Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Petr
O definici determinantu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 4, 201--213

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123928

O definici determinantu.

Napsal *K. Petr.*

(Došlo 23. února 1931.)

Nejběžnější definicí determinantu — jakožto funkce n^2 proměnných sestavených v kvadratickou matici — jest, že se podá jeho explicitní vyjádření pomocí těchto proměnných. Ta definice má nevýhodu, že důkazy základních vět o determinantech jeví se jako umělé; když si vzpomínám na dobu, kdy jsem determinanty začal se zabývati, živě mně tane na mysli překvapení, jaké ve mně budil komplikovaný postup a na konec zcela jednoduché výsledky dané oněmi základními větami.

V následujícím naznačen jiný způsob; volena jiná základní definice determinantu a z ní odvozeno jednak jeho explicitní vyjádření a pak podány důkazy některých základních vět. Jsem přesvědčen, že postup tento jest nejenom v celku jednodušší než svrchu zmíněný, avšak i pro začátečníky přístupnější. Jest také věci samé přiměřenější; determinanty nelze pokládati za útvary od ostatních částí vědy matematické neodvislé, nýbrž jsou to specielní případy t. zv. forem algebraických, v jichž teorii mají velmi důležitý význam.

Jest pravděpodobno, že podobný postup, ne-li dokonce stejný, byl volen již dříve od jiných matematiků, ať to bylo v ústních výkladech anebo v tištěných učebnicích. Tato okolnost nemění však nic na možnosti, že článek tento prospěje čtenářům „Časopisu"; z toho důvodu rád jsem vyhověl vyzvání, abych jej publikoval. Abych jej v našich poměrech učinil co nejpřístupnější, postupoval jsem místy snad zevrubněji než třeba u pokročilého čtenáře; zejména podal jsem také — ovšem stručně — potřebné věty o permutacích.

I.

Dříve než přistoupím k vlastnímu předmětu — definici determinantu — jest třeba několika slovy čtenáři připomenouti několik vět o permutacích. Máme-li několik předmětů (prvků) — ku př. prvých m čísel celých přirozené řady číselné — můžeme je sestaviti v jisté pořadí. Tak na př. na snadě nejvíce ležící pořadí prvých m čísel přirozené řady číselné jest takové, že seřadíme je po sobě podle velikosti. Toto pořadí, t. j. pořadí $[1, 2, 3, \ldots, m-1, m]$ můžeme bráti za základ. Jiné pořadí ku př. $[i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m]$, kde čísla i_k shodují se až na pořádek s čísly $1, 2, \ldots, m$ vzniká ze základního pořadí *permutací*, t. j. jistou záměnou daných elementů. Záměna spočívá v tom, že 1 nahradili jsme číslem i_1, 2 pak číslem i_2, atd. V novém pořadí $[i_1, i_2, \ldots, i_m]$ můžeme uvažovati všecky dvojice i_k, i_l (jest jich celkem $\frac{1}{2}m(m-1)$). Následují-li i_k, i_l po sobě v opačném pořádku tomu, jaký byl v základním pořadí, říkáme, že dvojice i_k, i_l tvoří inversi v novém pořadí.[1]) Tak ku př. $[5, 3, 1, 2, 4]$ tvoří 6 inversí vzhledem k pořadí $[1, 2, 3, 4, 5]$.

Nejdůležitější permutace jsou t. zv. transposice, jimiž se pouze dva elementy zaměňují navzájem. Značíme je symbolem (i, k), který znamená, že prvek i-tý má se nahraditi k-tým a k-tý i-tým. Z těchto transposic největší pak význam pro naše účele mají transposice tvaru $(i, i+1)$, máme-li na mysli elementy vyznačené prvými m čísly přirozené řady číselné; $1 \leqq i < m$. Tu pak jsou platny následující věty (téměř samozřejmé tomu, kdo pochopil význam příslušných pojmů; $i_1, i_2, \ldots, i_m$ shodují se až na pořádek s čísly $1, 2, 3, \ldots, m$).

Věta 1. Provedeme-li na pořadí $[i_1, i_2, \ldots, i_m]$ transposici $(i, i+1)$, pak v pořadí nově vzniklém jest počet inversí o ± 1 větší než v pořadí $[i_1, i_2, \ldots, i_m]$.

Věta 2. Jest aspoň jedna transposice tvaru $(i, i+1)$, která, provedeme-li ji na pořadí $[i_1, i_2, \ldots, i_m]$ různém od pořadí základního, převede je na pořadí, v němž počet inversí bude o jednu menší.

Provedeme-li tedy podle věty 2 vhodnou transposici $(i, i+1)$ na pořadí $[i_1, i_2, \ldots]$ vznikne pořadí, jež má $p-1$ inversí, mělo-li pořadí $[i_1, i_2, \ldots]$ těch inversí p. Je-li $p-1 > 0$, můžeme provésti na ono pořadí o $p-1$ inversích novou transposici tvaru $(i', i'+1)$, tak, že vznikne pořadí o $p-2$ atd., až po p krocích dospějeme takovým způsobem k pořadí, které nemá inverse, t. j. k pořadí základnímu. Vyjádříme to symbolicky způsobem snadno srozumitelným takto

[1]) Viz Bydžovský, Základy t. det., str. 13.

$$(i, i+1)\,(i', i'+1)\,(i'', i''+1) \ldots (i^{(p-1)}, i^{(p-1)}+1)\,[i_1, i_2, \ldots, i_m] = \\ = [1, 2, \ldots, m].$$

Provádíme-li pak transposice právě uváděné v opačném pořádku na pořadí $[1, 2, \ldots, m]$, dostaneme pořadí $[i_1, i_2, \ldots]$, t. j.

$$(i^{(p-1)}\, i^{(p-1)}+1) \ldots (i', i'+1)\,(i, i+1)\,[1, 2, \ldots, m] = [i_1, i_2, \ldots, i_m].$$

Máme tak větu:

Věta 3. Každou permutaci, která ze základního pořadí vytvořuje pořadí o p inversích, lze rozložiti v sled (součin) p transposic typu $(i, i+1)$.

Ku př. uvažujme transposici $(1, 7)$; tato z pořadí $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ vytvoří pořadí $[7, 2, 3, 4, 5, 6, 1]$ o 11 inversích. Provádíme-li naznačeným způsobem na druhém pořadí transposice typu $(i, i+1)$, abychom dospěli k pořadí základnímu, dostaneme, že $(1, 7)$ jest ekvivalentní součinu

$$(1, 2)\,(2, 3)\,(3, 4)\,(4, 5)\,(5, 6)\,(6, 7)\,(5, 6)\,(4, 5)\,(3, 4)\,(2, 3)\,(1, 2)$$

a obecně

$$(i, k) = (i, i+1)\,(i+2, i+1) \ldots (k-2, k-1)\,(k-1, k) \times \\ \times (k-2, k-1) \ldots (i+1, i+2)\,(i, i+1).$$

Jest tedy každá transposice (i, k) ekvivalentní lichému počtu transposic typu $(i, i+1)$ a tedy podle věty 1, provedeme-li v nějakém pořadí transposici (i, k), změní se počet inversí v tom pořadí o liché číslo. Rovněž jest patrno, že rozložíme-li libovolnou permutaci na součin transposic, že těch transposic bude vždy buď sudý aneb lichý počet podle toho, je-li p — počet to inversí, které danou permutací vzniknou, provedeme-li ji na základním pořadí — číslo sudé aneb liché.

II.

Determinant budeme definovati jakožto funkci jistého počtu proměnných. K tomu cíli zavedeme některé k tomu potřebné pojmy. Především se vyskytovati budou při tom t. zv. řady proměnných, každá řada z téhož počtu členů. Na př. z n členů; pak říkáme proměnným n-ární proměnné. Řadu značíme často jedním písmenem ku př. x a jednotlivé členy řady rozlišujeme indexy (dolními). Tak n-ární řada proměnných x obsahuje tyto proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nejjednodušší funkce n-ární řady x — anebo krátce proměnné x — jest lineární forma, jež jest dána výrazem $L(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nezávislé na x. Přibereme-li ještě jednu řadu n-árních proměných y, můžeme uvažovati formu, jež jest lineární v každé z obou řad; ta pak sluje bilineární a má toto vyjádření

$$B(x, y) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n; \; a_{ik} \text{ nezávislé od } x, y.$$

Formu bilineární $B(x, y)$ nazývati budeme alternující, jestliže při záměně (transposici) obou řad x, y (t. j. při současné záměně x_1 s y_1, x_2 s $y_2, \ldots, x_n$ s y_n) změní pouze své znaménko. Jinými slovy forma $B(x, y)$ jest alternující, jestliže jest identicky

$$B(x, y) = - B(y, x). \tag{+}$$

Jelikož při záměně x s y nemění se dolní indexy — neboť x_k zaměňuje se s y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ — bude i každá součást formy $B(x, y)$, pokud ta součást obsahuje *všecky* členy dvou pevných indexů (po př. i jiného počtu pevných indexů), rovněž bilineární formou alternující zároveň s $B(x, y)$. Uvažujme ku př. indexy 1, 2. Příslušná součást dané bilineární formy jest

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2. \tag{$\times$}$$

Napíšeme-li pro tento výraz rovnici (+), máme identicky

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 =$$
$$= -a_{11}x_1y_1 - a_{12}x_2y_1 - a_{21}x_1y_1 - a_{22}x_2y_2;$$

t. j. $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{21} = - a_{12}$, což jsou nutné a postačující podmínky, aby ($\times$) bylo alternující bilineární formou. Jest tedy výraz ($\times$), jakožto součást bilineární formy obsahující všechny členy s indexy 1, 2 roven

$$a_{12}(x_1, y_2), \quad \text{kde } (x_1, y_2) = x_1y_2 - x_2y_1,$$

(x_1, y_2) sluje determinant (druhého řádu) z proměnných řad $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$. Obecně ve formě $B(x, y)$ splňující (+) vymizí všechny členy, v nichž prvá i druhá řada jest zastoupena proměnnými o týchž indexech, a $a_{ik} = - a_{ki}$. Forma $B(x, y)$ pak, je-li alternující, má toto vyjádření

$$B(x, y) = \sum_{(i\,k)} a_{ik}(x_i, y_k).$$

Součet vztahuje se na všechny kombinace (ik) druhé třídy z čísel $1, 2, \ldots, n$ v celkovém počtu $\frac{1}{2} n (n - 1)$; a_{ik} pak jsou čísla nezávislá na x, y.

Mezi různými determinanty druhého řádu příslušnými ke dvěma n-árním řadám proměnných x, y v počtu $\frac{1}{2} n (n - 1)$ není žádná relace identicky (t. j. pro každé x, y) platna tvaru

$$\sum_{(i\,k)} \lambda_{ik}(x_i, y_k) = 0,$$

λ_{ik} nezávislé na x, y a ne všecky rovny 0. Neboť, je-li taková relace splněna pro každé x, y, máme, klademe-li $x_i = 1$, $y_k = 1$ a ostatní proměnné z obou řad rovny nule, ihned $\lambda_{ik} = 0$. T. j. má-li býti relace splněna pro každé x, y, jest nutno, aby všecky součinitele λ_{ik} byly rovny nule a není relace identické, kde by některý z koef. λ_{ik} byl různý od nuly. Tato poznámka bez potíže se rozšiřuje i pro výrazy obdobné sestrojené pro více řad proměnných a nebudu ji již opakovati. Vlastnost determinantů (x_i, y_k) právě dokázanou vyjadřujeme slovy takto: Determinanty (x_i, y_k) v počtu $\frac{1}{2} n (n-1)$ příslušné k dvěma n-árním řadám x, y jsou veličiny na sobě lineárně nezávislé; za i resp. k můžeme voliti na př. tato čísla $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $k = i + 1, i + 2, \ldots, n$.

Obdobně můžeme uvažovati trilineární formu $T(x, y, z)$, která jest lineární formou v každé ze tří řad x, y, z (n-árních). Forma T jest alternující, jestliže jsou identicky splněny tyto dva vztahy

$$T(x, y, z) = -T(y, x, z), \quad T(x, y, z) = -T(x, z, y). \qquad (+')$$

Pak ovšem bude identicky splněn i vztah (každá transposice ze tří proměnných x, y, z dá se složiti z lichého počtu transposic (x, y), (y, z), viz předch. odst.)

$$T(x, y, z) = -T(z, y, x).$$

Jelikož jest T zároveň bilineární formou řad x, y, nebude v žádném členu současně x_1 s y_1 (a obecně x_k s y_k). Rovněž ze stejné příčiny budou indexy při y a z, resp. x a z v každém členu různé. Máme-li tedy na zřeteli členy pouze o indexech 1, 2, 3, jest součást formy $T(x, y, z)$ obsahující členy o těchto indexech tvaru

$$a_{123}x_1y_2z_3 + a_{231}x_2y_3z_1 + a_{312}x_3y_1z_2 + a_{132}x_1y_3z_2 + a_{321}x_3y_2z_1 + a_{213}x_2y_1z_3. \quad (-)$$

Jelikož $T(x, y, z) = -T(y, x, z)$ jest $a_{123} = -a_{213}$, $a_{231} = -a_{321}$, $a_{312} = -a_{132}$; z $T(x, y, z) = -T(x, z, y)$ pak následuje $a_{213} = -a_{132}$, $a_{231} = -a_{213}$, $a_{312} = -a_{321}$, a jest tudíž v celku

$$a_{123} = a_{231} = a_{312} = -a_{132} = -a_{321} = -a_{213}$$

a výraz $(-)$ má tvar $a_{123}(x_1, y_2, z_3)$, kde $(x_1, y_2, z_3) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3$. Výraz (x_1, y_2, z_3) sluje determinant (třetího řádu) z proměnných řad $[x_1, x_2, x_3]$, $[y_1, y_2, y_3]$, $[z_1, z_2, z_3]$ a pro $T(x, y, z)$ máme toto vyjádření

$$T(x, y, z) = \sum_{(ijk)} a_{ijk}(x_i, y_j, z_k),$$

(ijk) probíhá všechny kombinace třetí třídy z čísel $1, 2, \ldots, n$.

Ukazuje se opět (obdobně jako u bilineárních forem alternujících), že trilineární forma alternující jest lineární formou determinantů 3. řádu (v počtu $\frac{1}{6} n (n-1)(n-2)$) s konst. koeficienty.

Bez jakékoliv potíže lze úvahy předchozí zevšeobecniti. Budeme uvažovati m-lineární formu n-árních proměnných. Taková forma jest lineární formou v každé z m řad $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$. Při tom řada $x^{(i)}$ zahrnuje v sobě proměnné $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$; forma pak jest dána výrazem

$$F(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_m} a_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_{i_1}{}^{(1)} x_{i_2}{}^{(2)} \ldots x_{i_m}{}^{(m)},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n.$$

Forma tato budiž alternující, což znamená, že provedeme-li na ni transposici řady $x^{(i)}$ a řady $x^{(i+1)}$ — při které transposici zachovávají se dolní indexy a kterouž označíme krátce $(i, i+1)$ —, násobí se forma ta -1 a to ať jest i kterékoliv číslo z čísel $1, 2, \ldots, m-1$. Z toho, co bylo řečeno při formě bilineární a z okolnosti, že každá transposice (i, k) dá se nahraditi lichým počtem transposic tvaru $(i, i+1)$ a že tedy i při transposici (i, k) se forma daná násobí faktorem -1, následuje, že jenom ty z koeficientů $a_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ mohou býti různy od nuly, ve kterých čísla $i_1, i_2, \ldots, i_m$ jsou mezi sebou různa. Uvažujme jenom ty členy z F, které mají proměnné o dolních indexech $1, 2, \ldots, m$. Jeden takový člen nechť jest

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_m} x_{j_1}{}^{(1)} x_{j_2}{}^{(2)}, \ldots, x_{j_m}{}^{(m)} \tag{*}$$

$[j_1, j_2, \ldots, j_m]$ jest jedno z $m!$ různých pořadí čísel $1, 2, \ldots, m$. Proveďme na F postupně takové transposice mezi řadami proměnných, aby člen (*) se změnil ve výraz

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_m} x_{j_1}{}^{(j_1)} x_{j_2}{}^{(j_2)} \ldots x_m{}^{(j_m)} \equiv a_{j_1 j_2 \ldots j_m} x_1{}^{(1)} x_2{}^{(2)} \ldots x_m{}^{(m)}. \tag{**}$$

Transposic po sobě provedených a to tvaru $(i, i+1)$ — které pořadí $[1, 2, \ldots, m]$ převádějí na pořadí $[j_1, j_2, \ldots, j_m]$ — jest při vhodné jich volbě p, kde p jest počet inversí v pořadí $[j_1, j_2, \ldots, j_j]$ vzhledem k pořadí $[1, 2, \ldots, m]$. Jelikož při provedení každé jednotlivé transposice se F násobí -1, znásobí se při provedení všech těch transposic převádějících (*) ve (**) činitelem $(-1)^p$. Avšak v F jest součin $x_1{}^{(1)} x_2{}^{(2)} \ldots x_m{}^{(m)}$ násoben součinitelem $a_{12 \ldots m}$; jest tedy

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_m} = (-1)^p a_{12 \ldots m}, \quad p \text{ počet inversí v } [j_1, j_2, \ldots, j_m].$$

Označíme-li tedy

$$(x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(2)}, \ldots, x_m{}^{(m)}) = \sum_{[j_1, j_2, \ldots, j_m]} (-1)^p x_{j_1}{}^{(1)} x_{j_2}{}^{(2)} \ldots x_{j_m}{}^{(m)},$$

kde součet se vztahuje na všechna různá pořadí $[j_1, j_2, \ldots, j_m]$ čísel $1, 2, \ldots, m$ v počtu $m!$ a p jest počet inversí v pořadí $[j_1, j_2, \ldots, j_m]$, pak souhrn všech členů alternující formy $F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ m-lineární — existuje-li vůbec taková forma — v nichž v dolních indexech vyskytují se pouze čísla $1, 2, \ldots, m$, jest dán výrazem

$$a_{12 \ldots m} (x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(2)}, \ldots, x_m{}^{(m)}).$$

Že tento výraz jest vskutku alternující formou proměnných $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$, jest však téměř bezprostředně patrno, máme-li na mysli, že každou transposicí provedenou na nějakém pořadí se počet inversí v tom pořadí změní o liché číslo.

Výraz $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(m)})$ sluje determinant m-tého řádu z proměnných řad $[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}]$, $[x_1^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}], \ldots, [x_1^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}]$. Lze jej podle předcházejícího jednoznačně definovati takto: *Determinant* $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(m)}]$ *jest alternující m-lineární formou m řad proměnných m-árních* $[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}], \ldots, [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}], \ldots, [x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}]$, *v níž součinitel při součinu* $x_1^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_m^{(m)}$ *jest rovný* 1.

Přirozeně nemusí býti ani dolní ani horní indexy prvá z čísel přirozené řady číselné, aniž není vůbec třeba, abychom různost proměnných (ať běží o různé proměnné v jednotlivých řadách, aneb o proměnné v různých řadách) vyznačovali pomocí číslovek. Pro naše účely bylo však takové označení nejvhodnější.

Obecně pak jest

$$(x_{s_1}^{(r_1)}, x_{s_2}^{(r_2)}, \ldots, x_{s_m}^{(r_m)}) = \sum_{[j_1, j_2, \ldots, j_m]} (-1)^p \, x_{j_1}^{(r_1)} x_{j_2}^{(r_2)} \ldots x_{j_m}^{(r_m)},$$

r_i, s_k celá čísla,

$[j_1, j_2, \ldots, j_m]$ jest jedno z $m!$ pořadí m různých čísel $s_1, s_2, \ldots, s_m$; p počet inversí v pořadí $[j_1, j_2, \ldots, j_m]$ zvětšený o počet inversí v pořadí $[s_1, s_2, \ldots, s_m]$, ať tyto inverse počítáme podle jakéhokoliv základu. Součet vztahuje se pak na všechna pořadí $[j_1, j_2, \ldots, j_m]$.

Můžeme tudíž vysloviti větu: *Alternující forma m-lineární m řad proměnných $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ n-árních má tvar*

$$F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}) = \sum_{(i_1 i_2 \ldots i_m)} A_{i_1 i_2 \ldots} (x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \ldots, x_{i_m}^{(m)}), \qquad (\mathrm{I})$$

kde $(i_1 i_2 \ldots i_m)$ probíhá všechny kombinace m-té třídy bez opakování z čísel $1, 2, \ldots, n$ v počtu $\binom{n}{m}$ a $A_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ jsou čísla na $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ nezávislá.

K uvedeným vývodům lze přičiniti ještě tuto poznámku. Z rovnice $(+)$ následuje, klademe-li v ní $y = x$ — rovnice tato zastupuje n rovnic $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots$ —, ihned vztah $B(x, x) = - B(x, x)$, t. j. $B(x, x) = 0$. Avšak také naopak, požadujeme-li, aby výraz $(\times)$ byl rovný nule pro $x = y$, plyne $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = - a_{21}$. T. j. z rovnice $B(x, x) = 0$ a z okolnosti, že $B(x, y)$ jest bilineární formou proměnných x, y, následuje, že $B(x, y)$ jest alternující bilineární formou proměnných n-árních x, y. Lze tedy tvrditi, že m-lineární forma řad $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ n-árních má tvar (I), jestliže jest rovna identicky nule vždy, když jest splněn aspoň jeden z $(m-1)$ vztahů $x^{(1)} = x^{(2)}$, $x^{(2)} = x^{(3)}, \ldots, x^{(m-1)} = x^{(m)}$. Pak jest také rovna nule, kdykoliv $x^{(i)} = x^{(j)}$, kde i, j jsou libovolná (různá čísla z čísel $1, 2, \ldots, m$.

Dále poukazuji k tomu, že veškeré důsledky odvozené by byly zachovány, kdybychom alternující formu $F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ byli definovali požadavkem, že násobí se (-1), kdykoliv provedeme některou z těchto $(m-1)$ transposic:

$$(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, m);$$

neboť z těchto transposic dají se složiti transposice $(i, i+1)$ a naopak. Byl by tudíž pro m-lineární formu $F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ splněn vztah (I) i tenkráte, kdyby měla vlastnost, že F jest rovna identicky nule, jestliže jest splněn aspoň jeden z $(m-1)$ vztahů $x^{(1)} = x^{(2)}, x^{(1)} = x^{(3)}, x^{(1)} = x^{(4)}, \ldots, x^{(1)} = x^{(m)}$.

Konečně dodávám ještě, že v případě, že není užito označení proměnných pomocí dvou indexů anebo kde za proměnné se dosazují zvláštní hodnoty, možno s výhodou užíti jiného symbolu pro determinant; stačí jej uvésti pro determinant třetího řádu svrchu při trilineárních formách alternujících se vyskytující

$$(x_1, y_2, z_3) = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix},$$

kde jednotlivé řady proměnné jsou uvedeny v řádkách a proměnné z jednotlivých řad o stejných dolních indexech ve sloupcích.

IV.

Abych užitek definice podané objasnil, podám odvození některých vět o determinantech, jež poskytují při jiných definicích některé obtíže. Samozřejmě nebudu odvozovati věty na snadě ležící, jež jsou přímým anebo téměř přímým důsledkem definice resp. snadným důsledkem získaných již výrazů.

1. **Věta Laplaceova.** Věta tato týká se determinantu n-tého řádu $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$; tento determinant jest alternující formou řad $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$, kde $r < n$ a jelikož jest v každé řadě lineární, jest lineární funkcí determinantů $(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \ldots, x_{i_r}^{(r)})$, kde $(i_1 i_2 \ldots i_r)$ jest kombinace r-té třídy (bez opakování) z čísel $1, 2, \ldots, n$. Determinanty ty jsou na sobě lineárně nezávislé. Koeficienty té lineární formy nezávisí na $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$, avšak závisí na $x^{(r+1)}, \ldots, x^{(n)}$, a jsou ty koeficienty alternující a lineární formy těchto $n - r = s$ řad. Jsou tedy koeficienty ty lineární formy determinantů $(x_{j_1}^{(r+1)}, x_{j_2}^{(r+1)}, \ldots, x_{j_s}^{(n)})$, kde $(j_1 j_2 \ldots j_s)$ jest kombinace s-té třídy z čísel $1, 2, \ldots, n$ a kde koeficienty již nezávisí na $x^{(k)}, k = 1, 2, \ldots, n$. Jest tedy

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}) = \Sigma \varepsilon\, (x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \ldots, x_{i_r}^{(r)})\, (x_{j_1}^{(r+1)}, x_{j_2}^{(r+1)}, \ldots, x_{j_s}^{(n)});$$

ε jest koeficient nezávislý na proměnných a závislý pouze na indexech i, j. Jest pak $\varepsilon = 0$, je-li některé z čísel j rovno některému z čísel i; jinak jest rovno ± 1 a to rovno hodnotou svojí koeficientu členu $x_{i_1}{}^{(1)} x_{i_2}{}^{(2)} \ldots x_{i_r}{}^{(r)} x_{j_1}{}^{(r+1)} \ldots x_{j_s}{}^{(n)}$ v daném determinantu. Tím jest věta Laplaceova v podstatě dokázána.

2. Věta o násobení determinantů. Dokážeme si ji hned v obecnějším poněkud tvaru. Uvažujme bilineární formu dvou n-árních proměnných

$$b(x, y) = \sum_{i=1, k=1}^{n, n} a_{ik} x_i y_k$$

a determinant n-tého řádu ($x^{(i)}$, $y^{(k)}$ n-ární proměnné)

$$D = \begin{vmatrix} b(x^{(1)}, y^{(1)}), & b(x^{(1)}, y^{(2)}), & \ldots, & b(x^{(1)}, y^{(n)}) \\ b(x^{(2)}, y^{(1)}), & b(x^{(2)}, y^{(2)}), & \ldots, & b(x^{(2)}, y^{(n)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b(x^{(n)}, y^{(1)}), & b(x^{(n)}, y^{(2)}), & \ldots, & b(x^{(n)}, y^{(n)}) \end{vmatrix}.$$

D jest n-lineární forma alternující n-árních proměnných $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ a jest tedy rovný determinantu $(x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(2)}, \ldots, x_n{}^{(n)})$ násobenému činitelem nezávislým na proměnných x. Činitel tento jest opět n-lineární formou alternující n-árních proměnných $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ a jest rovný determinantu $(y_1{}^{(1)}, y_2{}^{(2)}, \ldots, y_n{}^{(n)})$ násobenému číslem nezávislým na x, y. Jest tedy

$$D = C \,.\, (x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(2)}, \ldots, x_n{}^{(n)})\,(y_1{}^{(1)}, y_2{}^{(2)}, \ldots, y_n{}^{(n)}).$$

C stanovíme, volíme-li ku př. $x_i{}^{(i)} = 1$, $y_i{}^{(i)} = 1$, $x_k{}^{(i)} = 0$, $y_k{}^{(i)} = 0$, (pro $i, k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$). Dostaneme ihned, že

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tím jest věta o násobení determinantů odvozena. Obvyklý tvar dostaneme, klademe-li $a_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$, $i \neq k$.

3. Uvažujme ještě subdeterminant z determinantu D v předcházejícím odstavci obsahující elementy z řádků o indexech $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ a zároveň ze sloupců $s_1, s_2, \ldots, s_\lambda$, subdeterminant ten označíme

$$\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_\lambda \\ s_1, s_2, \ldots, s_\lambda \end{pmatrix}.$$

Podle vět o alternujících funkcích jest ihned

$$\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_\lambda \\ s_1, s_2, \ldots, s_\lambda \end{pmatrix} = \sum (x_{i_1}{}^{(r_1)}, x_{i_2}{}^{(r_2)}, \ldots, x_{i_\lambda}{}^{(r_\lambda)})\,(y_{j_1}{}^{(s_1)}, y_{j_1}{}^{(s_2)}, \ldots) \begin{bmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_\lambda \\ j_1, j_2, \ldots, j_\lambda \end{bmatrix}$$

$(i_1 i_2 \ldots i_\lambda)$, $(j_1 j_2 \ldots j_\lambda)$ probíhá při tom všecky kombinace λ-té třídy bez opakování z čísel $1, 2, \ldots, n$. Má tedy pravá strana poslední rovnice $\binom{n}{\lambda}^2$ členů. Hranatá závorka na pravé straně jest číslo na proměnných x, y nezávislé. Dostaneme je, klademe-li $x_{i_1}^{(r_1)} = 1$, $x_{i_2}^{(r_2)} = 1, \ldots x_{i_\lambda}^{(r_\lambda)} = 1$, $y_{j_1}^{(s_1)} = 1$, $y_{j_2}^{(s_2)} = 1, \ldots y_{j_\lambda}^{(s_\lambda)} = 1$ a ostatní proměnné rovnv nule. Obdržíme ihned

$$\begin{bmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_\lambda \\ j_1, j_2, \ldots, j_\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1}, a_{i_1 j_2}, \ldots, a_{i_1 j_\lambda} \\ a_{i_2 j_1}, a_{i_2 j_2}, \ldots, a_{i_2 j_\lambda} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i_\lambda j_1}, a_{i_\lambda j_2}, \ldots, a_{i_\lambda j_\lambda} \end{vmatrix}.$$

V případě, že by běželo o subdeterminant v řádkovém součinu dvou determinantů*) a kde bychom tedy kladli $a_{ii} = 1$, $a_{jk} = 0$ při $i \neq k$, pak by hranatá závorka vždy byla patrně rovna nule, leda, že by čísla $j_1, j_2, \ldots, j_\lambda$ se shodovala (nehledě k pořádku) s čísly $i_1, i_2, \ldots, i_\lambda$. Volíme-li v tom případě pořádek čísel i a j týž, dostaneme (subdeterminant v determinantu dávající řádkový součin dvou determinantů)

$$\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_\lambda \\ s_1, s_2, \ldots, s_\lambda \end{pmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \ldots i_\lambda)} (x_{i_1}^{(r_1)}, x_{i_2}^{(r_2)}, \ldots, x_{i_\lambda}^{(r_\lambda)})\,(y_{i_1}^{(s_1)}, y_{i_2}^{(s_2)}, \ldots, y_{i_\lambda}^{(s_\lambda)}).$$

4. **Věty o determinantech z minorů daného determinantu** dostaneme stejným způsobem jako věty o násobení determinantů. Budiž dán determinant n-tého řádu

$$d = |\, a_{ik} \,|, \quad i, k = 1, 2, \ldots n$$

a nechť jest dále dáno n-řad proměnných n-árních, $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Determinant, který vznikne z determinantu d tím, že nahradíme jediný a to k-tý jeho řádek řadou $x^{(i)}$ (t. j. za a_{kj} klademe tam $x_j^{(i)}$ při $j = 1, 2, \ldots, n$), označme $(x^{(i)})_k$. Uvažujme nyní determinant

$$\Delta = |\, (x^{(i)})_k \,|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Δ jest n-lineární formou alternující řad $x^{(i)}$ a jest tedy rovný determinantu z $x_k^{(i)}$ násobenému výrazem nezávislým na x; jest tedy

$$|\, (x^{(i)})_k \,| = |\, x_k^{(i)} \,| \,.\, C.$$

Abychom stanovili C, klademe $x_j^{(i)} = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pak $(x^{(i)})_i = d$, $(x^{(i)})_k = 0$ při $i \neq k$, $|\, x_k^{(i)} \,| = d$. Tudíž, jelikož levá strana jest d^n a pravá Cd, jest $C = d^{n-1}$. Máme tedy identitu

$$|\, (x^{(i)})_k \,| = |\, x_k^{(i)} \,|\, d^{n-1}, \qquad (*)$$

jež má v sobě jako specielní případy známé věty o determinantech z minorů. Klaďme ku př. $x_i^{(i)} = 1$, $x_k^{(i)} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$,

*) Viz Bydžovský, str. 91 a 92.

$k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$ a $x_k^{(i)} = a_{ik}$ pro $i = r+1, r+2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Pak levá strana se redukuje na

$$\begin{vmatrix} A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1r} \\ A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{r1}, A_{r2}, \ldots, A_{rr} \end{vmatrix} d^{n-r}, \quad A_{ik} \text{ jest minor ku } a_{ik} \text{ v } d.$$

Pravá jest

$$\begin{vmatrix} a_{r+1, r+1}, \ldots, a_{r+1, n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n, r+1} \quad , \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} d^{n-1}.$$

Porovnáním obou výsledků máme známý vztah, který netřeba vypisovati.*)

5. Jako další příklad snadného odvozování vět odvodím postup, jehož používal prof. Studnička ke snížení řádu determinantu. Abych výklad svůj příliš obecnými symboly nezatěžoval, omezím se na determinant řádu 5-tého, který budu transformovati na determinant řádu třetího. Determinanty 5. řádu budu vyznačovati též toliko prvním jejich řádkem, druhý, třetí, ... řádek dostaneme z prvního, když x v řádku prvém nahradíme y, z, u, v. Budiž tedy dán determinant

$$D = | x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 |.$$

Přibereme dvě řady veličin $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$, $[\beta_1, \ldots, \beta_5]$ a uvažujme determinant

$$\Delta = | x_1, x_2, (x_1, \alpha_2, \beta_3), (x_2, \alpha_3, \beta_4), (x_3, \alpha_4, \beta_5)|$$

pátého řádu, kde (x_1, α_2, β_3) jest determinant třetího řádu z řad $[x_1, x_2, x_3]$, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ a obdobně. Determinant Δ jest alternující pěti-lineární formou proměnných x, y, z, u, v a tedy

$$\Delta = (x_1, y_2, z_3, u_4, v_5) . C = C . D$$

kde C jest nezávislé na proměnných $x, \ldots, v$. Klaďme k určení C $x_1 = y_2 = z_3 = u_4 = v_5 = 1$, ostatní pak proměnné rovny nule. Pak dostaneme ihned

$$C = (\alpha_1, \beta_2)^3.$$

Klademe-li ve výsledku tak dosaženém $\alpha = x$, $\beta = y$, máme po snadném počtu vztah Studničkův

$$D = \frac{1}{(x_1, y_2)^2} \begin{vmatrix} (z_1, x_2, y_3), & (z_2, x_3, y_4), & (z_3, x_4, y_5) \\ (u_1, x_2, y_3), & (u_2, x_3, y_4), & (u_3, x_4, y_5) \\ (v_1, x_2, y_3), & (v_2, x_3, y_4), & (v_3, x_4, y_5) \end{vmatrix},$$

čímž hledaná transformace provedena; výsledek jest platný iden-

*) Bydžovský, str. 108 a násl.

ticky pro každé $x, y, \ldots$ s výjimkou ovšem hodnot, pro které $(x_1, y_2) = 0$.

6. Jako poslední příklad podám řešení lineárních homogenních rovnic. I v tomto příkladě omezím se na 4 rovnice o 7 neznámých. Postup však užitý jest obecně platný (pro m rovnic o n neznámých). Rovnice ty nechť jsou

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4 + a_5\xi_5 + a_6\xi_6 + a_7\xi_7 = 0$$

a další tři následují z napsané, nahradíme-li symbol a postupně b, c, d. Úkol pak, který chci řešiti v následujícím, zní takto: *Nalézti všecky 4-lineární formy proměnných a, b, c, d takové, aby dosadím-li je za ξ do daných rovnic, rovnice ty byly identicky splněny.* Těch 4-lineárních forem bude ovšem 7; označíme je $F_i(a, b, c, d)$, $i = 1, 2, \ldots, 7$; mají tudíž 4 výrazy, které dostaneme z výrazu

$$V(x, a, b, c, d) = x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3 + x_4F_4 + x_5F_5 + x_6F_6 + x_7F_7$$

tím, že x nahradíme postupně symboly a, b, c, d, identicky býti rovny nule. U F_i jsem nevypisoval pro stručnost argumenty a, b, c, d. Výraz $V(x, a, b, c, d)$ jest 5-lineární forma proměnných x, a, b, c, d, která jest rovna nule pro $x = a$ $x = b$ $x = c$, $x = d$, a tedy jest to alternující forma svých 5 proměnných. Jest tudíž

$$V(x, a, b, c, d) = \sum_{(i_1 i_2 \ldots 5)} (x_{i_1}, a_{i_2}, b_{i_3}, c_{i_4}, d_{i_5}) \,.\, A_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5},$$

kde součet vztahuje se na všecky různé kombinace 5. třídy $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$ bez opakování z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Kombinací těch jest 21 a výraz obsahuje tedy 21 konstant A (nezávislých na x, a, b, c, d). Porovnáme-li v obou výrazech pro V součinitele při x_k, máme

$$F_k(a, b, c, d) = \xi_k = \sum_{(i_2 i_3 i_4 i_5)} A_{k i_2 i_3 i_4 i_5} (a_{i_2}, b_{i_3}, c_{i_4}, d_{i_5}),\ k = 1, 2, 3, \ldots 7;$$

součet vztahuje se na všecky kombinace 4-té třídy bez opakování ze 6 čísel, jež dostaneme z prvých 7 čísel přirozené řady číselné, když potlačíme v nich číslo k. Označení konstant A jest tak voleno, že jsou-li čísla j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 až na pořádek rovna číslům i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, jest

$$A_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = (-1)^n A_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5},$$

kde p jest rozdíl mezi počtem inversí v pořadích $[i_1, i_2, \ldots]$, $[j_1, j_2, \ldots]$.

Tím řešení daného úkolu podáno a to ve tvaru nejobecnějším; jiná řešení žádaného druhu neexistují. Poznamenávám ještě, aniž bych příslušný výrok zevrubněji chtěl na tomto místě odůvodňovati, že z řešení podaného obdržíme i všecka řešení pro ξ, jež jsou dány formami libovolných stupňů v a, b, c, d, pokládáme-li A za formy vhodných stupňů v a, b, c, d (a tedy ne za konstanty).

Sur la définition du determinant.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur propose de baser la théorie des déterminants sur la considération du déterminant comme fonction alternante m-linéaire de m séries de variables; il appuie cette proposition par plusieurs exemples de démonstrations de théorèmes sur les déterminants.