se zjednoduší na základě poznámky 2. paragrafu 7. Je zde totiž $\sigma_1 = \frac{1}{3}$, $\sigma_2 = 3$;

$$t_2 = \frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+1}};\quad \frac{(x+1)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{\sqrt{2}\,dt_2}{t_2^2+1}$$

3.*) $$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Řešení.

$$\int_{[-\infty\ldots+\infty]} \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \log \frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

4. $$\int \frac{xdx}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Řešení.

$$\int \frac{xdx}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-x+1}} = \sqrt{2}\,\operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{2x^2-2x+2}}.$$

Je možno použíti zjednodušení obdobného jako v příkladě 2.

5. $$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}}.$$

Řešení.

$$\int_{[-\infty\ldots+\infty]} \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}} = \operatorname{arctg}\sqrt{2x^2+2x+1} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{6x^2+6x+3}+2x+1}{\sqrt{6x^2+6x+3}-2x-1}.$$

Výpočet lze zjednodušiti podle metody popsané v paragrafu 9, neboť je zde $a\beta - ba = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$.

*

*) Viz „Sbornik zadač po vyššej matematike“ prepodavatelej Ingeňerov Putej Soobsčenija A. A. Adamova, A. P. Volfmana, H. M. Güntera, A. K. Zacharova, V. M. Melioranskago, V. F. Točinsskado, I. V. Uspenskago, 1912. Oddíl VII., str. 82, úl. 110.

Sur l'intégrale réelle $\int \frac{(Bx + C)\, dx}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$ sous la condition $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$.

(Extrait de l'article précédent.)

Soit à intégrer

$$J = \int \frac{(Bx + C)\, dx}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}},$$

les coefficients $B, C, \alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ étant des nombres réels donnés, dans le domaine où le polynôme $ax^2 + 2bx + c$ reste, par hypothèse, positif, la variable x étant supposée toujours réelle. De plus, on a, par hypothèse

$$\alpha\gamma - \beta^2 > 0, \qquad \text{(I)}\ ac - b^2 \neq 0.$$

Dans le cas où a, b, c sont, respectivement, proportionnels aux nombres α, β, γ, on obtient l'intégrale J sans peine au moyen de la formule (9) du texte (§ 2). En excluant ce cas simple, on calcule l'intégrale J de la manière suivante. En se servant des notations abrégées (4) du texte (§ 1), cherchons à satisfaire à l'identité

$$\sigma\, \psi(x) - f(x) = \frac{(\mu x + \nu)^2}{\varrho}$$

par des nombres réels $\sigma, \varrho, \mu, \nu$. On peut démontrer que le nombre σ doit satisfaire à l'équation

$$(\alpha\gamma - \beta^2)\,\sigma^2 - (ac + \gamma a - 2\beta b)\,\sigma + ac - b^2 = 0$$

dont les racines sont réelles et inégales[1]) (théorème II du texte, § 5); de plus, elles sont différentes de zéro. On peut trouver pour ces deux racines σ_1, σ_2 respectivement deux systèmes de nombres réels ϱ_1, μ_1, ν_1 et ϱ_2, μ_2, ν_2, satisfaisant aux identités (théorème III, § 5)

$$\text{(II)}\quad \sigma_1\, \psi(x) - f(x) = \frac{(\mu_1 x + \nu_1)^2}{\varrho_1}, \quad \sigma_2\, \psi(x) - f(x) = \frac{(\mu_2 x + \nu_2)^2}{\varrho_2}.$$

Les valeurs absolues des nombres ϱ_1, ϱ_2 peuvent être égales aux nombres positifs arbitraires (on peut poser $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$); de plus, on a (théorème IV, § 6)

$$\varrho_1\varrho_2 < 0, \quad \text{(III)}\ \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En posant $(k = \sqrt{f(x)})$

---

[1]) Ce n'est qu'une suite de la théorie du déterminant fonctionel de deux formes quadratiques.

Cf. *Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale*, 1894, p. p. 55—57, § 31 ou *W. Fr. Meyer, Allgemeine Formen und Invarianten-theorie*, Bd. I, 1909, p. p. 24—32, § 4.

$$\frac{\mu_1 x + \nu_1}{k} = t_1 , \quad \frac{\mu_2 x + \nu_2}{k} = t_2,$$

on en déduit

$$\frac{[(b\mu_i - a\nu_i)\, x + c\mu_i - b\nu_i]\, dx}{f(x)\, k} = dt_i \quad (i = 1, 2)$$

et, d'après les identités (II),

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{t_i^2 + \varrho_i}{\sigma_i \varrho_i} \qquad (i = 1, 2),$$

d'où il suit

$$\frac{[(b\mu_i - a\nu_i)\, x + c\mu_i - b\nu_i]\, dx}{\psi(x)\, k} = \frac{\sigma_i\, \varrho_i\, dt_i}{t_i^2 + \varrho_i},$$

$$U_i = \int \frac{[(b\mu_i - a\nu_i)\, x + c\mu_i - b\nu_i)\, dx}{\psi(x)\, k} = \sigma_i \varrho_i \int \frac{dt_i}{t_i^2 + \varrho_i} \quad (i = 1, 2).$$

Les nombres ϱ_1 et ϱ_2 ayant des signes contraires, l'une des intégrales auxiliaires U_1, U_2 s'exprime par la fonction arctan et l'autre par la fonction logarithmique. On obtient l'intégrale cherchée J sous la forme d'une combinaison linéaire

$$J = PU_1 + QU_2$$

des deux intégrales auxiliaires U_1, U_2, les coefficients P et Q étant définis par le système d'équations linéaires (28) du texte (§ 6) avec un déterminant différent de zéro en vertu des inégalités (I) et (III). Le résultat définitif de l'intégration est exprimé par les formules (36) et (36′) du texte (§ 7).

Dans les cas où l'on a $\beta a - \alpha b = 0$ ou $\gamma b - \beta c = 0$, l'une des racines σ_1, σ_2 est égale respectivement à a/α ou c/γ, et le calcul se simplifie (formules (49) et (54) du texte; §§ 8, 9).