ač jej již při $n=2$ a $n=3$ snadno na činitele rozložiti lze; jest

$$a^4+b^4=(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2),$$

$$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4),$$

a pod. dále.

Příspěvek ku grafickému řešení rovnic kvadratických.

Podává

M. Pelnář,
professor v Příbrami.

Kteroukoli rovnici kvadratickou uvésti lze na některý ze čtyř tvarů

$$(1) \qquad x^2 \pm gx = \pm k,$$

kdež g, k značí absolutní hodnoty reálné.

Je-li řešiti graficky některou z těchto rovnic, mysleme si, že její kořeny rovnají se hodnotám úseček bodů průsečných kružnice K a přímky P, jež dány jsou rovnicemi v soustavě pravoúhlé

$$(2) \qquad K \equiv x^2+y^2=r^2,$$

$$(3) \qquad P \equiv \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$$

Aby tak bylo, třeba, by rovnice kvadratická

$$(4) \qquad x^2-\frac{2mn^2}{m^2+n^2}\cdot x=\frac{m^2(r^2-n^2)}{m^2+n^2},$$

jež z rovnic obou čar P, K vyloučením veličiny y vyplývá, a jejíž kořeny značí hodnoty úseček jejich bodů průsečných, totožnou byla s kvadratickou rovnicí danou. Tomu se vyhoví podmínkami

$$(5) \qquad -\frac{2mn^2}{m^2+n^2}=\pm g,$$

$$(6)\qquad \frac{m^2(r^2-n^2)}{m^2+n^2}=\pm k,$$

jimiž lze určiti sobě příslušné hodnoty m, n, r, a tím i žádané čáry P, K.

Jelikož tu k určení tří veličin dány jsou pouze dvě podmínky, může jedna z veličin volena býti libovolně, čemuž vyhoví se podmínkou

$$(7)\qquad n=\lambda m,$$

kdež λ značí libovolný reálný součinitel. Z této a z předcházejících podmínek (5), (6) vyplývají hodnoty

$$(8)\qquad m=\mp\frac{1+\lambda^2}{2\lambda^2}\cdot g,$$

$$(9)\qquad n=\mp\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\cdot g,$$

$$(10)\qquad r^2=n^2\pm(1+\lambda^2)k$$

aneb

$$(11)\qquad r^2=\frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2}\cdot g^2+(1+\lambda^2)\left(\frac{g^2}{4}\pm k\right).$$

Má-li kvadratická rovnice některý z obou tvarů

$$(12)\qquad x^2\pm gx=+k,$$

jest

$$(13)\qquad r^2=n^2+(1+\lambda^2)k$$

aneb

$$(14)\qquad r^2=\frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2}\cdot g^2+(1+\lambda^2)\left(\frac{g^2}{4}+k\right)$$

hodnotou vždy kladnou a tedy poloměr r hodnotou reálnou; a ježto vzdálenost d přímky P od počátku souřadnic vyhovuje podmínce

$$(1\ )\qquad d^2=\frac{m^2n^2}{m^2+n^2}=\frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2}\cdot g^2,$$

jest

$$(16)\qquad r^2=d^2+(1+\lambda^2)\left(\frac{g^2}{4}+k\right),$$

z čehož patrno, že $d^2 < r^2$ a tedy také $d < r$, t. j., přímka P protíná kružnici K ve dvou bodech reálných; a jelikož tu zároveň dle rovnice (13) $n^2 < r^2$ a tedy $n < r$, leží tyto body průsečné na opačných stranách osy Y, t. j. úsečky jejich jsou směrů opačných. Z toho jde, že mají rovnice (12) vždy dva různé kořeny reálné, a to jeden kladný a druhý záporný.

Je-li $g = 0$, vychází z rovnic (12) tvar ryze kvadratický

$$x^2 = +k. \tag{17}$$

K určení přímky P a kružnice K vyplývají z rovnic (8), (9), (14) hodnoty $m = 0$, $n = 0$, $r^2 = (1 + \lambda^2)\, k$; přímka P prochází tu počátkem souřadnic a poloha její určí se z podmínky (7), z níž jde $\frac{n}{m} = \lambda$; potřeba jen sestrojiti některou přímku P', jejíž úseky m', n' na osách X, Y vyhovují podmínce $\frac{n'}{m'} = \lambda$ a vésti počátkem souřadnic $P \,||\, P'$. Úsečky bodů průsečných přímky P s kružnicí K jsou tétéž délky avšak směrů opačných, pročež kořeny rovnice (17) jsou kvantitativně stejné ale navzájem protivné. Nejsnadnější řešení vyplývá z hodnoty $\lambda = 0$, neboť tu sjednocuje se přímka P s osou X a $r^2 = k$, a tedy $r = \sqrt{k}$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{k}$.

Je-li $k = 0$, má rovnice kvadratická některý z obou tvarů

$$x^2 \pm gx = 0. \tag{18}$$

V tomto případě vyplývají z rovnic (8), (9), (11), volíme-li $\lambda = 1$, hodnoty $m = \mp g$, $n = \mp g$, $r = g$, t. j. prvý tvar rovnic (18) má kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = -g$, a druhý tvar $x_1 = 0$, $x_2 = +g$.

Má-li předložená rovnice některý z obou tvarů

$$x^2 \pm gx = -k, \tag{19}$$

jest

$$r^2 = n^2 - (1 + \lambda^2)\, k \tag{20}$$

aneb

$$r^2 = \frac{1 + \lambda^2}{4\lambda^2} \cdot g^2 + (1 + \lambda^2) \left(\frac{g^2}{4} - k\right), \tag{21}$$

$$(22) \qquad r^2 = d^2 + (1 + \lambda^2)\left(\frac{g^2}{4} - k\right) \cdot$$

Aby v tomto případě měl poloměr hodnotu reálnou, musí míti r^2 hodnotu kladnou, čemuž se vyhoví podmínkami

$$(23) \qquad k \leqq \frac{g^2}{4};$$

při těchto podmínkách jest však dle rovnice (22) také $d^2 \leqq r^2$ a tedy $d \leqq r$. Má-li tedy rovnice některý z obou tvarů (19), jest při prvé z podmínek (23) přímka P sečnou kružnice K, a jelikož tu zároveň dle rovnice (20) $n^2 > r^2$ a tedy $n > r$, leží oba body průsečné na tétéž straně osy Y, t. j. úsečky bodů průsečných, jsou buď obě kladné aneb obě záporné dle toho, je-li hodnota úseku m kladná neb záporná, což tím se řídí, přichází-li v rovnici dané člen $-gx$ neb $+gx$. Má tedy prvý tvar rovnic (19) při prvé z podmínek (23) dva různé reálné kořeny záporné, druhý pak tvar dva různé reálné kořeny kladné.

Při druhé z podmínek (23) jest $r = d$, t. j. přímka P dotýká se kružnice K a průsečné body splývají tu v jediný bod tečný. Volíme-li v tomto případě za λ hodnotu nekonečně velkou, vycházejí z rovnic (8), (9), (11) hodnoty

$$m = \mp \frac{g}{2}, \quad n = \mp \infty, \quad r = \frac{g}{2},$$

t. j. přímka P jsouc rovnoběžna s osou Y ve vzdálenosti $m = \mp \frac{g}{2}$, dotýká se kružnice K v bodě jejím průsečném s osou X; oba kořeny rovnice jsou tu tedy sobě rovny a oba buď $-\frac{g}{2}$ neb $+\frac{g}{2}$ dle toho, je-li v dané rovnici člen $+gx$ neb $-gx$.

Je-li však

$$(24) \qquad k > \frac{g^2}{4},$$

můžeme sice vyšetřiti λ tak, aby $r^2 \geqq 0$, tak že poloměr r nabývá hodnoty reálné; ale poněvadž při dané podmínce (24)

$d > r$, jde přímka P mimo kružnici K, t. j. průsečíky obou čar a tedy i příslušné úsečky jejich a tím i kořeny rovnice předložené jsou imaginárné. Abychom i v tomto případě vyšetřili způsobem grafickým hodnoty obou kořenů, uvažme, že v případě průsečíků reálných, t. j. když $d < r$, hodnoty úseček x_1, x_2 obou bodů průsečných vyjádřiti lze úsečkou x_3 středního bodu tětivy obou bodů průsečných, buď zvětšenou, buď zmenšenou o tutéž délku u. Značí-li α úhel, který tvoří s osou X přímka spojující střed tětivy s počátkem souřadnic, a jež kolma jsouc na P má délku d, máme

$$x_3 = d \cos \alpha, \quad u = \sqrt{r^2 - d^2} \sin \alpha,$$

kdež $\sqrt{r^2 - d^2}$ značí hodnotu poloviny tětivy, a tudíž

$$x_{1,2} = d \cos \alpha \pm \sqrt{r^2 - d^2} \sin \alpha . \tag{25}$$

Je-li však $d > r$, jsou sic oba průsečíky imaginárné, ale střed imaginárné tětivy jest vždy reálným, jakožto průsečík přímky P s kolmicí, spuštěnou s počátku souřadnic na P, a tedy i úsečka tohoto bodu; hodnota její $x_3 = d \cos \alpha$ jest reálnou částí obou soujemných kořenů rovnice dané, k nížto jest ještě připojiti část ryze imaginárnou $\sqrt{r^2 - d^2} \sin \alpha = \sqrt{d^2 - r^2}\sqrt{-1} \sin \alpha$, kdež $\sqrt{d^2 - r^2}\sqrt{-1}$ značí hodnotu poloviny tětivy imaginárné. Jsou tedy v tomto případě hodnoty kořenů

$$x_{1,2} = d \cos \alpha \pm \sqrt{d^2 - r^2}\sqrt{-1} \sin \alpha . \tag{26}$$

Ježto pak dle rovnice (15)

$$d = \frac{g}{2\lambda} \cdot \sqrt{1 + \lambda^2} ,$$

a poněvadž

$$\lambda = \frac{n}{m} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

jest

$$\cos \alpha = \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}},$$

a tedy hodnota reálné části soujemných kořenů

$$(27) \qquad d \cos \alpha = \pm \frac{g}{2};$$

znaménko vztahu jest kladné neb záporné dle toho, je-li úsek m kladný neb záporný, což tím se řídí, je-li v rovnici dané člen $-gx$ neb $+gx$. Vztah (27) vede k určení úhlu α a tím i reálného středu imaginárné tětivy.

Řešení se velmi usnadní, volí-li se hodnota poloměru $r = 0$; při této podmínce jest dle rovnice (21)

$$\lambda^2 = \frac{g^2}{4k - g^2},$$

a dle rovnice (15), tuto-li hodnotu do ní vložíme,

$$d = \sqrt{k},$$

a tedy

$$(28) \qquad x_{1,2} = \sqrt{k} \cos \alpha \pm \sqrt{k} \,.\, \sqrt{-1} \sin \alpha.$$

K určení úhlu α máme pak podmínku jdoucí z podmínky (27)

$$(29) \qquad \sqrt{k} \cos \alpha = \pm \frac{g}{2},$$

z níž určíme i reálný střed tětivy imaginárné. Potřeba jen přenésti od počátku souřadnic na osu X úsečku hodnoty $\pm \frac{g}{2}$ dle toho, je-li v rovnici dané člen $\mp gx$ a vésti pak koncovým bodem jejím rovnoběžku s osou Y; jeden neb druhý průsečík této rovnoběžky s kružnicí opsanou kolem počátku souřadnic poloměrem $d = \sqrt{k}$ jest žádaný střed tětivy, a hodnota pořadnice tohoto středu $\sin\alpha \sqrt{k}$ jest reálným součinitelem části ryze imaginárné kořenů soujemných sdružených.

Při podmínce $g = 0$ nabývá rovnice (19) tvaru ryze kvadratického

$$(30) \qquad x^2 = -k.$$

V tomto případě jest $\sqrt{k} \cos\alpha = 0$, a tedy $\sin \alpha = \pm 1$, a hodnoty obou kořenů

$$(31) \qquad x_{1,2} = \pm \sqrt{k} \sqrt{-1};$$

jsouť to hodnoty úseček bodů imaginárných průsečných některé z přímek

$$P_{1,2} \equiv y = \pm\sqrt{k}$$

s kružnicí

$$K \equiv x^2 + y^2 = 0.$$

Stanovení pláště rotačního kužele obsaženého mezi dvěma sečnými rovinami.

Podává

Václav Hübner,

professor na Král. Vinohradech.

Řádky tyto mají za účel doplniti jen články, které jsem podal v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky o stanovení pláště rotačního kužele seříznutého v ellipse a v parabole, když totiž má býti stanoven plášť rotačního kužele, který jest obsažen mezi dvěmami rovinami, z nichž 1) obě jej protínají v ellipse, 2) jedna rovina protíná jej v ellipse a druhá v parabole, 3) obě roviny protínají jej v parabole.

I.

Protneme rotační kužel rovinou

ϱ v ellipse E o poloosách a, b ;
σ „ E' „ a', b'

odchylka roviny $\begin{matrix}\varrho\\\sigma\end{matrix}$ od základny kruhové Z budiž $\begin{matrix}\omega\\\omega'\end{matrix}$.

Ve všech případech buďtež roviny ϱ, σ kolmé ke druhé průmětně.

Značí-li α odchylku stran kužele od základny Z, jest $\left\{\begin{matrix}\omega\\\omega'\end{matrix}\right\} < \alpha$ (obr. 1.).

Základní rovnice, kterou určíme hledaný plášť p obsažený mezi rovinami ϱ, σ jest

$$Z - E'_1 - (Z - E_1) = p \cos\alpha$$