Josef Klíma

K určení úhlu dvou rovin v prostoru čtyřrozměrném a některé úlohy s tím souvisící

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 4-5, 132--139

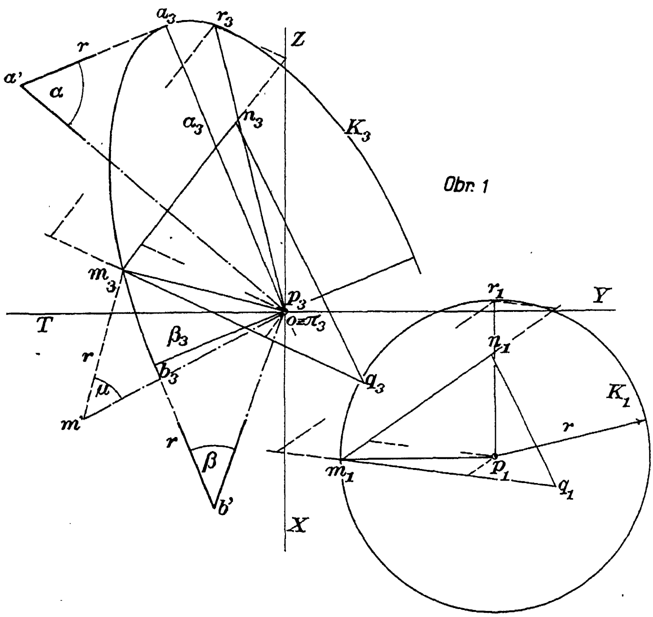
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123916

K určení úhlu dvou rovin v prostoru čtyřrozměrném a některé úlohy s tím souvisící.

Dr. *Jos. Klíma.*

(Došlo 24. března 1932.)

1. Dvě roviny π, ϱ v čtyřrozměrném prostoru svírají dva úhly α, β. Jestliže průsečík těch rovin je $p \equiv (\pi\varrho)$, svírají přímky, jdoucí bodem p na př. v rovině ϱ, se svými kolmými průměty do druhé roviny π úhly, z nichž obecně jeden α je největší a jeden β nejmenší. Jsou to úhly těch rovin. V případě, kdy $\alpha = \beta$, svírají



všechny tyto přímky s rovinou π stejné úhly a o rovinách ϱ, π pravíme, že jsou stejnoúhlé. V následujícím podávám velice jednoduché konstruktivní určení úhlů dvou rovin prostoru čtyřrozměrného, a to v kolmém promítání na dvě zcela kolmé průmětny, a to prvou (XY) a třetí (ZT), jež je zobecněním Mongeovy projekce pro trojrozměrný prostor.[1]) Jednu z daných rovin π zvolme v prů-

[1]) Jiné neúplné řešení obsaženo v knize *Schouteově:* „Mehrdimensionale Geometrie", I. díl, str. 115, odst. 65.

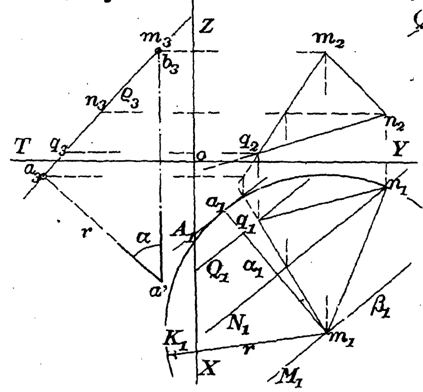
mětně (XY), na kterýžto případ lze obecný případ převésti transformací průměten![2]) Třetí průmět roviny π je bodem v počátku o souřadnic (obr. 1). Druhá rovina ϱ budiž dána třemi body m, n, q, určenými průměty prvními a třetími! První a třetí obraz pole roviny ϱ jsou afinní soumístná pole, jejichž afinita (ϱ) dána odpovídajícími si trojúhelníky $m_1n_1q_1 \longleftrightarrow m_3n_3q_3$. Průsečík roviny ϱ s π je první stopník p, takže $p_3 \equiv o$. V afinitě (ϱ) určíme snadno první obraz p_1.[3]) Opišme v prvém obraze kol středu p_1 libovolnou kružnici K_1 poloměrem r a uvažujme ji za prvý obraz křivky K roviny ϱ a sestrojme její třetí obraz K_3 jakožto křivku afinní ke K_1 v afinitě (ϱ)! V obr. zvolena kružnice K_1 tak, že prochází bodem m_1, a sestrojen pro elipsu K_3 pár sdružených poloměrů p_3m_3, p_3r_3, jež odpovídají kolmým poloměrům $p_1r_1 \perp p_1m_1$ kružnice K_1. Buďtež p_3a_3, p_3b_3 poloosy elipsy K_3! Abychom určili odchylku libovolného poloměru pm elipsy K od π, to jest úhel s prvým jeho průmětem p_1m_1, sestrojíme skutečnou velikost pravoúhlého trojúhelníka mm_1p, kde třetí průmět průmětu m_1 je v $p_3 \equiv \pi_3$. Stačí sestrojiti $m'm_3 \perp \perp p_3m_3$ a $m_3m' = p_1m_1 = r$ a $\triangle m'p_3m_3$ je skutečnou velikostí $\triangle pmm_1$ a u vrcholu m' je odchylka μ poloměru pm od π. Probíhá-li bod m_1 kružnici K_1, bude se odchylka μ měniti a největší α (nejmenší β) bude pro bod a (b) elipsy K, jehož třetí obraz je ve vrcholu hlavní (vedlejší) osy elipsy K_3. Úhly α, β jsou úhly rovin ϱ, π. Roviny $\alpha \equiv (aa_1p)$, $\beta \equiv (bb_1p)$ úhlů α, β mají první i třetí průměty v kolmých přímkách a proto jsou zcela k sobě kolmé. Kdyby K_3 bylo opět kružnicí a afinita (ϱ) podobností, pak rovina ϱ svírá s π stejné úhly $\alpha = \beta$, jejichž $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{p_3m_3}{p_1m_1} = k$, poměru to podobnosti. Dostáváme větu 1.: „*Roviny, které s (XY) jsou stejnoúhlé, zobrazují se v podobnost mezi prvým a třetím obrazem a tangenta jejich úhlů je rovná poměru podobnosti.*“

Při určování úhlů α, β roviny ϱ od π nebylo třeba určovati jejich průsečíku p. Kružnice K_1 mohla se v ϱ_1 zvoliti libovolně třeba o středu m_1 a pokračovati stejně. V obrazech 1*a*), *b*), *c*) ukázáno, jak podle předchozího určíme úhly α, β roviny ϱ s $\pi \equiv \equiv (XY)$, má-li rovina zvláštní polohu k této průmětně. Tak v obr. 1*a*) rovina $\varrho \equiv (mnq)$ je polorovnoběžná s π, aniž jsou v témže prostoru, takže jejich průsečík p je úběžným bodem. Třetí průmět roviny ϱ je v přímce $\varrho_3 \equiv m_3n_3q_3$, ježto promítací roviny bodů roviny ϱ jsou v témže prostoru, který protíná (ZT) v přímce ϱ_3. Afinita (ϱ) mezi třetím a prvým obrazem je singulární a doplňuje se nejlépe užitím pomocného obrazu druhého na (YZ).

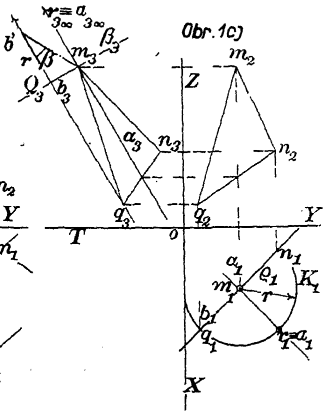
[2]) Tamtéž str. 118, odst. 66.
[3]) Kadeřávek - Klíma - Kounovský: „Deskriptivní geometrie“, I. díl, odst. 36, II. díl, odst. 455.

Řadě bodové $m_3, n_3, q_3, \ldots$ na ϱ_3 odpovídá osnova přímek $M_1 \parallel \parallel N_1 \parallel Q_1 \ldots$ Kružnici K_1, opsané kol středu m_1 poloměrem na př. $r = m_1n_1$, odpovídá v třetím průmětě úsečka v ϱ_3 o středu m_3 a jednom koncovém bodě a_3, který odpovídá tečně $A_1 \parallel M_1$ kružnice K_1. V obraze určen jako v obecném případě maximální úhel α, kdežto $\beta = 0^0$.

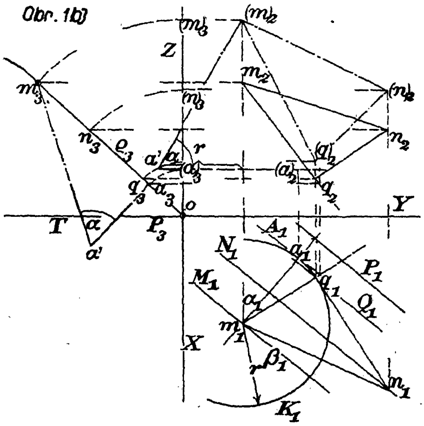
Obr. 1a)



Obr. 1c)



Obr. 1b)



V obr. 1b) rovina ϱ je s π v témže prostoru, takže protínají se v přímce P, jejíž třetí obraz je v o a třetí obraz roviny ϱ je opět přímka $\varrho_3 \equiv m_3n_3q_3$, jdoucí však tentokráte počátkem. Zde postupujeme shodně s předchozím a opět $\beta = 0^0$. V obr. ukázáno, že úhel α je stereometrickým úhlem rovin ϱ a π tím, že jejich prostor $(\varrho\pi)$ otočen kol π do prostoru (XYZ), při čemž body $m, n, q, \ldots$ přešly do $(m), (n), (q), \ldots$, jejichž třetí obrazy jsou v Z a prvé splývají s prvými obrazy bodů m, n, q. Ježto roviny otáčení jsou zcela kolmé k π, proto i kružnice otáčení v třetím obraze jeví se ve skutečné velikosti.

Konečně v obr. 1c) je rovina ϱ polokolmá k π, takže ϱ_1 je přímkou. Kružnici K_1 o středu m_1 a poloměru $r = m_1q_1$ odpovídá v singulární afinitě (ϱ) elipsa, rozpadající se ve dvě rovnoběžky, souměrné podle m_3, z nichž jedna je v přímce Q_3, odpovídající bodu q_1. Patrně úhel $\alpha = 90^0$ a β má zcela určitou hodnotu, v obrazci sestrojenou.

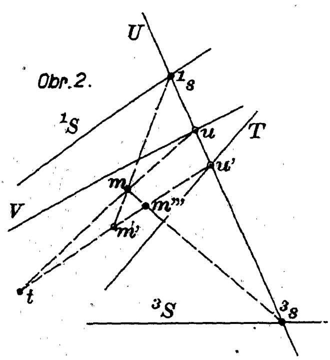
2. Afinita (ϱ), do níž zobrazuje se libovolná rovina, má jeden samodružný bod $t_{1,3}$ v konečnu a dva ${}^1u_{1,3}$, ${}^2u_{1,3}$ úběžné. Koincidenčním útvarem, t. j. místem bodů, jejichž první a třetí obraz splývají, je plocha třetího stupně, rozpadající se v rovinu totožnosti τ v konečnu a hyperboloid τ^2 v úběžném prostoru, jež mají společnou přímku T_∞.⁴) Jsou-li ${}^1S_\infty$, ${}^3S_\infty$ úběžné přímky průměten (ZT), (XY), pak úběžná přímka nákresny je obrazem ${}^1S_3 \equiv {}^3S_1$. Každý úběžný bod $u_{1,3\infty}$ nákresny je prvým a současně třetím obrazem ∞^1 úběžných bodů u_∞, jež jsou na průsečnici U rovin $({}^1Su_1)$, $({}^3Su_3)$, ležících v úběžném prostoru. Přímky U tvoří jednu soustavu tvořících přímek koincidenčního hyperboloidu τ^2, probíhá-li $u_{1,3\infty}$ úběžnou přímku nákresny. Druhá soustava tvořících přímek na τ^2 obsahuje přímky ${}^1S_\infty$, ${}^3S_\infty$, jakož i úběžné přímky rovin, jež zobrazují se v homotetičnost, takže soustava ta obsahuje též úběžnou přímku T_∞ roviny totožnosti τ. Budiž V_∞ úběžnou přímkou roviny ϱ, pro niž afinita (ϱ) přechází v homotetičnost patrně pro střed $t_{1,3}$, který je obrazem průsečíku $t \equiv (\varrho\tau)$! V obr. 2 vyznačeny schematicky úběžné přímky ${}^1S$, ${}^3S$, T, V, jež mají polohu hyperboloidickou, ležíce na τ^2, a libovolný bod m také roviny ϱ, jakož i průsečík její t s rovinou totožnosti τ. Spojnice tm protíná V v bodě u, jímž na τ^2 jde přímka druhé soustavy U, protínající přímky prvé soustavy ${}^1S$, T, ${}^3S$ v bodech ${}^1s$, u', ${}^3s$. Promítací roviny $({}^1Sm)$, $({}^3Sm)$ bodu m protínají rovinu (Utm) v přímkách ${}^1sm$, ${}^3sm$, protínající přímku tu' v bodech m', m'''. Třetí obraz bodu m''' splývá s m_3, a ježto m''' je v rovině $\tau \equiv (Tt)$, splývá m_3 s m'''_1. Bude tudíž $(m_1m_3t_{1,3}u_{1,3\infty}) = (m'm'''tu') =$ $= ({}^1s{}^3suu') = ({}^1S{}^3SVT)$.

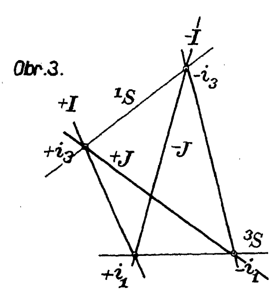
Věta 2: *„Rovina, jež se zobrazuje v homotetičnost o poměru $t_{1,3}m_3 : t_{1,3}m_1 = k$, má úběžnou přímku V na hyperboloidu totožnosti τ^2 tak položenou, že $({}^1S{}^3STV) = k$.“*

Uvažujme nyní, co tvoří úběžné přímky V_ω rovin ϱ_ω, jež s (XY) svírají stejné úhly, jejichž tangenta k je rovná poměru podobnosti mezi třetím a prvým obrazem roviny ϱ_ω! Podobnost tu převedeme v homotetičnost, jestliže na př. prvý obraz roviny ϱ_ω otočíme kol samodružného bodu $t_{1,3}$, obrazu to průsečíku $t \equiv (\tau\varrho_\omega)$, tak, až libovolný bod m_1 pole ϱ_1 přejde na paprsek $t_{1,3}m_3$ pole ϱ_3 za předpokladu, že podobnost (ϱ) je souhlasná. Otočení toto o úhel $\omega = \sphericalangle m_1t_{1,3}m_3$ je obsaženo v otočení celého nadprostoru P_4

⁴) *Th. Schmid:* „Über die Koinzidenzaufgabe der darstellenden Geometrie des vierdimensionalen Raumes.“ Zprávy Vídeňské akademie, rok 1928.

kol roviny (ZT) o týž úhel ω, ježto při tomto otáčení roviny zcela kolmé k (ZT) jsou invariantní. Otočí se tudíž rovina ϱ_ω v rovinu ϱ, jejíž úběžná přímka V je na τ^2, a to podle věty 2. je $({}^1S^3STV) = k$. Kruhovým bodům $+ i$, $- i$ nákresny odpovídají na hyperboloidu totožnosti τ^2 v prvé soustavě přímky $+ I$, $- I$, z nichž na př. prvá obsahuje body, jichž prvý i třetí obraz je v $+ i$. Pro souhlasnou podobnost a týž poměr k dostáváme roviny, jež vzniknou z ϱ otočením kol (ZT) o různé úhly ω. Budou tudíž úběžné přímky V_ω těchto rovin ϱ_ω tvořiti jednu soustavu přímek na hyperboloidu $\varkappa^2$, obsahujícím v téže soustavě přímku V, výše určenou, a v druhé soustavě přímky $+ I$, $- I$, a pro nějž přímky ${}^1S$, ${}^3S$ jsou sdru-





ženými polárami, takže v prvé soustavě jsou též přímky $+ J$, $- J$, tvořící s $+ I$, $- I$ čtyřúhelník zborcený o úhlopříčkách ${}^1S$, ${}^3S$ (obr. 3).

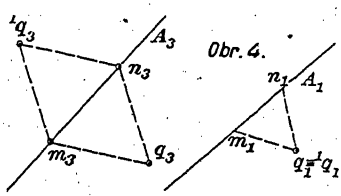
Byla-li by podobnost mezi prvým a třetím obrazem nesouhlasná, ale téhož poměru k, třeba nejprve, abychom převedli podobnost v homotetičnost, na př. prvý obraz překlopiti kol přímky O, jdoucí samodružným bodem $t_{1,3}$, a pak teprve otáčeti kol $t_{1,3}$. Překlopení prvého obrazu, aniž třetí obraz se mění, odpovídá v nadprostoru P_4 centrální involutorní kolineace pro střed v úběžném bodě s_∞ roviny (XY) ve směru kolmém k O, a pro samodružný prostor Σ, určený osou O a polární rovinou bodu s_∞, k absolutní úběžné kulové ploše. Patrně $\Sigma \equiv ({}^1SO)$. Libovolný bod m přejde tu v souměrný bod ${}^1m$ vzhledem k prostoru Σ, pro nějž je ${}^1m_3 \equiv m_3$. Rovina ϱ_ω přejde v souměrně položenou rovinu ${}^1\varrho_\omega$ podle Σ a její úběžná přímka ${}^1V_\omega$ dostane se z V_ω involutorní středovou kolineací o středu s_∞ a rovině $({}^1So_\infty)$, je-li o_∞ úběžný bod osy O. Tato kolineace převádí přímky V_ω jedné osnovy na $\varkappa^2$ v přímky ${}^1V_\omega$ druhé osnovy, jež protínají přímky $+ J$, $- J$. Dostáváme tu následující dvě věty:

Věta 3: „*Úběžné přímky rovin, jež zobrazují se v podobnost mezi prvým a třetím obrazem pro poměr k, jsou na témže hyperboloidu $\varkappa^2$, jdoucím prostorovým čtyřúhelníkem $+ I$, $- I$, $+ J$, $- J$, a to pro souhlasnou podobnost jsou téže soustavy s $+ J$, $- J$ a pro nesouhlasnou soustavy s $+ I$, $- I$. Hyperboloid $\varkappa^2$ protíná hyperboloid totožnosti τ^2 mimo přímky $+ I$, $- I$ ještě v přímkách druhé soustavy V, V', pro něž platí $({}^1S^3STV) = k$, $({}^1S^3STV') = -k$.*"

Věta 4: „*Úběžné přímky rovin, stejnoúhlých s π, tvoří dvě lineární kongruence paprskové o řídicích přímkách $+ I$, $- I$ nebo $+ J$, $- J$. Prvé mají za obraz souhlasnou a druhé nesouhlasnou podobnost mezi prvým a třetím obrazem.*"

Hyperboloidy $\varkappa^2$ pro různá k tvoří svazek ploch 2°, obsahující též absolutní plochu, jehož složené plochy jsou: *a*) roviny $(+ I - J)$, $(- I + J)$ jdoucí přímkou ${}^1S$, odpovídající $k = \infty$; *b*) roviny $(+ I + J)$, $(- I, - J)$ obsahující ${}^3S$ a odpovídající $k = 0$.

Budiž v obr. 4 dána přímka $A \equiv mn$ a mějme jí proložiti roviny stejnoúhlé s π! Roviny ty jsou dvě ϱ, ${}^1\varrho$ a zobrazují se v podobnost pro poměr $k = m_3n_3/m_1n_1$, a to buď v souhlasnou (ϱ) nebo nesouhlasnou (${}^1\varrho$). Obrazu $q_1 \equiv {}^1q_1$ libovolného bodu q (${}^1q$) prvé (druhé) roviny odpovídá obraz q_3 (${}^1q_3$), kde $\triangle m_3n_3q_3 \backsim \triangle m_1n_1q_1$ $[\triangle m_3n_3{}^1q_3 \backsim \triangle m_1n_1{}^1q_1]$. Roviny ϱ, ${}^1\varrho$ jsou souměrně položeny podle prvého nebo třetího promítacího prostoru přímky A. Úběžný bod přímky A je na hyperboloidu $\varkappa^2$, patřícím k poměru k, úběžné přímky rovin ϱ, ${}^1\varrho$ jsou tvořicí přímky na $\varkappa^2$ prvé nebo druhé soustavy.



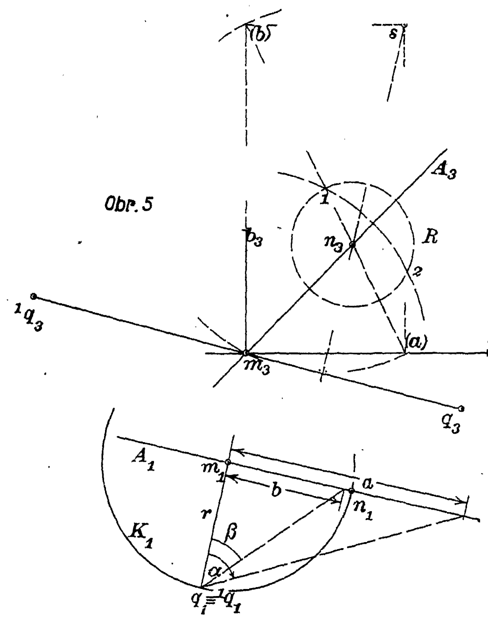
Obr. 4.

Věta 5: „*Přímky, jež svírají s (XY) týž úhel, jehož tangenta je k, mají úběžné body na témže hyperboloidu $\varkappa^2$, příslušejícím k číslu k.*"

Budiž v obr. 5 úlohou proložiti přímkou $A \equiv mn$ roviny ϱ, jež svírají s (XY) úhly α, β! Opišme v prvém obraze kružnici K_1 o středu m_1 a poloměru $r = m_1n_1$! V afinitě (ϱ), do níž zobrazuje se hledaná rovina, musí kružnici K_1 odpovídati elipsa o středu m_3, jež jde bodem n_3 a jejíž poloosa hlavní $a = m_3a_3 = r \operatorname{tg} \alpha$ a vedlejší $b = m_3b_3 = r \operatorname{tg} \beta$.

Tyto délky sestrojeny jsou v prvém obraze. Aby úloha byla možná, musí $b < m_3n_3 < a$, jestliže $\alpha > \beta$. Abychom sestrojili v třetím obraze elipsu K_3, užijeme proužkové konstrukce elipsy, na př. pro součet poloos. Opíšeme kol n_3 kružnici R poloměrem $\frac{1}{2}(a - b)$ a protneme ji z m_3 kružnicí o poloměru $\frac{1}{2}(a + b)$ v bodech 1, 2. Spojnice $n_3 1$ protíná kružnici, opsanou ze středu 1 poloměrem $1m_3$, v bodech (a), (b) hlavní a vedlejší osy elipsy K_3. Průměr ${}^1q_3q_3$

elipsy K_3, sdružený k m_3n_3, je kolmý k sn_3, kde s je vrchol obdélníka $m_3(a)s(b)$ a $m_3q_3 = m_3{}^1q_3 = n_3s$.[5]) Vezmeme-li průsečík 2, dostaneme elipsu K'_3, souměrnou ke K_3 vzhledem k A_3. I označme její body, souměrné k bodům K_3, stejnými písmeny, ale s čárkou! Lze pak přímkou A proložiti celkem čtyři roviny, vyhovující úloze, a sice jsou dány afinitami, v nichž pravoúhlému rovnoramennému trojúhelníku $n_1m_1q_1$ odpovídají ϱ $(n_3m_3q_3)$, ϱ' $(n_3m_3q'_3)$, ${}^1\varrho$ $(n_3m_3{}^1q_3)$,



${}^1\varrho'$ $(n_3m_3{}^1q'_3)$. Roviny ty po dvou ϱ, ϱ' a ${}^1\varrho$, ${}^1\varrho'$ jsou souměrně položeny podle promítacích prostorů přímky A.

Snadno lze též zodpověděti, co tvoří úběžné přímky všech rovin, jež s (XY) svírají úhly α, β. Povšimněme si obrazu 1! Poloměry elipsy, jež jsou souměrně položeny podle osy p_3a_3, svírají s (XY) stejné úhly a proto jejich úběžné body jsou na téže ploše $\varkappa^2$, patřící k příslušnému poměru mezi jejich třetím a prvým obrazem. V osách elipsy K_3 splývají dva poloměry, rovněž stejné, a proto dostáváme větu 6:

„*Úběžné přímky rovin, jež svírají s* (XY) *úhly* α, β, *tvoří kongruenci společných tečen dvou hyperboloidů ze svazku* $(\varkappa^2)$, *jež příslušejí k poměrům* $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$.“[6])

[5]) Kadeřávek - Klíma - Kounovský: „Deskr. geometrie“, str. 97.

[6]) Viz analytické vyvození pro centrální promítání od prof. Dr. *L. Seiferta*: „O úhlu dvou rovin v prostoru čtyřrozměrném“, tento časopis, roč. LII, strana 143.

Sur la détermination de l'angle de deux plans dans l'espace à quatre dimensions et sur quelques problèmes qui s'y rattachent.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne, dans la première partie, une construction simple des angles α, β que fait le plan $\varrho \equiv (mnp)$ avec le plan de projection orthogonale (XY) sur deux plans de projection (XY), (ZT) totalement orthogonaux. Le plan ϱ est projeté suivant une affinité (ϱ) entre la première et la troisième images, déterminée par les projections de trois points m, n, p du plan. Construisons, dans cette affinité, l'ellipse K_3 correspondant au cercle K_1 au rayon r et dont le centre soit p_1. Les demiaxes de l'ellipse K_3 étant p_3a_3. p_3b_3, on a $\operatorname{tg} \alpha = p_3a_3 : r$, $\operatorname{tg} \beta = p_3b_3 : r$ (fig. 1). Les fig. 1abc) donnent les constructions des deux angles dans des cas spéciaux, où le plan ϱ est semiparallèle à (XY) et de plus, ou est situé avec (XY) dans le même espace, ou ne l'est pas, où bien est semiorthogonal à ce plan. Dans la deuxième partie, l'auteur détermine les lieux des droites à l'infini des plans ϱ faisant, avec (XY), les mêmes angles, dont la tangente a la valeur k, et des plans ϱ faisant, avec (XY), des angles donnés α, β. Dans les fig. 4, 5 on a construit des plans passant par une droite A, faisant avec (XY) ou des angles égaux, ou des angles donnés α, β.