Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sýkora

O geometrickém místě bodů, v nichž se tečny vedené daným bodem osy dotýkají konfokalných kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 3, 307--311

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123970`

poznáváme, že více hříčce, náhodě vděčíme za to, že můžeme každé libovolné číslo celé neb lomené vysloviti a napsati v určité soustavě číselné. Spolu však vidíme, že soustavy zlomkové byly již důmyslněji sestavovány, — máme-li na mysli zvláště soustavu duodecimalní neb sexagesimalní —, tu hledělo se již více ku praktickým potřebám a pohodlí počtáře, v nich lze pozorovati již více vědeckého uvažování než v soustavách čísel celých. Z toho právem soudíme, že soustavy zlomkové jsou mnohem mladší, ježto vyžadují již větší znalosti arithmetiky a více důmyslu a obratnosti počtářské. Že v novější době právě tyto praktičtější soustavy se odstraňují, má příčinu v tom, že hledí se ve všem dojít jednotnosti, která ve vědě vůbec a zvláště v mathematice má výhody nepopíratelné.

O geometrickém místě bodů, v nichž se tečny vedené daným bodem osy dotýkají konfokalných kuželoseček.

Napsal

Antonín Sýkora,

professor v Rakovníku.

Značí-li c výstřednost, a polovici hlavní osy kuželosečky, jest její osová rovnice

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Má-li c hodnotu stálou a klademe-li za a rozličné hodnoty, nabudeme různých kuželoseček o téže výstřednosti, t. j. o týchž ohniskách; kuželosečky takové slovou konfokalné nebo homofokalné. Je-li $a > c$, přísluší rovnice ta ellipsám; při $a < c$ lze ji psáti

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1,$$

z čehož patrno, že přísluší pak hyperbolám o těchže ohniskách. Je-li konečně $a = c$, představuje rovnice tato dvojici přímek splývajících s osou X-ovou; neboť, píšeme-li ji v podobě

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2),$$

přejde při $a = c$ ve

$$y^2 = 0 \quad \text{čili} \quad y = \pm 0.$$

I.

Je-li daný bod A na hlavní ose (vedené ohnisky křivky), maje za souřadnice $(m, 0)$, jest výminka, aby tečna

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{a^2 - c^2} = 1,$$

kdež x, y souřadnice bodu dotyčného, ξ, η souřadnice bodu měnlivého znamenají, procházela bodem A

$$\text{(II)} \qquad \frac{xm}{a^2} = 1 \quad \text{čili} \quad a^2 = mx.$$

Rovnicemi (I) a (II) stanoveny souřadnice bodů, v nichž dotýkají se kuželosečky (I) tečny vedené bodem $A\,(m, 0)$. Kladouce za měnlivý parametr a jiné a jiné hodnoty, nabýváme jiných a jiných dotyčných bodů; eliminujíce a z rovnic (I) a (II), nabudeme jejich místa geometrického

$$\frac{x}{m} + \frac{y^2}{mx - c^2} = 1.$$

Této rovnici lze dáti podobu

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2 + m^2}{m}\,x + c^2 = 0$$

čili

$$\left(x - \frac{c^2 + m^2}{2m}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c^2 - m^2}{2m}\right)^2,$$

odkudž patrno, že přísluší kruhu, jehož střed jest na ose X-ové (hlavní), a poloměr

$$r = \frac{c^2 - m^2}{2m}.$$

Kladouce $y = 0$, nabudeme pro průsečíky jeho s osou úseček

$$x_1 = m, \quad x_2 = \frac{c^2}{m},$$

t. j. kruh tento prochází daným bodem A $(m, 0)$ a bodem B $\left(\frac{c^2}{m}, 0\right)$ harmonicky přidruženým bodu A dle ohnisek křivek; jest to známý kruh Apolloniův. Z vlastnosti, že tečna a normala kuželosečky půlí úhly průvodičů bodu dotyčného, vyplývá, že normaly v bodech, v nichž se tečny vedené bodem A konfokalných kuželoseček dotýkají, procházejí vesměs bodem B.

II.

Geometrické místo pat normal vedených bodem A $(m, 0)$ k homofokalným kuželosečkám (I) dostaneme, vyjádříme-li, že normala v bodu (x, y)

$$\eta - y = \frac{a^2 y}{(a^2 - c^2) x} (\xi - x)$$

prochází bodem A, čímž nabudeme výminečné rovnice

$$\text{(III)} \qquad a^2 m = c^2 x,$$

a vyloučíme-li z rovnic (I) a (III) měnlivý parametr a; tím nabudeme zase

$$x^2 + y^2 - \frac{m^2 + c^2}{m} x + c^2 = 0$$

téže rovnice jako v odstavci (I).

Příčina, že obě geometrická místa splývají v jediné, jest, že konfokalné kuželosečky protínají se vždy v úhlech pravých; dotýká-li se tedy tečna vedená bodem A některé kuželosečky (na př. ellipsy) v jistém bodě, jest zároveň normalou druhé kuželosečky (hyperboly) tím bodem procházející.

III.

Rovnice paraboly, jejíž ohnisko jest v počátku souřadnic a jejíž osa splývá s osou úseček, nabudeme z rovnice vrcholové

$$y^2 = 2px,$$

kladouce $x+\frac{p}{2}$ místo x,

(IV) $$y^2 = p(p+2x).$$

Touže transformací nabudeme rovnice tečny této křivky v bodu (x, y)

$$y\eta = p(\xi + x + p),$$

kdež ξ, η jsou souřadnice měnlivého bodu.

Má-li tečna procházeti bodem A $(m, 0)$, jest vyhověti výmince

(V) $$m + x + p = 0.$$

Eliminujíce z rovnic (IV) a (V) měnlivý parametr p, nabudeme

$$x^2 + y^2 = m^2$$

jakožto rovnice geometrického místa bodů, v nichž se tečny bodem A vedené dotýkají soustavy konfokalných parabol; že rovnice ta přísluší kruhu, jehož střed jest ve společném ohnisku těchto křivek a jenž daným bodem A prochází, jest samozřejmo.

Aby normala

$$\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x)$$

paraboly (IV) procházela bodem A $(m, 0)$, třeba, aby

$$p = m - x;$$

eliminujíce pomocí této rovnice ze (IV) parametr p, nabudeme opět

$$x^2 + y^2 = m^2$$

jakožto rovnice geometrického místa pat normal vedených bodem A k homofokalným parabolám daným rovnicí (IV), v níž p měnlivý parametr značí. — Příčina toho jest táž jako v odst. II.

IV.

Je-li daný bod B na vedlejší ose kuželosečky, maje souřadnice $(0, n)$, zní výminečná rovnice, že jím prochází tečna křivky (I),

(VI) $$a^2 - c^2 = ny.$$

Vyloučením parametru a z rovnic (I) a (VI) dostaneme

$$\frac{x^2}{c^2 + ny} + \frac{y}{n} = 1$$

anebo

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2 - n^2}{n} y = c^2.$$

Geometrické místo bodů, v nichž se dotýkají tečny bodem B $(0, n)$ vedené konfokalných křivek (I), jest tedy zase kruh; polohu a poloměr jeho seznáme, dadouce této rovnici tvar

$$x^2 + \left(y - \frac{n^2 - c^2}{2n}\right)^2 = \left(\frac{n^2 + c^2}{2n}\right)^2.$$

Vyšetřivše průsečíky jeho s osami křivek, shledáme, že prochází ohnisky jejich, jakož i daným bodem B. — Je-li zvláště $n = c$, jest rovnice jeho

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Podobně najdeme za výminku, aby normala kuželosečky v bodu (x, y)

$$\eta - y = \frac{a^2 y}{(a^2 - c^2) x} (\xi - x)$$

procházela bodem B $(0, n)$,

$$(a^2 - c^2) n + c^2 y = 0,$$

odkudž plyne

$$a^2 = \frac{c^2 (n - y)}{n};$$

zavedouce tuto hodnotu do rovnice (I), dostaneme

$$x^2 + y^2 - \frac{n^2 - c^2}{n} y = c^2,$$

zase tutéž rovnici, jakož bylo očekávati.