Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 3, 338--368

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123974

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 1.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=8$$
$$x^2+y^2=353.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Filip Eliáš*, bohoslovec v Olomouci
Píšeme-li místo druhé rovnice

$$(x+y)^2+(x-y)^2=706$$

a klademe

(A) $$\sqrt{x+y}=u\,,\ \sqrt{x-y}=v\,,$$

nabudou dané rovnice tvaru

(M) $$u+v=8$$

(N) $$u^4+v^4=706.$$

Zmocníce (M) čtyrmi, nabudeme

$$u^4+4u^3v+6u^2v^2+4uv^3+v^4=4096$$

čili, odečtouce (N),

$$2uv(2u^2+3uv+2v^2)=3390$$

aneb $$uv[2(u+v)^2-uv]=1695$$

a klademe-li tu $u+v=8$,

$$(uv)^2-2\,.\,64\,.\,uv=-1695,$$
$$uv=64\pm 49=113\,,\ 15;$$

jsou tedy u, v kořeny rovnice

$$z^2-8z+113=0$$

nebo $$z^2-8z+15=0.$$

Kořeny prvé rovnice jsou

$$u, v=4\pm\sqrt{-97},$$

druhé $$u, v=4\pm 1.$$

Tedy dle rovnic (A)

$$x+y=25 \text{ nebo } x+y=9$$
$$x-y=9 \qquad\quad x-y=25,$$

pročež $x_1=17\,, y_1=8$ nebo $x_2=17\,, y_2=-8$,
omezujeme-li se pouze na hodnoty realné.

Jiné řešení. Zaslal p. *Josef Suchánek,* kand. učitelství v Srchu u Pardubic.

Zdvojmocníme-li dvakráte rovnici prvou, nabude tvaru

$$y^2 - 64x + 1024 = 0;$$

spojíme-li ji s rovnicí $\quad y^2 + x^2 = 353$

a vyloučíme y, dospějeme k rovnici

$$x^2 + 64x - 1377 = 0,$$

z níž ustanovíme $\quad x_1 = 17, \quad x_2 = -81$

$$y_1 = \pm 8, \; y_2 = \pm 8i\sqrt{97}.$$

Úloha 2.

Najděte obecný člen a součtový vzorec řady

3, 10, 28, 72, . . . ,

jež vznikla tím, že jsme znásobili souhlasné členy řady arithmetické a geometrické.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Slavomil Daněk,* stud. VIII. tř. gym. v Olomouci.

Jsou-li

$$\begin{array}{llll} a, & a+d, & a+2d, & a+3d, \ldots \\ b, & bq, & bq^2, & bq^3, \ldots \end{array}$$

žádané řady, máme k určení neznámých a, b, d, q podmínky

$$\begin{aligned} ab &= 3, \\ (a+d)\,bq &= 10, \\ (a+2d)\,bq^2 &= 28, \\ (a+3d)\,bq^3 &= 72. \end{aligned}$$

Eliminujeme-li z rovnic těchto a, (tím, že každou po řadě znásobíme q a pak od následující odečteme) nabudeme

$$\begin{aligned} bdq &= 10 - 3q, \\ bdq^2 &= 28 - 10q, \\ bdq^3 &= 72 - 28q. \end{aligned}$$

Eliminujíce bd, dostaneme

$$\frac{28 - 10q}{10 - 3q} = q, \quad \frac{72 - 28q}{28 - 10q} = q$$

čili

$$3q^2 - 20q + 28 = 0,$$

$$5q^2 - 28q + 36 = 0.$$

Společný kořen těchto dvou rovnic jest

$$q = 2.$$

Z předešlých rovnic vyplývá pak

$$bd = 2, \quad ab = 3.$$

Jedna z veličin a, b, d jest libovolna; zvolíme-li $a = 3$, bude $b = 1$, $d = 2$ a žádané řady

$$3, \; 5, \; 7, \; 9, \; 11, \ldots$$
$$1, \; 2, \; 4, \; 8, \; 16, \ldots,$$

n-tý člen dané řady jest tedy obecně

$$u_n = (2n + 1)\, 2^{n-1},$$

a součet n její členů

$$S_n = (2n - 1) \,.\, 2^n + 1.$$

Úloha 3.

Ustanovte součet řady, jejíž obecný člen jest

$$a_n = (-1)^{n-1} \left(a^{\frac{m+1}{2}} : b^{\frac{m-1}{2}}\right),$$
$$m = (2n - 1)(-1)^{n-1}.$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Jan Kettner*, stud. VII. tř. r. v Karlíně. Klademe-li postupně

$$n = 1, \; 2, \; 3, \; 4, \ldots,$$

obdržíme $\quad m = 1, \; -3, \; 5, \; -7, \ldots$

a členy řady jsou

$$a_1 = a, \quad a_2 = -\frac{b^2}{a}, \quad a_3 = \frac{a^3}{b^2}, \quad a_4 = -\frac{b^4}{a^3}, \ldots.$$

Jest tedy součet dané řady

$$S_n = a - \frac{b^2}{a} + \frac{a^3}{b^2} - \frac{b^4}{a^3} + \ldots$$

čili $\quad S_n = \Sigma_1 - \Sigma_2,$

klademe-li

$$\Sigma_1 = a + \frac{a^3}{b^2} + \frac{a^5}{b^3} + \ldots, \quad \Sigma_2 = \frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^3} + \frac{b^6}{a^5} + \ldots;$$

jak patrno, jsou Σ_1, Σ_2 řady geometrické.

Je-li n sudé, má každá z těchto řad $\frac{n}{2}$ členů a jest pak

$$\Sigma_1 = a \cdot \frac{\frac{a^n}{b^n} - 1}{\frac{a^2}{b^2} - 1} = \frac{ab^2 (a^n - b^n)}{b^n (a^2 - b^2)}$$

$$\Sigma_2 = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{\frac{b^n}{a^n} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} = \frac{ab^2 (a^n - b^n)}{a^n (a^2 - b^2)},$$

tudíž

$$S_n = \Sigma_1 - \Sigma_2 = \frac{(a^n - b^n)^2}{a^{n-1} b^{n-2} (a^2 - b^2)}.$$

Je-li n *liché*, má Σ_1 členů $\frac{n+1}{2}$, Σ_2 členů $\frac{n-1}{2}$, tedy o člen a_n méně,

$$a_n = \frac{a^n}{b^{n-1}};$$

jest pak
$$S_n = \frac{(a^{n-1} - b^{n-1})^2}{a^{n-2} b^{n-3} (a^2 - b^2)} + \frac{a^n}{b^{n-1}}$$

čili
$$S_n = \frac{a^{2n} - 2a^{n-1} b^{n+1} + b^{2n}}{a^{n-2} b^{n-1} (a^2 - b^2)}.$$

Poznámka redakční. Abychom obdrželi jediný vzorec vyjadřující S_n pro n sudé i liché, pišme vzorec hořejší takto:

Pro sudé n jest

$$S_n = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[\frac{a^{2n} + b^{2n}}{a^{n-1} b^{n-2}} - 2ab^2\right]$$

a pro liché n

$$S_n = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[\frac{a^{2n} + b^{2n}}{a^{n-2} b^{n-1}} - 2ab^2\right].$$

Jelikož jest

při n sudém $a^{n-1} = a^{\frac{2n-3+(-1)^n}{2}}$, $b^{n-2} = b^{\frac{2n-3-(-1)^n}{2}}$,

při n lichém $a^{n-2} = a^{\frac{2n-3+(-1)^n}{2}}$, $b^{n-1} = b^{\frac{2n-3-(-1)^n}{2}}$,

lze vzorci součtovému dáti obecnou podobu

$$S_n = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[\frac{a^{2n} + b^{2n}}{a^p b^q} - 2\,ab^2\right],$$

položíme-li

$$p = \frac{2n - 3 + (-1)^n}{2}, \quad q = \frac{2n - 3 - (-1)^n}{2}.$$

Úloha 4.

Plochy dvou pravoúhlých trojúhelníků o téže přeponě mají po 9 a 21 m^2; obvod prvého jest o 2 m kratší obvodu druhého trojúhelníka. Stanovte jejich strany.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Otakar Quadrát*, stud. VII. tř. r. v Praze-III.

Odvěsny prvého trojúhelníka buďte x, y, druhého u, v; pak máme rovnice

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = u^2 + v^2,$$
$$(2) \qquad xy = 18,$$
$$(3) \qquad uv = 42,$$
$$(4) \qquad (u + v) - (x + y) = 2.$$

Sečteme-li rovnice

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2,$$
$$2xy = 36,$$
$$84 = 2uv,$$

nabudeme

$$(x + y)^2 + 48 = (u + v)^2$$

čili

$$(u + v)^2 - (x + y)^2 = 48.$$

Dělíme-ti tuto rovnici rovnicí (4), dostaneme

$$u + v + x + y = 24,$$

z níž pak a z rovnice (4) plyne

$$u + v = 13, \qquad x + y = 11.$$

Z rovnic těchto a z rovnic (3) a (2) najdeme snadno za odvěsny (x, y) prvého trojúhelníka 9 a 2, druhého (u, v), 7 a 6 jedn. Přepona každého z obou trojúhelníků $= \sqrt{85}$.

Úloha 5.

Obvody dvou obdélníků o téže úhlopříčce mají po 62 a 58 jednotkách; součet plošných obsahů obou obdélníků jest 420; najděte jich rozměry.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Robert Paukert*, stud. VI. tř. gymn. v Hradci Králové.

Jsou-li rozměry jednoho obdélníka x, y, druhého u, v, máme rovnice

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \tag{1}$$

$$x + y = 31, \tag{2}$$

$$u + v = 29, \tag{3}$$

$$xy + uv = 420. \tag{4}$$

Zmocněním rovnic (2) a (3) dostaneme

$$x^2 + 2xy + y^2 = 961,$$
$$u^2 + 2uv + v^2 = 841.$$

Odečteme-li od součtu těchto dvou rovnic rovnici (1), vyjde

$$2xy = 2uv + 120$$

čili

$$xy - uv = 60.$$

Tato spojena s rovnicí (4) podává

$$xy = 240; \qquad uv = 180,$$

a rovnice tyto spojeny s rovnicemi (2) a (3) dávají za rozměry x, y prvého obdélníka 16 a 15, druhého obdélníka 20, 9.

Úloha 6.

Je-li U průsečík úhlopříček čtyrúhelníka $ABCD$, a je-li $AU = AD$, $BU = BC$, lze čtyrúhelníku tomu opsati kružnici.

Je-li $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$, jest poloměr této kružnice určen vztahem

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 4.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Bohumil Šudoma*, stud. VIII. tř. g. v Benešově.

Budiž v čtyrúhelníku daném

$$\sphericalangle AUD = \omega;$$

potom jest též

$$\sphericalangle ADU = \omega, \qquad \sphericalangle BUC = \sphericalangle BCU = \omega.$$

Ježto jest tedy

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACB,$$

lze čtyrúhelníku ABCD opsati kružnici.

Tím první část úlohy dokázána. Abychom odvodili relaci o poloměru této kružnice, uvažme, že jest v trojúhelníku ABC

$$\sin\omega = \frac{a}{2r}$$

a v trojúhelníku BCD

$$\sin 2\omega = \frac{c}{2r}.$$

Dělíce tuto rovnici rovnicí předcházející, obdržíme

$$\cos\omega = \frac{c}{2a},$$

vyloučením úhlu ω užitím vztahu

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$$

přijdeme k relaci dané

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 4.$$

Úloha 7.

V kružnici danou vepsán jest harmonický čtyrúhelník ABCD t. j. takový, ve kterém

$$\overline{AB}\,.\,\overline{CD} = \overline{BC}\,.\,\overline{AD}.$$

Dány-li dva sousední vrcholy A, B, které jest geom. místo průsečíku úhlopříček čtyrúhelníka ABCD?

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *V. Charfreitág*, stud. VII. třídy reálné v Kostelci n. Orl.

Kružnice opsaná o čtyrúhelník ABCD měj poloměr r, střed její souřadnice a, b v soustavě pravoúhlé, jejíž počátek půlí stranu $\overline{AB} = 2a$ a jejíž osa X splývá s $\overline{AB}$. Označme úhly

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = \alpha, \quad \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \beta,$$
$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \gamma, \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \delta.$$

Potom jest

$$\overline{AB} = 2r \sin\delta, \quad \overline{BC} = 2r \sin\alpha,$$
$$\overline{CD} = 2r \sin\gamma, \quad \overline{DA} = 2r \sin\beta;$$

podmínka harmonického čtyrúhelníka vyjádřená rovnicí

$$\overline{AD} \,.\, \overline{BC} = \overline{AB} \,.\, \overline{CD}$$

přechází tak v relaci

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\gamma \sin\delta.$$

Při tom jest

$$\sin\delta = \frac{a}{r}, \quad \cos\delta = \frac{b}{r}.$$

Jelikož jest

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2R,$$

jest

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta + \delta),$$

a proto

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\delta \sin(\alpha + \beta + \delta).$$

Rozvedeme-li pravou stranu této rovnice, nabudeme

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\delta\,[\sin\alpha\cos\beta\cos\delta + \cos\alpha\sin\beta\cos\delta + \cos\alpha\cos\beta\sin\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\delta]$$

čili

$$\sin\delta\,[\operatorname{cotg}\alpha\cos\delta + \operatorname{cotg}\beta\cos\delta + \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\sin\delta - \sin\delta] = 1.$$

Rovnice úhlopříček čtyrúhelníka ABCD jsou

$$y = \operatorname{tg}\alpha \,.\, (x + a), \quad y = -\operatorname{tg}\beta \,.\, (x - a),$$

pročež

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{x + a}{y}, \quad \operatorname{cotg}\beta = -\frac{x - a}{y}.$$

Tím lze rovnici podmíněnou psáti v podobě

$$\frac{a}{r}\left[\frac{b(x+a)}{ry} - \frac{b(x-a)}{ry} - \frac{a(x^2 - a^2)}{ry^2} - \frac{a}{r}\right] = 1$$

aneb po náležitém zjednodušení

$$a^2x^2 + (a^2 + r^2)y^2 - 2a^2by - a^4 = 0.$$

Rovnice tato značí žádané místo geometrické; tím jest ellipsa, jejíž střed má souřadnice

$$x = 0, \quad y = \frac{a^2b}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

a jejíž poloosy, rovnoběžné k osám souřadným, jsou

$$A = \frac{ar\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \quad B = \frac{a^2r\sqrt{2}}{a^2 + r^2}.$$

Jiné řešení. Zaslal p. *František Grössl*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.

Dána buď kružnice a v ní vrcholy A, B, C harmonického čtyrúhelníka; jest stanoviti vrchol čtvrtý D. Prodlužme CB o část BE = CB, a mezi rameny úhlu ACE veďme příčku FG || AE, FG = AB.

Potom jest

$$2BC : CG = AC : CF \quad \text{čili} \quad 2BC . CF = AC . CG.$$

Trojúhelník CFG jest proto shodným s trojúhelníkem ABD, neboť AB = FG, $\sphericalangle$ ADB = $\sphericalangle$ FCG, strany trojúhelníka ABD dle věty Ptolemeovy vyhovují též rovnici

$$2BC . AD = AC . BD.$$

Jest proto

$$CF = AD, \quad CG = BD;$$

tím lze vrchol D snadně sestrojiti. Jelikož ke každému C přísluší pak jediné D, jsou paprsky AC, BD paprsky dvou kollinearných svazků, a průsečík jich vytvořuje křivku druhého stupně. Jelikož křivka ta nemůže míti bodů v nekonečnu, jest *ellipsou*. Ellipsa ta jest kollinearná s družnicí opsanou o harmonický čtyrúhelník ABCD; AB jest osou, pól strany AB středem kollineace obou křivek.

Poznámka redakční. Dány-li vrcholy A, B, C harmonického čtyrúhelníka, lze sestrojiti bod D jakožto průsečík opsané kružnice se spojnicí vrcholu B a pólu úhlopříčky AC.

Úloha 8.

Spojíce náležitě 8 vrcholů pravidelného dvanáctistěnu, nabudeme hran krychle; stanovte délku hrany její, dána-li hrana a dvanáctistěnu.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Josef Roček*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Vedeme-li od některého vrcholu pravidelného dvanáctistěnu v každé straně, jež se v něm sbíhají, obě úhlopříčky, stojí tyto, střídavě vzaty (na př. 1—3, 1—7, 1—14) na sobě kolmo. Jest totiž dle základní věty sfer. trigonometrie

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\,;$$

pro odchylku dvou stěn pravidelného dvanáctistěnu

$$a = b = c = 108^0,$$

tedy

$$\cos A = \frac{\cos a\,(1 - \cos a)}{\sin^2 a} = \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \frac{-\sin 18^0}{2 \sin^2 36^0}$$
$$= \frac{-1}{4 \sin 36^0 \cos 18^0},$$

a pro úhel dvou úhlopříček jako 1—3, 1—7, dle téže základní věty sferiky

$$\cos \mu = \cos 36^0 \cos 72^0 - \frac{1}{4} = 0,$$

pročež μ úhel pravý. Jsouť tedy vytčené úhlopříčky na sobě kolmo a příslušný mnohostěn krychle.

Ježto hrana u krychle jest úhlopříčkou pravidelného pětiúhelníka, jehož strana jest a, máme, značí-li r poloměr kruhu pětiúhelníku opsaného,

$$a = 2r \sin 36^0,$$
$$u = 2r \sin 72^0 = 2a \cos 36^0 = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Úloha 9.

Do krychle vepsán jest a) válec kolmý, jehož osa splývá s těl. úhlopříčkou krychle a jehož kruhové hrany dotýkají se *každá tří stěn krychle ve středech jejich; b) dvojkužel, jenž má vrcholy v krajních bodech úhlopříčky krychlové, a jehož hrana kruhová dotýká se všech šesti stěn krychle.*

V kterém poměru jest obsah válce a dvojkužele?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *Karel Čupr*, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.

a) Základna válce jest kruh vepsaný v trojúhelník omezený úhlopříčkami tří čtvercových stěn; je-li a hrana krychle, jest úhlopříčka stěnová $a\sqrt{2}$. Poloměr ϱ základny válcové jest pak

$$\varrho = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Výška válce jest třetina tělesné úhlopříčky krychle, pročež

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

a obsah válce

$$V = \pi\varrho^2 v = \frac{\pi a}{18}\sqrt{3}.$$

b) Základna kužele vepsána jest do pravidelného šestiúhelníka, jehož rovina půlí úhlopříčku krychlovou a stojí na ní kolmo; strana tohoto šestiúhelníka jest $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, proto poloměr r vepsané mu kružnice

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{6}.$$

Jest tedy obsah dvojkužele

$$K = \frac{1}{3}\pi r^2 . a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3}{8}\sqrt{3}.$$

Poměr obou obsahů

$$V : K = \frac{1}{18} : \frac{1}{8} = 4 : 9.$$

Úloha 10.

Z kolmého kužele kruhového, jehož strana s svírá se zá-

kladnou úhel α, vyříznouti jest výseč, která rovná se $\frac{1}{n}$ koule kuželi opsané. Vypočítati jest úhel této výseče.

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. Zaslal p. *V. Simandl,* stud. VI. tř. g. v Mladé Boleslavi.

Poloměr koule opsané o kužel úlohou určený jest, značí-li r poloměr základny,

$$\varrho = \frac{s}{2 \sin \alpha} = \frac{r}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{r}{\sin 2\alpha}.$$

Obsah koule jest pak

$$K = \frac{4}{3} \pi \varrho^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{r^3}{\sin^3 2\alpha},$$

a obsah výseče o úhlu ω z kužele vyříznuté

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{r^3 \omega}{360^0} \operatorname{tg} \alpha.$$

Má-li dle podmínky býti

$$V = \frac{1}{n} K,$$

jest

$$\omega = \frac{180^0}{n \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha}.$$

Při kuželi rovnostranném jest

$$\omega = \frac{1280^0}{n}.$$

Úloha 11.

V bodě m paraboly sestrojena normála N_1, kteráž parabolu seče v druhém bodě n; v tomto zřízena normála N_2. Jest stanoviti bod m tak, aby normály N_1, N_2 svíraly daný úhel φ.

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Josef Papřok,* stud. VII. tř. g. v Místku na Moravě.

Jsou-li $x_1 y_1$ souřadnice bodu m, jest

$$y_1^2 = 2px_1$$

a rovnice normály N_1 v tomto bodě sestrojené

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}\left(x - \frac{y_1^2}{2p}\right).$$

Směrnice této normály jest

$$A_1 = -\frac{y_1}{p}.$$

Bod *n* jakožto druhý průsečík této normály s parabolou má souřadnici

$$y_2 = -\frac{y_1^2 + 2p^2}{y_1}$$

a normála v něm sestrojená má směrnici

$$A_2 = -\frac{y_2}{p} = \frac{y_1^2 + 2p^2}{py_1}.$$

Odchylku φ obou normál stanoví vzorec

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2},$$

z něhož dosazením hořejších hodnot vyvodíme

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2p}{y_1}.$$

Jsou tedy souřadnice hledaného bodu *m*

$$y_1 = \frac{2p}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad x_1 = \frac{2p}{\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Abychom bod *m* sestrojili, veďme k parabole tečnu tvořící s X úhel α takový, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi;$$

dotyčný bod jest bodem hledaným *m*.

Úloha 12.

Kružnice na průměru mn sestrojená seče parabolu úlohy 11. v dalším bodě p; jest analyticky vyjádřiti obsah trojúhelníka mnp.

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. Zaslal p. *Otakar Balcar*, stud. VIII. tř. g. v Brně.

Protíná-li parabolu $y^2 = 2px$
kružnice $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$,
jsou y bodů průsečných kořeny rovnice, kterou vyloučením x z obou rovnic předcházejících obdržíme. Jest to rovnice

$$y^4 + 4p(p-a)y^2 - 8bp^2y + 4p^2c^2 = 0,$$

v níž schází člen obsahující y^3; proto součet kořenů této rovnice rovná se nulle. Kružnice na průměru mn sestrojená má s parabolou společné 4 body, z nichž dva sjednocují se v m; užijeme-li označení úlohy 11. a jsou-li x_3 y_3 souřadnice bodu p, jest

$$2y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Odtud vypočítáme

$$y_3 = -2y_1 + \frac{y_1^2 + 2p^2}{y_1} = \frac{2p^2 - y_1^2}{y_1}.$$

Obsah trojúhelníka mnp jest pak

$$\varDelta = \frac{1}{4p}[y_1 y_2 (y_1 - y_2) + y_2 y_3 (y_2 - y_3) + y_3 y_1 (y_3 - y_1)]$$
$$= -\frac{1}{4p}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1).$$

Dosadíme-li za y_2 a y_3 hodnoty a vynecháme-li ukazatele při y_1, nabudeme výrazu

$$\varDelta = \frac{4p(p^4 - y^4)}{y^3}.$$

Poznámka. Je-li A tangenta úhlu α sevřeného osou X a tečnou v bodě m, jest $A = \frac{p}{y}$
a proto $\varDelta = 4p^2 A(A^2 - 1)$.

Při $y = p$ čili $A = 1$ jest $\varDelta = 0$, což tím se vysvětluje že v případě tom bod p sjednocuje se s m, kružnice mnp stává se kružnicí křivosti v bodě m.

Úloha 13.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{2xy} = 3 - 2\sqrt{10}$$
$$x^2 + y^2 = 41.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Milivoje Cermanović*, stud. med. ve Vídni.

Zmocníce rovnici druhou pišme ji ve tvaru

$$(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=1681\,.$$

Klademe-li nyní

$$\sqrt{x^2-y^2}=u\,,\quad \sqrt{2\,xy}=v\,,$$

nabudou dané rovnice tvaru

$$\text{(M)}\qquad u-v=3-2\sqrt{10}$$

$$\text{(N)}\qquad u^4+v^4=1681\,.$$

Zmocníme-li rovnici (M) čtyrmi a odečteme pak od (N), nabudeme

$$4u^3v-6u^2v^2+4uv^3=-2160+1176\sqrt{10}$$

čili

$$uv\,[2(u-v)^2+uv]=-1080+588\sqrt{10}$$

a vložíme-li za $u-v=3-2\sqrt{10}$,

$$(uv)^2+2\,.\,(49-12\sqrt{10})\,uv=-1080+588\sqrt{10}\,.$$

Odtud vypočteme

$$uv=-(49-12\sqrt{10})\pm\sqrt{2761-588\sqrt{10}}$$

čili

$$uv=-49+12\sqrt{10}\pm(49-6\sqrt{10})\,,$$

tedy

$$uv=6\sqrt{10}\ \text{nebo}=-98+18\sqrt{10}\,.$$

Nyní jest dle (M)

$$u^2-2uv+v^2=49-12\sqrt{10}$$

$$4uv=24\sqrt{10},$$

tedy

$$u+v=\sqrt{49+12\sqrt{10}}=3+2\sqrt{10},$$

což spojeno s rovnicí (M) podává

$$u=3\,,\quad v=2\sqrt{10}\,.$$

Druhé dvě hodnoty u, v jsou imaginárné.

Vložíme-li za u, v jich hodnoty z (A), máme

$$x^2-y^2=9\,,\quad 2\,xy=40\,,$$

z nichž snadno vypočteme

$$x^2+y^2=41$$

a pak

$$x=\pm5\,,\quad y=\pm4\,.$$

Úloha 14.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\sqrt[3]{x^2+2y^2}+\sqrt{x^2+20y}=36$$
$$\sqrt{x^2+20y}-4\sqrt[6]{x^2+2y^2}=15.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *František Přibyl*, stud. VI. tř. r. v Písku. Odečtouce druhou rovnici od první nabudeme

$$\sqrt[3]{x^2+2y^2}+4\sqrt[6]{x^2+2y^2}=21\,,$$

odkudž
$$\sqrt[6]{x^2+2y^2}=3 \text{ aneb } =-7\,.$$

Hledíme-li k prvé z těchto hodnot, obdržíme rovnice

$$x^2+2y^2=729$$
$$x^2+20y=729\,,$$

z nichž po vyloučení x plyne

$$y^2-10y=0.$$

Jest tedy
$$y_1=0,\ y_2=10\,,$$

k čemuž přísluší hodnoty

$$x_1=\pm 23,\ x_2=\pm 27\,.$$

Klademe-li
$$\sqrt[6]{x^2+2y^2}=-7\,,$$

obdržíme soustavu rovnic

$$x^2+2y^2=117\,649$$
$$x^2+20y=\quad 169\,,$$

jejíž kořeny jsou hodnoty neracionálné, nezajímavé.

Úloha 15.

Na výstavě složeno bylo 13685 pomerančů do čtyrboké pyramidy. a) Z kolika vrstev skládala se tato pyramida? b) Jak byla vysoká, byl-li průměr každého pomeranče 10 cm?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Josef Píč,* stud. VII. tř. r. v Kostelci nad Orlicí.

a) Součet n členů řady čtverců

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

máme tedy rovnici

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 13685$$

čili
$$n(n+1)(n+\frac{1}{2}) = 3 \times 13685 = 41055,$$

kdež n počet vrstev znamená.

Jelikož $n^3 < n(n+\frac{1}{2})(n+1) < (n+\frac{1}{2})^3$,

jest
$$n = E\sqrt[3]{41055} = 34,$$

tedy obsahovala ona pyramida 34 vrstev.

Skutečně dá hořejší vzorec pro počet pomerančů v pyramidě o 34 vrstvách

$$\frac{34 \times 35 \times 69}{6} = 17 \times 35 \times 23 = 13685.$$

b) Vedeme-li středy pomerančů každé vrstvy rovinu, jest vzdálenost dvou takových rovin rovna výšce čtyrbokého jehlanu, jehož všechny hrany jsou rovny $2r$, jest tedy výška $v = r\sqrt{2}$ Těch vzdáleností jest $n - 1 = 34 - 1 = 33$; a poněvadž vzdálenost roviny vedené středy pomerančů ve spodní vrstvě od podlahy jest r a rovněž vzdálenost středu nejhořejšího pomeranče od vrcholu jehlanu jest také r, jest výška celé pyramidy

$$v = 33r\sqrt{2} + 2r = r(2 + 33\sqrt{2}).$$

Vložíme-li sem za $r = 5\ cm$ a za $\sqrt{2} = 1{\cdot}414$, nabudeme

$$v = 243\ cm.$$

Poznámka autora úlohy.

1) Znamená-li obecně P počet koulí ve čtyrbokou pyramidu složených, plyne z rovnice

$$n(n+1)(n+\frac{1}{2}) = 3P,$$

$$n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2} = 3P,$$

a jelikož $$\sqrt[3]{n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2}} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + \cdots,$$

máme

(A) $$n \doteq -\frac{1}{2} + \sqrt[3]{3P}.$$

V naší úloze jest $P = 13685$,

$$\sqrt[3]{3P} = \sqrt[3]{41055} = 34{\cdot}5,$$

$$n = 34.$$

2) Chceme-li rovnici

$$n(n+1)(2n+1) = 6P$$

řešiti návodem rovnic třetího stupně, pišme ji ve tvaru

$$2n(2n+2)(2n+1) = 24P$$

a položme $$2n + 1 = x,$$

tedy $$4n^2 + 4n + 1 = x^2, \quad 2n(2n+2) = x^2 - 1;$$

tím nabude podoby

$$x^3 - x = 24P,$$

a odtud

$$x = \sqrt[3]{12P + \sqrt{144P^2 - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{12P - \sqrt{144P^2 - \frac{1}{27}}}.$$

Klademe-li

$$\sqrt{144P^2 - \frac{1}{27}} = 12P - \frac{1}{648P} - \cdots,$$

nabudeme $$x = \sqrt[3]{24P - \frac{1}{648P} - \cdots} + \sqrt[3]{\frac{1}{648P} + \cdots}$$

čili $$x = 2\sqrt[3]{3P} + \frac{1}{6\sqrt[3]{3P}} - \cdots,$$

$$\text{(B)} \qquad n = \sqrt[3]{3\mathrm{P}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12\sqrt[3]{3\mathrm{P}}} - \dots$$

v souhlasu se vzorcem (A).

Úloha 16.

Města A a B na bocích pohoří jest spojiti cestou vedoucí přes přímý vodorovný hřbet tak, aby cesta měla po obou bocích totéž stoupání. Svah boku, na němž leží A, jest m; svah druhého boku, na němž jest B, rovná se n. Vodorovné vzdálenosti míst A, B od hřbetu jsou a, b; odlehlost těchto vzdáleností — měřená na hřbetě pohoří — jest c.

Vyšetřiti bod P, kde cesta z A do B překročí hřbet.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Frant. Kosmák,* stud. VIII. tř. gymn. v Brně.

Spustíme-li s bodů A, B kolmice na hřbet pohoří

$$\mathrm{AC} \perp \mathrm{CD}, \quad \mathrm{BD} \perp \mathrm{CD},$$

jest vzdálenost pat $\mathrm{CD} = c$. Označme

$$\mathrm{CP} = x, \quad \mathrm{DP} = c - x;$$

potom jest stoupání cesty AP

$$s_1 = \frac{ma}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

a podobně stoupání cesty BP

$$s_2 = \frac{nb}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Dle podmínky úlohy jest $s_1 = s_2$ čili

$$am\sqrt{b^2 + (c - x)^2} = nb\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Odtud vyplývá rovnice kvadratická

$$(a^2m^2 - b^2n^2)\,x^2 - 2a^2m^2cx + a^2b^2\,(m^2 - n^2) + a^2c^2m^2 = 0,$$

z níž vypočítáme

$$x = \frac{1}{a^2m^2 - b^2n^2}\left[a^2m^2c \pm \sqrt{a^2b^2c^2m^2n^2 - a^2b^2(m^2 - n^2)(a^2m^2 - b^2n^2)}\,\right].$$

Dle smyslu úlohy má býti $x < c$; jest však

$$\frac{a^2m^2c}{a^2m^2 - b^2n^2} > c,$$

proto ve výrazu pro x sluší voliti záporné znaménko odmocniny.

Úloha 17.

Kolikrát lze čísti slovo „Komenský“ ve skupině

ý	*k*	*s*	*n*	*e*	*n*	*s*	*k*	*ý*
k	*s*	*n*	*e*	*m*	*e*	*n*	*s*	*k*
s	*n*	*e*	*m*	*o*	*m*	*e*	*n*	*s*
n	*e*	*m*	*o*	***K***	*o*	*m*	*e*	*n*
s	*n*	*e*	*m*	*o*	*m*	*e*	*n*	*s*
k	*s*	*n*	*e*	*m*	*e*	*n*	*s*	*k*
ý	*k*	*s*	*n*	*e*	*n*	*s*	*k*	*ý*.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Josef Ludvík*, stud. VII. tř. reálky v Novém Městě na Moravě.

Skupina daná skládá se ze čtyř skupin shodných; uvažujme skupinu

K	*o*	*m*	*e*	*n*
o	*m*	*e*	*n*	*s*
m	*e*	*n*	*s*	*k*
e	*n*	*s*	*k*	*ý*.

Skupina obsahující z první řádky písmena *Komen* jest 1; skupiny obsahující z první řádky písmeny *Kome* jsou 3; písmeny *Kom* počíná 6 skupin, písmeny *Ko* 10 skupin, a písmenem *K* 15 skupin. Lze tedy v jedné čtvrtině čísti dané slovo

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35\text{krát},$$

v celku pak $4 . 35 = 140$krát.

Jiné řešení. Zaslal p. *Václav Simandl,* stud. VI. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Ve čtvrtině daného obrazce lze čísti slovo *Komenský* tolikrát, kolik jest kombinací s opakováním 5 prvků ve třídě třetí, tedy

$$\frac{5 \,.\, 6 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 35\text{krát},$$

celkem tedy 140krát.

Poznámka autora úlohy.

1. Stanovme nejprvé kolikráte lze čísti n řad po m prvcích;

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, m \\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots, (m+1) \\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots, (m+2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n, (n+1), \ldots, (m+n-1). \end{array}$$

a) *Jednu* řadu prvků

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, m$$

lze čísti jediným způsobem.

b) *Dvě* řady po m prvcích

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, m \\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots, (m+1) \end{array}$$

lze čísti m krát.

c) Přibéřeme-li z třetí řady nejprvé poslední prvek $(m+2)$,

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3, \ldots, (m-1),\ m \\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, m,\ (m+1) \\ \qquad\qquad\qquad\ (m+2), \end{array}$$

lze k němu čísti tolikráte, jako k prvku $(m+1)$ druhé řady, totiž m kráte.

K předposlednímu prvku $(m+1)$ třetí řady (a odtud k $m+2$) lze čísti $(m-1)$krát.

K předcházejícímu prvku m (a odtud k $m+1$, $m+2$) lze čísti $(m-2)$krát atd., až konečně k prvku 3 v třetí řadě a odtud ke 4, 5, ..., $(m+2)$, jednou. *Tři* řady po m prvcích lze čísti tedy celkem

$$m + (m-1) + (m-2) + \ldots + 1 = \frac{m\,(m+1)}{2}$$

čili

$$\binom{m+1}{2}\ \text{krát}.$$

d) Podobně dále postupujíce shledáme, že lze *čtyři* řady po m prvcích čísti

$$\binom{m+1}{2}+\binom{m}{2}+\binom{m-1}{2}+\ldots+\binom{2}{2}=\binom{m+2}{3}\text{ krát;}$$

pět řad

$$\binom{m+2}{3}+\binom{m+1}{3}+\binom{m}{3}+\ldots+\binom{3}{3}=\binom{m+3}{4}\text{ krát,}$$

a vůbec n řad $\binom{m+n-2}{n-1}$ krát.

Kdybychom počítali dle sloupců, nabyli bychom

$$\binom{m+n-2}{m-1}\text{ krát;}$$

$$\text{obojí}=\frac{(m-1+n-1)!}{(m-1)!\,(n-1)!}=\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,(n-1)!}.$$

V dané skupině lze slovo *Komenský* čísti

$$4.\binom{5+4-2}{3}=4.\binom{7}{3}=4.35=140\text{krát.}$$

Úloha 18.

Na nejjednodušší tvar uvésti jest výraz

$$x=\frac{a^2 \sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha-ab}{a\sin^2\alpha-b\cos^2\alpha}.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Livora*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích.

Nahradíme-li v daném výraze $\cos^2\alpha$ hodnotou $1-\sin^2\alpha$, nabudeme

$$x=\frac{(a^2-b^2)\sin^2\alpha-b(a-b)}{(a+b)\sin^2\alpha-b};$$

vytkneme-li v čítateli společného činitele, ustanovíme

$$x = \frac{(a - b)[(a + b)\sin^2\alpha - b]}{(a + b)\sin^2\alpha - b}$$

čili po náležitém zkrácení

$$x = a - b.$$

Úloha 19.

O čtyrúhelníku ABCD, ve kterém

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = b,$$

dokázati jest relaci

$$a \sin\frac{\alpha - \beta}{2} = b \sin\frac{\gamma - \delta}{2},$$

jsou-li úhly α, β, γ, δ *při vrcholech A, B, C, D čtyrúhelníka.*

Prof. *R. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Václav Černovský*, stud. VII. tř. r. v Praze-II.

Označme úhlopříčky $\overline{AC} = m$, $\overline{BD} = n$; potom jest dle věty Carnotovy

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$$

$$n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

tudíž
$$m^2 - n^2 = 2ab(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Jest však také

$$m^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\delta$$

$$n^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\gamma,$$

pročež
$$m^2 - n^2 = 2b^2(\cos\gamma - \cos\delta).$$

Odtud vyplývá

$$a(\cos\beta - \cos\alpha) = b(\cos\gamma - \cos\delta)$$

čili
$$a \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2} = b \sin\frac{\gamma + \delta}{2} \sin\frac{\gamma - \delta}{2};$$

jelikož však
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 2R - \frac{\gamma + \delta}{2},$$

jest $$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma+\delta}{2}$$

a proto $$a\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=b\sin\frac{\gamma-\delta}{2}.$$

Úloha 20.

Sestrojiti jest čtyrúhelník ABCD, ve kterém

$$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA},$$

dány-li délky obou úhlopříček a úhel jimi sevřený.

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Vilém Rychlík*, stud. VI. tř. akad. g. v Praze.

Buďtež $\overline{AC}=m$, $\overline{BC}=n$ délky úhlopříček, ω úhel jimi sevřený.

Učiňme $$CF \parallel DB,\ CF=DB,$$ $$AG \parallel DB,\ AG=DB;$$

potom jest ACFG rovnoběžník, jehož strany jsou m, n a úhel jich $\omega = \sphericalangle ACF$.

V určeném takto rovnoběžníku veďme úhlopříčku CG. Jelikož jest

$$BC=BF=BG,$$

jest bod B středem kružnice opsané v trojúhelník CFG; sestrojíme-li tento střed, jsou tím nalezeny délky stran

$$\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b$$

a čtyúhelník ABCD lze sestrojiti.

Jiné řešení. Zaslal p. *Frant. Hrbatý*, stud. VII. tř. r. v Jevíčku.

Veďme v rovnoramenných trojúhelnících ACD, BCD výšky příslušné k půdicím AC, BD; výšky půlí tyto půdice v bodech H, K a protínají se v bodě S. Při tom jest $\sphericalangle CSD=\omega$.

Jest tedy trojúhelník CHS určen úhlem ω a odvěsnou $CH=\frac{m}{2}$, trojúhelník DKS úhlem ω a odvěsnou $\frac{n}{2}$.

Sestrojíme-li oba tyto trojúhelníky v příslušné poloze (o společném úhlu ω), učiníme pak $HC = HA$, $KD = KB$, jest žádaný čtyrúhelník nalezen.

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Balcar Otakar, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 20.
Barbořík Arnošt, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13. až 15., 17. až 20.
Bárta Jan, stud. V. tř. r. ve Velkém Meziříčí, úl. 1., 4., 5.
Beck Emil, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 3. až 6., 8., 9., 10., 13. až 16., 18. až 20.
Bernard Josef, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 1. až 5., 14.
Bernreiter František, stud. VII. tř. r. v Praze, Ječná ul., úl. 1., 2., 4., 5., 8., 9., 10., 14., 18., 19.
Bílek Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 6., 10., 13. až 15., 18. až 20.
Boček Oldřich, stud. VII. tř. r. v Praze (Ječná ul.), úl. 1., 2., 5., 14., 20.
Boubela Vladimír, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 1., 2., 4., 5., 8., 9., 10., 13., 14., 15., 17., 20.
Bouček Adolf, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 5., 14., 18.
Brzobohatý Ed., stud. VIII. g. v Brně, úl. 20.
Březina Ferdinand, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1. až 5., 8., 9., 10., 13., 14., 15., 17., 18., 20.
Burda Zdeněk, stud. V. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 4.
Cenefels Karel, stud. VII. tř. g. v Domažlicích, úl. 1., 2., 4., 5.
Cermanović Milivoje, stud. med. ve Vídni, úl. 1. až 8., 11., 13., 14., 15., 17. až 20.
Čapek František, stud. VI. tř. g. ve Valašském Meziříčí, úl. 1. až 5., 9., 14., 15.
Čapek Jan, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 4., 5., 14., 18., 20.
Čermák Josef, stud. V. tř. r. ve Velkém Meziříčí, úl. 1., 4., 5.
Černík Josef, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 8., 9.
Černovský Václav, stud. VII. tř. r. v Praze (Ječná ul.), úl. 1. až 5., 8., 9., 10., 14., 15., 18., 19., 20.
Čihák Otakar, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 1., 2., 4., 5., 13., 14., 18., 20.

Čupr Karel, stud. VIII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 1. až 20.
Daněk Slavomil, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 20.
Danko Jaroslav, stud. VI. tř. na Žižkově, úl. 1., 2., 4., 5, 8.
Dašek Václav, stud. VI. tř. r. v Náchodě, úl. 1. až 20.
Duřpek Antonín, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 1. až 11., 13. až 20.
Dvořák Josef, stud. V. tř. r. v Telči, úl. 1., 4.
Dvořák Vilém, stud. VII. tř. r. v Praze (Ječná ul.), úl. 1., 2., 4., 5., 8., 9., 10.
Ehrmann Maxmilian, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 5., 9., 14., 18., 20.
Eliáš Filip, bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 20.
Frank Karel, stud. VII. tř. r. v Praze (Ječná ul.), úl. 1., 2., 4., 5., 8, 9., 10., 14., 18., 19., 20.
Frantík Matouš, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 20.
Galásek Jan, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 13., 14., 15., 17. až 20.
Galle František, stud. V. tř. g. v Brně, úl. 1., 4., 5., 9., 13., 13., 18., 20.
Gause Karel, stud. VI. tř. r. na Žižkově, úl. 1. až 10., 14. až 19.
Grössl František, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 20.
Habersberger Rudolf, stud. VI. tř. g. na Smíchově, úl. 1., 4., 5., 10., 13., 14., 18.
Hacar Bohumil, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1., 2., 4., 5., 6., 8., 9., 14., 18., 19.
Hájek Prokop, kand. učit. v Praze, úl. 1. až 20.
Hambalík Otto, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1. až 20.
Hauk Josef, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 1., 5., 8., 14.
Hejl Karel, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 20.
Hlava Bedřich, stud. VII. tř. r. v Praze (Ječná ul.), úl. 1. až 5., 8., 9., 10., 14., 18., 19., 20.
Hlaváček Jan, stud. V. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 4., 5., 9., 14., 20.
Hoffman Jan, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 5., 14., 18.
Hořejší Jan, stud. VI. tř. g. v Rokycanech, úl. 1., 2., 4., 5., 8., 18., 20.
Hrachovina František, stud. VII. tř. g. v Rychnově nad Kn. úl. 1. až 12., 13., 14., 16., 19., 20.

Hraše Josef, stud. V. tř. g. v Praze-III., úl. 1., 2., 4., 5., 8., 9., 11., 13., 14., 15., 18., 19.
Hrbatý František, stud. VII. tř. r. v Jevíčku, úl. 1., 4., 5, 6., 8., 9., 14., 15., 18., 19., 20.
Hromada Karel, stud. VII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1., 2., 4., 5., 8., 14., 18.
Hrubíšek Otakar, stud. V. tř. g. v Kyjově, úl. 1., 13., 17., 20.
Hruška Antonín, stud. VIII. tř. g. v Benešově, úl. 1. až 6., 8. až 10., 14., 18., 19.
Hruška Václav, stud. VII. tř. g. v Benešově, úl. 1. až 6., 8. až 10., 14., 16., 18., 19., 20.
Hruška Václav, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 1., 2., 4., 5., 6., 8., 9., 10., 14., 18., 19., 20.
Hušek Josef, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 20.
Hýsek Miloslav, stud. VIII. tř. g. v Brně, 1. až 11., 13. až 15. 18. až 20.
Charfreitág Vratislav, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 1. až 20.
Chmelař Josef, stud. VII. tř. r. v Náchodě, úl. 1. až 6., 8. až 10., 13. až 15., 18. až 20.
Choleva Jindřich, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 9., 11., 13., 14., 18., 19.
Janoušek Jan, stud. VII. tř. g. ve Strážnici, úl. 1. až 6., 8. až 10., 13. až 15., 17. až 20.
Jirsa Stanislav, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 1. až 5., 14.
Joklík Abdon, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 15., 17. až 20.
Jonáš Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 2., 4., 5., 6., 9., 13., 14., 18., 19., 20.
Kettner Jan, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 20.
Kladivo Bohumil, stud. V. tř. g. v Brně, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 13., 14., 18. až 20.
Klíma Josef, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 20.
Kofránek Karel, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 2., 4., 5., 9., 13., 14., 18.
Kosmák František, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 20.
Král Antonín, stud. VI. tř. r. na Žižkově, úl. 1., 4., 5.
Kratochvíl Antonín, stud VI. tř. r. v Praze-III., úl. 1., 4., 5., 8., 14., 18., 19.
Kroužek studujících VII. tř. r. v Čáslavi, úl. 1., 4., 5., 6., 8., 9., 10., 15., 18., 19., 20.
Krupička Jan, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1., 4., 5., 8., 10., 13., 18.

Křeček Karel, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 1., 4., 5., 9., 14., 20.
Kučera Antonín, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 1., 4., 5.
Kučera Rudolf, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 4., 5., 8., 9., 10., 16.
Kvapil Alois, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 13. až 20.
Kvasnička František, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 2., 4., 5., 8., 9., 10., 14., 18., 19.
Lakomý Petr, stud. V. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 4., 5., 9.
Lepšík Josef, stud. VI. tř. g. v Chrudimi, úl. 1., 5., 13., 14.
Lísek František, stud. VI. tř. g. v Kyjově, úl. 9., 13., 17., 20.
Livora Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 4., 5., 8. až 10., 14., 15., 18., 20.
Loštický Cyrill, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 15., 17. až 20.
Ludvík Josef, stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 1. až 20.
Mach František, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 1. až 6., 8. až 11., 13. až 20.
Marek Rudolf, stud. VII. tř. r. v Náchodě, úl. 1. až 6., 8., až 10., 14. až 20.
Mayer Antonín, stud. VII. tř. g. v Domažlicích, úl. 1., 4., 5.
Menšík Alois, stud. IV. tř. g. v Místku, úl. 8., 17.
Michal Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 2., 4., 5., 6., 9., 13., 14., 18., 20.
Michl Julius, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 1., 2., 4., 5., 6., 8., 9., 10., 13. až 18., 20.
Mikyska Josef, stud. VI. tř. r. v Kostelci n. Orlicí, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13., 14., 17. až 20.
Morávek Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 6., 8. až 11., 14., 15., 18., 19., 20.
Múčka František, stud. VII. tř. g. ve Strážnici, úl. 1., 2., 4., 5., 6., 8., 9., 13., 14., 15., 17., 20.
Mudruňka Vincenc, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 4., 5., 8., 9., 10., 13., 14., 18.
Němec Alois, stud. V. tř. g. v Brně, úl. 1., 4., 5., 8., 9., 13., 14., 18., 20.
Němec Bohuslav, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13. až 15., 17. až 20.
Nič Bohuslav, stud. VII. tř. r. v Lounech, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14., 15., 17. až 20.
Novák Cyrill, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 13., 14., 15., 17. až 20.
Novák Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 20.

Novák Viktor, stud. V. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 4., 5., 14., 15.
Papež František, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 6., 8. až 11., 14., 18. až 20.
Papřok Josef, stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 20.
Paukert Robert, stud. VI. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1. až 20.
Píč Josef, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. O., úl. 1. až 20.
Pluhař Vojtěch, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 2., 4., 5., 8. 9., 10., 14., 18., 19.
Procházka svob. p. Bedřich, stud. VIII. tř. g. v Praze-III., úl. 1. až 6., 8. až 11., 13., 14., 15., 17., 18., 20.
Přibyl František, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 1., 2., 4. až 6., 8., 9., 14., 15., 17., 18., 20.
Přikryl Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 4. až 6., 8., 9., 13. až 15., 18., 19.
Quadrát Otakar, stud. VII. tř. r. v Praze-III., úl. 1., 2., 4., 5., 6., 8. až 10., 14., 15., 18. až 20.
Raus František, stud. VII. tř. g. v Č. Budějovicích, úl. 1. až 6., 8. až 10., 13. až 15., 18. až 20.
Regentík Miroš, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 6., 8., 9., 11., 13. až 15., 17. až 20.
Rejholec Václav, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 13. až 18., 20.
Roček Josef, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 6., 8. až 10., 13. až 16., 18. až 20.
Rozkošný František, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 4., 5., 6., 8., 9., 10., 13. až 16., 18., 19., 20.
Rychlík Vilém, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 20.
Schmid Karel, stud. VI. tř. r. na Žižkově, úl. 1., 4., 5., 8.
Schmied Vilém, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 6., 8. až 11., 14., 15., 18., 19., 20.
Schneider Rudolf, stud. VI. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 1. až 11., 13., 14., 15., 17. až 20.
Scholz Otto, stud. V. tř. g. ve Vyškově, úl. 1., 4., 5., 6., 18.
Segeta Jan, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až. 5., 8., 9., 14., 18., 19., 20.
Seifert Miloš, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 11., 14., 15., 16., 18., 19., 20.
Sika Josef, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 1. až 9., 14., 19.
Simandl Václav, stud. VI. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 13. až 20.
Skolil Josef, stud. VII. tř. r. na Žižkově, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13. až 20.
Slovák Josef, kand. učitelství v Kroměříži, úl. 1. až 11., 13. až 20.

Smékal Alois, stud. VI. tř. r. v Jevíčku, úl. 1., 2., 4. až 6., 8., 9., 13., 14., 18. až 20.
Snížek Bohumil, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 4., 5., 6., 14., 15., 17. až 20.
Sova František, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 4., 5., 9.
Spáčil Josef, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 4., 5., 9., 13., 14.
Straka Methoděj, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 20.
Stypa Ladislav, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 6., 8. až 10., 13. až 15., 17. až 20.
Suchánek Josef, kand. učit. v Srchu u Pardubic, úl. 1. až 20.
Svoboda Viktor, stud. V. tř. g. ve Vyškově, úl. 1., 4., 5., 6., 18.
Suczek Jindřich, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5., 8. až 10., 13. až 15., 17., 18., 20.
Šejna Josef, stud. VI. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 1., 3. až 6., 8. až 10., 13., 18. až 20.
Ševčík Josef, stud. VII. tř. r. v Jevíčku, úl. 1. až 6., 8. až 10., 14. až 20.
Ševčík Vladimír, stud. VII. tř. g. v Uher. Hradišti, úl. 1., 4., 5., 8., 10.
Šlégr Josef, stud. VII. tř. r. v Lounech, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14., 15., 17. až 20.
Šmelcer Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Písku, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13., 14., 18., 19., 20.
Šticha Augustin, stud. VII. tř. r. v Praze-III., úl. 1., 2., 4., 5., 6., 8. až 11., 14., 17. až 20.
Štojdl Jan, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 14., 18., 19, 20.
Šubrt Jaroslav, stud. VI. tř. g. v Místku, úl. 1., 2., 9., 18.
Šudoma Bohumil, stud. VIII. tř. g. v Benešově, úl. 1. až 20.
Šváb Václav, stud. VI tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 4., 5., 8., 9., 14., 15., 17., 20.
Tichý Emanuel, stud. VII. tř. r. na Žižkově, úl. 1. až 5., 8., 10., 13. až 15., 17., 18., 20.
Trkal Viktor, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1. až 20.
Trnka František, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 20.
Trnka Gustav, stud. VI. tř. r na Žižkově, úl. 1., 4., 5, 8., 14., 18., 19.
Tyleček František, stud. VIII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 20.
Ullrich August, stud. VII. tř. r. v Praze-III., úl. 1., 2., 4. až 6., 8. až 11., 14., 15., 17. až 20.
Urbánek Václav, stud. VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, úl. 1. až 11., 13. až 18., 20.
Vágner Václav, stud. VII. tř. r. v Lounech, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 14., 15., 18., 19., 20.

Váňa A., stud. V. tř. g. v Brně, úl. 20.
Vašina Ferdinand, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1. až 20.
Vavrouch Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 4. až 6., 8. až 10., 13. až 15., 18. až 20.
Veber Bohumil, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 1. až 6., 8. až 10., 13. až 16., 18. až 20.
Veverka Václav, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 13., 14., 15., 18., 19.
Vítek Josef, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 1., 2., 4, 5., 6., 8., 9., 10., 13., 14., 15., 17. až 20.
Wozaball Jan, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 5., 9., 10., 14., 17., 18.
Zachoval František, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 6., 8 až 11., 13. až 15., 18. až 20.
Zástěra Josef, stud. VII. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 1., 2., 4. až 6., 8. až 10., 13., 14., 18. až 20.
Zelenka Karel, stud. VI. tř. r. na Žižkově, úl. 1., 4., 5., 8.
Zeman Václav, stud. VI. tř. r. na Žižkově, úl. 4., 5., 8., 14., 18.
Zgusta Ladislav, stud. VI. tř. g. v Kyjově, úl. 1., 9., 13., 17., 20.
Zlámal František, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až. 6., 8. až 11., 14., 18. až 20.
Zoubek Robert, stud. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 2., 4., 5., 8., 9.
Žáček Augustin, stud. VII. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 12., 14., 15., 18., 20.
Žák Josef, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 1., 4., 5., 8., 14., 18.
Žert Jaroslav, stud. VI. tř. r. na Žižkově, úl. 1., 4., 5., 8. až 10., 12., 14., 17., 18., 20.
Živanský Vladimír, stud. V. tř. g. v Brně, úl. 1. až 6., 8. až 15., 17. až 20.
Žurek Jan, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 4., 6., 10., 11., 14., 15., 16., 18., 19.

Opravy.

V úloze 24. dodati jest: trojúhelníkům vepsaných.

V úloze 30. jest čísti: *a*) největší rozdíl vzdáleností, *b*) nejmenší součet vzdáleností.