Václav A. Hruška

Integrál prosté hodnoty polynomu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 3, 162--165

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123952`

Integrál prosté hodnoty polynomu.

V. Hruška.

(Došlo 29. října 1930.)

1. V dřívějším svém pojednání[1]) jsem dokázal větu: V uzavřeném oboru $< -1, +1 >$ funkce $f(x)$ a její prvé $n+1$ derivace buďte spojité a $n+1$-vá derivace buď v něm stále od nuly různá. Je-li $P_n(x)$ takovým mnohočlenem n-tého řádu, že

$$\int_{-1}^{+1} | f(x) - P_n(x) | \, dx \tag{1}$$

jest minimem, má rovnice

$$f(x) - P_n(x) = 0 \tag{2}$$

v onom oboru přesně $n+1$ jednoduchých, navzájem různých kořenů, které splňují algebraickou rovnici

$$H_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin [(n+2) \arccos x]}{\sin (\arccos x)} = 0. \tag{3}$$

2. Vypočtěme nejprve

$$\int_{-1}^{+1} | H_{n+1}(x) | \, dx = \frac{1}{2^n}. \tag{4}$$

Kořeny rovnice (3) jsou totiž

$$x_i = -\cos \frac{i\pi}{n+2}, \quad i = 1, 2, \ldots n+1,$$

---

[1]) Aproximace funkcí mnohočlenem $P_n(x)$ tak, aby $\int_a^b |f(x) - P_n(x)| \, dx$ byl minimem. Věstník II. tř. Král. České Spol. Nauk v Praze 1929.

takže

$$\int_{-1}^{+1} | H_{n+1}(x) | \, dx = \left| \int_{-1}^{x_1} H_{n+1}(x) \, dx - \int_{x_1}^{x_2} H_{n+1}(x) \, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x_2}^{x_3} H_{n+1}(x) \, dx - \ldots (-1)^{n+1} \int_{x_{i+1}}^{+1} H_{n+1}(x) \, dx \right|.$$

Avšak substitucí $x = \cos \varphi$ plyne

$$\int_{x_i}^{x+1} H_{n+1}(x) \, dx = -\frac{1}{2^{n+1}} \int_{\frac{(n+2-i)\pi}{n+2}}^{\frac{(n+1-i)\pi}{n+2}} \frac{\sin (n+2) \varphi}{\sin \varphi} \, . \sin \varphi \, . \, d\varphi =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1-i}}{(n+2) \, . \, 2^n}, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n+1)$$

a odtud přímo (4).

3. Užijme naší věty k aproximaci funkce $f(x) = a_0 x^{n+1}$. V případě minima integrálu

$$\int_{-1}^{+1} | a_0 x^{n+1} - P_n(x) | \, dx = \int_{-1}^{+1} | Q_{n+1}(x) | \, dx \tag{5}$$

bude rovnice (1)

$$Q_{n+1}(x) = a_0 x^{n+1} - P_n(x) = 0 \tag{1*}$$

algebraickou rovnicí $n + 1$-vého řádu o všech kořenech stejných s rovnicí (3) a tedy mnohočlen na levé straně (1*) bude až na činitele a_0 identický s mnohočlenem $H_{n+1}(x)$. Minimum integrálu (5) tedy nastane, bude-li

$$Q_{n+1}(x) \equiv a_0 H_{n+1}(x). \tag{6}$$

Zvolíme-li však za $Q_{n+1}(x)$ libovolný jiný mnohočlen než (6), bude integrál míti hodnotu větší než

$$| a_0 | \, . \int_{-1}^{+1} | H_{n+1}(x) | \, dx = \frac{| a_0 |}{2^n}.$$

Pro každý mnohočlen $Q_{n+1}(x)$ řádu $n + 1$ platí tedy nerovnice

$$\int_{-1}^{+1} | Q_{n+1}(x \quad dx \geqq \frac{| a_0 |}{2^n} \tag{7}$$*)

a znaménko rovnosti má za následek identitu (6).

Rozšiřme větu na libovolný obor $a \ldots b$. Napřed jej substitucí

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t \tag{8}$$

transformujme na obor $-1 \leqq t \leqq +1$, načež obdržíme, že v

$$Q_{n+1}(x) = a_0 x^{n+1} + \ldots = a_0 \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} t^{n+1} + \ldots = \overline{Q}_{n+1}(t)$$

jest $a_0 \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$ koeficientem nejvyšší mocniny t. Jest proto

$$\int_a^b | Q_{n+1}(x) | \, dx \geqq 4 a_0 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+2}. \tag{9}$$

Znamení rovnosti má za následek, že po substituci (8) se $Q_{n+1}(x)$ redukuje na $a_0 \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} . H_{n+1}(t)$.

Interpretujme větu geometricky: Součet prostých hodnot ploch vytvořených mezi křivkou

$$y = a_0 x^{n+1} + \ldots + a_{n+1}, \tag{10}$$

osou x a pořadnicemi $x = a$ a $x = b$ jest stále větší nebo roven než $4 a_0 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+2}$. Rovnost má za následek, že křivka (10) jest podle (8) specielně afinní s $y = H_{n+1}(t)$.

*

Sur l'intégrale de la valeur absolue d'un polynôme.

(Extrait de l'article précédent.)

J'ai démontré, dans un mémoire antérieur,**) le théorème suivant: Soit $f(x)$ et ses $(n+1)$ premières dérivées continues dans l'intervalle fermé $< -1, +1 >$ et $f^{(n+1)}(x)$ y soit toujours différente de zéro. Si l'on choisit le polynôme $P_n(x)$ de manière

---

*) Během tisku článku jsem zjistil, že minimum (7) bylo odvozeno již Korkinem a Zolotarevem. (*Sur un certain minimum;* Nouvelles annales de mathématiques 1873.)

**) Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême 1929.

que l'intégrale (1) soit minimum, l'équation (2) aura dans l'intervalle $< -1, +1 >$ précisément $n+1$ racines simples et différentes, satisfaisant à l'équation algébrique (3).

Appliquons le théorème à la fonction $f(x) = a_0 x^{n+1}$. L'équation (2) étant algébrique, le polynôme $Q_{n+1}(x) = a_0 x^{n+1} - P_n(x)$ est nécessairement identique à $H_{n+1}(x)$ au facteur a_0 près. En choisissant pour $P_n(x)$ un polynôme qui ne rend pas (5) minimum on a alors l'inégalité

$$\int_{-1}^{+1} |\, Q_{n+1}(x) \,|\, dx \geqq |\, a_0 \,| \,.\, \int_{-1}^{+1} |\, H_{n+1}(x) \,|\, dx = \frac{|\, a_0 \,|}{2^n}$$

pour un polynôme $Q_{n+1}(x)$ quelconque d'ordre $n+1$, le signe $=$ entraînant l'identité (6). Par la transformation (8) on en calcule l'inégalité (9) pour un intervalle d'intégration quelconque. L'interprétation géométrique de ces inégalités est évidente.