Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Miloslav Hlaváček

Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 3, 157--159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123946`

Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace.

Miloslav Hlaváček v Náchodě.

(Došlo 16. prosince 1930.)

Funkce spojitá v každém intervalu, jež však v žádném bodě nemá derivace a jejíž analytický výraz je hodně stručný, je tato:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \sin 10^{2k} x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Řada

$$\sin x + \frac{1}{10} \sin 10^2 x + \frac{1}{10^2} \sin 10^4 x + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{10^k} \sin 10^{2k} x + \dots \text{ in inf.}$$

konverguje stejnoměrně vzhledem ke všem x každého intervalu. Je tedy funkce tou řadou definovaná spojitou funkcí x.

Nemá však v žádném bodě derivace, t. j. neexistuje

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\sin(x+h) - \sin x + \frac{1}{10} [\sin 10^2 (x+h) - \sin 10^2 x] + \dots}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\cos(x + \frac{1}{2} h) \sin \frac{1}{2} h + \frac{1}{10} \cos 10^2 (x + \frac{1}{2} h) \sin 10^2 \frac{1}{2} h + \dots}{\frac{1}{2} h}. \tag{1}$$

Abychom to dokázali, pišme x ve tvaru [stačí omeziti se na interval $(0, \pi)$]

$$x = \pi \left(\frac{10 a_1 + b_1}{10^2} + \frac{10 a_2 + b_2}{10^4} + \dots + \frac{10 a_k + b_k}{10^{2k}} + \dots \right),$$

kde a_k, b_k jsou čísla celá, o nichž platí

$$0 \leq a_k \leq 9, \quad 0 \leq b_k \leq 9,$$

a utvořme řadu veličin k nule konvergujících h_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ tímto způsobem:

1. a_k a b_k nejsou současně rovny 0. Pak klaďme

$$\frac{h_k}{2} = \frac{10a_k + b_k}{10^{2k}}\pi, \text{ jestliže } a_k = 0, 1, \ldots 4,$$

$$\frac{h_k}{2} \doteq \frac{10(10 - a_k) - b_k}{10^{2k}}\pi, \text{ jestliže } a_k = 5, 6, \ldots 9.$$

2. a_k a b_k rovnají se současně 0. Pak klaďme

$$\frac{h_k}{2} = \frac{\pi}{10^{2k}}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do čitatele v (1) za $\frac{1}{2}h$, odpadnou v té nekonečné řadě všecky členy, počínaje $(k + 1)$-ým, ježto $\sin 10^{2k}\dfrac{10a_k + b_k}{10^{2k}}\pi = 0$ a čitatel v (1) pak zní

$$\cos\left(x + \frac{h_k}{2}\right)\sin\frac{h_k}{2} + \frac{1}{10}\cos 10^2\left(x + \frac{h_k}{2}\right)\sin 10^2\frac{h_k}{2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{10^{k-1}}\cos 10^{2k-2}\left(x + \frac{h_k}{2}\right)\sin 10^{2k-2}\frac{h_k}{2}.$$

O posledním členu té — nyní již konečné — řady se dá dokázati, že svou absolutní hodnotou převyšuje absolutní hodnotu součtu všech ostatních členů. Tato se totiž nanejvýše může rovnati (klademe veškeré cosiny rovny 1)

$$\sin\frac{|h_k|}{2} + \frac{1}{10}\sin 10^2\frac{|h_k|}{2} + \ldots + \frac{1}{10^{k-2}}\sin 10^{2k-4}\frac{|h_k|}{2};$$

ježto při malém α přibližně platí $\sin 10^2\alpha \doteq 10^2 \sin \alpha$, je v té řadě každý člen předcházející přibližně 10krát menší než následující. Největší poměr jest patrně mezi siny v předposledním a posledním členu řady; v krajním případě, je-li $\left|\dfrac{h_k}{2}\right| = \dfrac{50}{10^{2k}}\pi$, dostáváme, ježto $\sin 10^{2k-4}\dfrac{|h_k|}{2} = \sin\dfrac{50}{10^4}\pi = 0{\cdot}016\ldots$ a $\sin 10^{2k-2}\dfrac{|h_k|}{2} = 1$, největší možnou hodnotu poměru sinů v té řadě, totiž $\dfrac{0{\cdot}016}{1} < \dfrac{1}{50}$.

Z toho plyne, že

$$\left|\sum_{r=0}^{k-2}\frac{1}{10^r}\sin 10^{2r}\frac{|h_k|}{2}\right| < \left(\frac{1}{10^{k-1}}\sin 10^{2k-2}\frac{|h_k|}{2}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{4\,.\,10^{k-1}}\sin 10^{2k-2}\frac{|h_k|}{2}.$$

Ježto dále

$$\cos \pi \left(\frac{10a_{k+1} + b_{k+1}}{10^4} + \ldots\right) > \cos \frac{1}{10^2}\pi > \cos 2^0 = 0{\cdot}999\ldots,$$

převyšuje absolutní hodnota posledního členu řady absolutní hodnotu součtu všech členů ostatních jistě aspoň o polovici svého obnosu.

Avšak

$$\left|\frac{\frac{1}{10^{k-1}}\cos 10^{2k-2}\left(x + \frac{h_k}{2}\right)\sin 10^{2k-2}\frac{h_k}{2}}{\frac{h_k}{2}}\right| > \frac{\frac{1}{10^{k-1}}\cos 2^0 \sin\frac{\pi}{10^2}}{\frac{50\pi}{10^{2k}}}$$

a zlomek na pravé straně vzrůstá s rostoucím k nade všecky meze; vzrůstá tedy i absolutní hodnota zlomku (1) nade všecky meze a limita jeho (v užším smyslu) tedy neexistuje, konverguje-li h k 0 právě oněmi zvolenými hodnotami. Tudíž neexistuje derivace té funkce.

P o z n á m k a. Příklad zde uvedený jest blízký příkladu Weierstrassově, který jest dán funkcí

$$\cos \pi x + r \cos \pi a x + r^2 \cos \pi a^2 x + \ldots$$

(stačí nahraditi cos sinusem a klásti $r = \frac{1}{10}$, $a = 10^2$, x místo πx), byl však nalezen na něm nezávisle a důkaz neexistence derivace tu podaný jest jednodušší než Weierstrassův.

*

Exemple d'une fonction continue qui n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable.

(E x t r a i t de l'a r t i c l e p r é c é d e n t.)

Si l'on définit une fonction par l'équation

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \sin 10^{2k} x,$$

on obtient une série uniformément convergente pour tous les x de chaque intervalle et, par conséquent, la fonction est continue.

Mais elle n'a de dérivée pour aucune valeur de la variable, car

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

n'existe pas, si h tend vers zéro par des valeurs convenablement choisies. C'est facile à demontrer sans faire usage du théorème sur la différentiation des séries.