Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Eduard Čech

Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces. III

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 3, 137--158

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123881`

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE DES CORRESPONDANCES ENTRE DEUX ESPACES. III.

EDUARD ČECH, Praha.

(Reçu le 15. Février 1950.)

Ce Mémoire fait suite à deux Mémoires portant le même titre: la première partie a été publiée dans ce Journal **74** (1949), 32—48 (Comptes-Rendus du congrès à Prague 1949), la deuxième dans ce Journal **75** (1950), 123—136.

25. Au § 14 nous avons formulé le problème de la détermination de toutes les correspondances entre deux espaces à n dimensions S_n et S_n' telles que, pour un choix convenable d'homographie tangente K, il existe une droite totalement K-linéarisante (pour chaque couple A, B de points correspondants). Au § 15 nous avons vu que pour $n = 2$ chaque correspondance appartient à ce type. Pour $n \geqq 4$, toutes les solutions du problème ont été indiquées aux §§ 19 et 24. Les solutions données aux paragraphes cités valent aussi pour $n = 3$. Mais nous avons déjà indiqué au § 22 que pour $n = 3$ il existe d'autres solutions et c'est précisément l'objet de ce Mémoire de trouver toutes ces solutions nouvelles pour $n = 3$.

Il résulte du § 22 qu'il s'agit d'intégrer pour $n = 3$ le système de Pfaff (17,1) + (17,2) + (17,3) + (17,4) + (22,1) + (22,3) que nous écrivons de nouveau:

$$\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0, \tag{25,1}$$

$$\tau_{11} - \tau_{00} = \tau_{22} - \tau_{00} = \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0, \tag{25,2}$$

$$\tau_{30} = 0,\ \omega_{32} = 0. \tag{25,3}$$

Il s'agit d'ailleurs seulement de ces solutions du système de Pfaff pour lesquelles:

$$\omega_{31} \neq 0, \tag{25,4}$$

on n'a pas simultanément

$$\tau_{10} = \tau_{20} = 0. \tag{25,5}$$

La différentiation extérieure des équations (25,1) et (25,2) conduit aux équations (17,6), (17,7), (17,8) et (17,9) avec $n = 3$; en tenant compte de (25,3), on peut les écrire plus simplement

$$[\omega_1\tau_{13}] + [\omega_2\tau_{23}] + [\omega_3\tau_{33} - \tau_{00}] = 0, \tag{25,6}$$
$$[\omega_1\tau_{10}] + 2[\omega_2\tau_{20}] = 0, \tag{25,7}$$
$$2[\omega_1\tau_{10}] + [\omega_2\tau_{20}] = [\tau_{13}\omega_{31}], \tag{25,8}$$
$$[\omega_2\tau_{10}] = 0, \tag{25,9}$$
$$[\omega_1\tau_{20}] = [\tau_{23}\omega_{31}], \tag{25,10}$$
$$[\tau_{33} - \tau_{00}\omega_{31}] = 0. \tag{25,11}$$

D'après (25,7) et (25,9) on peut poser

$$\tau_{10} = 2b\omega_2, \quad \tau_{20} = b\omega_1 + a\omega_2. \tag{25,12}$$

En substituant ces valeurs dans (25,8) et (25,10) on obtient

$$3b[\omega_1\omega_2] = [\tau_{13}\omega_{31}], \quad a[\omega_1\omega_2] = [\tau_{23}\omega_{31}], \tag{25,13}$$

d'où l'on a

$$b[\omega_1\omega_2\omega_{31}] = a[\omega_1\omega_2\omega_{31}] = 0.$$

Or d'après (25,5) et (25,12) on ne peut avoit simultanément $a = b = 0$. On a donc $[\omega_1\omega_2\omega_{31}] = 0$ de sorte qu'on peut poser

$$\omega_{31} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2. \tag{25,14}$$

Il résulte de (25,4), (25,13) et (25,14) que

$$[\tau_{13}\omega_1\omega_2] = [\tau_{23}\omega_1\omega_2] = 0. \tag{25,15}$$

Ayant égard à (25,15), on déduit de (25,6) que $[\omega_3, \tau_{33} - \tau_{00}] = 0$. Or il résulte de (25,4), (25,11) et (25,14) que $[\omega_1, \omega_2, \tau_{33} - \tau_{00}] = 0$ de manière qu'on a nécessairement

$$\tau_{33} - \tau_{00} = 0. \tag{25,16}$$

Différentiation extérieure de (25,16) donne, si l'on tient compte de (25,2) et (25,3),

$$[\omega_1\tau_{10}] + [\omega_2\tau_{20}] + [\tau_{13}\omega_{31}] = 0;$$

en comparant à (25,8) on a $[\omega_1\tau_{10}] = 0$ et de (25,9) on déduit que

$$\tau_{10} = 0. \tag{25,17}$$

26. En résumé, on doit examiner le système de Pfaff (25,1) + + (25,2) + (25,3) + (25,16) + (25,17). En y joignant l'équation (6,3), ce qui est toujours permis, on a le système de Pfaff

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0, \\ &\tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = 0, \\ &\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0, \\ &\tau_{30} = \tau_{10} = 0, \\ &\omega_{32} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{26,1}$$

Il s'agit des solutions de (26,1) pour lesquelles on a

$$\omega_{31} \neq 0, \tag{26,2}$$
$$\tau_{20} \neq 0. \tag{26,3}$$

Les conditions d'intégrabilité du système (26,1) sont

$$[\omega_1\tau_{13}] + [\omega_2\tau_{23}] = 0, \tag{26,4}$$

$$[\omega_2\tau_{20}] = 0, \tag{26,5}$$

$$[\omega_{31}\tau_{13}] = 0, \tag{26,6}$$

$$[\omega_1\tau_{20}] + [\omega_{31}\tau_{23}] = 0, \tag{26,7}$$

$$[\omega_{12}\tau_{20}] - [\omega_{30}\tau_{13}] = 0, \tag{26,8}$$

$$[\omega_2\omega_{30}] + [\omega_{12}\omega_{31}] = 0. \tag{26,9}$$

Quant aux paramètres secondaires (v. § 6 et § 8) on voit sans peine que tous les t_{ik} sont nuls (ceci correspond au fait que l'homographie K est fixe pour des valeurs fixes de paramètres principaux) ainsi que

$$e_{30} = e_{31} = e_{32} = 0. \tag{26,10}$$

(la position de A_3 est fixe pour des valeurs fixes de paramètres principaux), tandis que

$$\left.\begin{array}{l} e_{11} - e_{00},\ e_{22} - e_{00},\ e_{33} - e_{00},\ e_{10},\ e_{20},\ e_{12},\ e_{21},\ e_{13},\ e_{23} \\ \text{restent arbitraires} \end{array}\right\} \tag{26,11}$$

jusqu'à présent.

Remarquons encore qu'on a $[\omega_2\omega_{31}\omega_{30}]=0$ d'après (26,9); si $[\omega_2\omega_{31}] \neq 0$, on en déduit, ayant égard à (25,14), que

$$[\omega_1\omega_2\omega_{30}] = 0; \tag{26,12}$$

or si l'on a identiquement $[\omega_2\omega_{31}] = 0$, on en déduit par différentiation extérieure de nouveau la relation (26,12) qui est par suite vraie dans tous les cas. Or on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1A_1 + \omega_2A_2 + \omega_3A_3, \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A + \omega_{31}A_1 + \omega_{33}A_3; \end{aligned}$$

il résulte donc de (25,14) et (26,12) que

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_3A_3 \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{33}A_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

La droite $[AA_3]$ reste donc fixe en position pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$ de sotre qu'elle ne peut dépendre que de deux paramètres (au plus; mais $[AA_3]$ ne peut dépendre de moins de deux paramètres comme elle contient le point A dépendant essentiellement de trois paramètres). *La droite* $[AA_3]$ *décrit donc une congruence* et, puisque $[AA_1A_3\,\mathrm{d}A_3] = 0$, *le point* A_3 *est un foyer de cette congruence,* $[AA_1A_3]$ *étant le plan focal correspondant.* Puisque $\tau_{30} = \tau_{31} = 0$, on a

$$\mathrm{d}B_3 = \omega_{30}B + \omega_{31}B_1 + (\omega_{33} + \tau_{33})B_3.$$

La droite $[BB_3]$ *décrit donc aussi une congruence à foyer* B_3 *et plan focal correspondant* $[BB_1B_3]$. A la correspondance étudiée est subordonnée une correspondance entre nos deux congruences, ainsi qu'une correspondance entre A_3 et B_3 et entre $[AA_1A_3]$ et $[BB_1B_3]$.

Lorsque $[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0$, le point A_3 décrit une surface (A_3); lorsque $[\omega_{30}\omega_{31}] = 0$, le point A_3 décrit une courbe [le point A_3 n'est pas fixe, vu l'inégalité (26,2)]; pareillement (B_3) est une surface lorsque $[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0$ et une courbe lorsque $(\omega_{30}\omega_{31}] = 0$.

Des équation fondamentales on déduit encore que

$$\mathrm{d}[AA_1A_3] = (\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{33})\,[AA_1A_3] - \\ - \omega_2\,[A_1A_2A_3] + \omega_{12}\,[AA_2A_3].$$

Le plan $[AA_1A_3]$ dépend donc de deux paramètres si $[\omega_2\omega_{12}] \neq 0$ et d'un seul paramètre si $[\omega_2\omega_{12}] = 0$. On a le même résultat pour le plan $[BB_1B_3]$, comme $\tau_{12} = 0$.

Cela posé, nous allons distinguer quatre cas:

$$\begin{array}{rll} \text{I.} & [\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0 \neq [\omega_2\omega_{12}] & \text{(traité au § 27)}, \\ \text{II.} & [\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0 = [\omega_2\omega_{12}] & \text{(traité au § 28)}, \\ \text{III.} & [\omega_{30}\omega_{31}] = 0 \neq [\omega_2\omega_{12}] & \text{(traité au § 29)}, \\ \text{IV.} & [\omega_{30}\omega_{31}] = 0 = [\omega_2\omega_{12}]. & \end{array}$$

Dans tous ces cas il résulte de (7,3), (25,2) et (25,16) que K *est l'homographie locale*.

27. *Cas* I. Comme $[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0$, le point A_3 décrit une surface (A_3) qui est non développable, car son plan tangent $[AA_1A_3]$ dépend de deux paramètres, parce que $[\omega_2\omega_{12}] \neq 0$. Pareillement le point B_3 décrit une surface non développable (B_3). A la correspondance étudiée est subordonnée une correspondance entre les deux surfaces non développables (A_3) et (B_3). Nous allons prouver que cette correspondance est une *déformation projective* au sens de mon ami regretté G. FUBINI.

En effet, les équations fondamentales (5,3) — (5,6) prennent en vertu de (26,1) la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3, \\ \mathrm{d}A_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_{13}A_3, \\ \mathrm{d}A_2 &= \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3, \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A + \omega_{31}A_1 + \omega_{33}A_3; \\ \mathrm{d}B &= \omega_{00}B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3, \\ \mathrm{d}B_1 &= \omega_{10}B + \omega_{11}B_1 + \omega_{12}B_2 + (\omega_{13} + \tau_{13})B_3, \\ \mathrm{d}B_2 &= \omega_{20}B + \omega_{21}B_1 + \omega_{22}B_2 + (\omega_{23} + \tau_{23})B_3, \\ \mathrm{d}B_3 &= \omega_{30}B + \omega_{31}B_1 + \omega_{33}B_3. \end{aligned}\right\} \qquad (27,1)$$

On en déduit, en se rappelant (5,2),

$$KA_3 = B_3,\; K\,\mathrm{d}A_3 = \mathrm{d}B_3,\; K\,\mathrm{d}^2A_3 = \mathrm{d}^2B_3 - \omega_{31}\tau_{13}B_3, \qquad (27,2)$$

ce qui met en évidence le contact analytique du second ordre des deux surfaces (B_3) et (KA_3) au point initial B_3 de sorte que nous avons bien une déformation projective. De plus, on déduit de (27,1) que

$$\mathrm{d}K \,.\, A = 0,\ \mathrm{d}K \,.\, A_1 = \tau_{13}B_3,\ \mathrm{d}K \,.\, A_2 = \tau_{23}B_3,\ \mathrm{d}K \,.\, A_3 = B_3. \quad (27,3)$$

Or il résulte de (25,15) et (27,3) que pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$, c'est-à-dire pour chaque position fixe de A_3, l'homographie K reste fixe. En particulier, nous avons pour chaque position de A_3 une transformation homographique k bien déterminée (subordonnée à K) portant la droite $[AA_3]$ dans la droite $[BB_3]$. La correspondance entre S_3 et S_3' est la réunion de ces ∞^2 transformations homographiques k entre les droites $[AA_3]$ et $[BB_3]$.

On sait de la théorie de déformation projective de surfaces que, pour chaque position de A_3, il existe ∞^1 homographies K^* telles qu'on ait un contact analytique du second ordre entre les deux surfaces B_3 et $K^*(A_3)$ au point initial B_3. On a

$$K^*A = B,\ K^*A_1 = B_1,\ K^*A_2 = B_2 + \lambda B,\ K^*A_3 = B_3, \quad (27,4)$$

notre homographie particulière K correspondant à $\lambda = 0$.

Toutes les homographies K^* donnent naissance à la même transformation homographique k de $[AA_3]$ en $[BB_3]$. Pour caractériser K parmi les K^*, considérons les équations

$$K^*A = B,\ K^*A_3 = B_3,\ K^*\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B - \lambda\omega_2 B_3,\ K^*\,\mathrm{d}A_3 = \mathrm{d}B_3,$$

d'où il résulte que

$$K^*(xA + yA_3) = xB + yB_3,\ K^*\,\mathrm{d}(xA + yA_3) = \mathrm{d}(xB + yB_3) - \lambda x\omega_2 B_3.$$

On voit donc que, parmi les K^*, l'homographie K est caractérisée par la propriété que c'est une *homographie tangente à la correspondance entre S_3 et S_3' tout le long de la droite* $[AA_3]$.

Inversement, partons d'une déformation projective donnée entre deux surfaces non développables que nous supposons maintenant décrites par le point A et B, respectivement. D'après le Mémoire classique de M. E. Cartan *Sur la déformation projective des surfaces* (Annales de l'Ecole Normale (3), XXXVII, 1920) on peut particulariser les repères de manière à avoir (loc. cit. éq. (12), p. 274 et (17), p. 282).

$$\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = \omega_3 = \tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{12} = \tau_{21} =$$
$$= \tau_{13} = \tau_{23} = 0, \quad (27,5)$$
$$\omega_{13} = \omega_2,\ \omega_{23} = \omega_1; \quad (27,6)$$

les courbes asymptotiques sur (A) et sur (B) sont données par les équations $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$. La plus générale homographie jouissant de la propriété que (B) et $K(A)$ ont un contact analytique du second d'ordre au point initial B est donnée par

$$K^*A = B,\ K^*A_1 = B_1,\ K^*A_2 = B_2,\ K^*A_3 = B_3 + \lambda B. \quad (27,7)$$

Menons par chaque point A de la surface (A) une tangente determinée

$$t = [A, \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2]. \tag{27,8}$$

Toutes les homographies K^* contiennent la même transformation homographique k de t dans la tangente

$$t' = [B, \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2] \tag{27,9}$$

à la surface (B) au point B. En variant A, les ∞^2 homographies k engendrent une correspondance entre S_3 et S_3'. Nous allons chercher la condition (pour α_1, α_2 et λ) pour que K^* soit une homographie tangente à cette correspondance tout le long de la droite t. Comme on a

$$K^*A = B,\ K^*(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2,\ K^*\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B,$$
$$K^*\mathrm{d}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) =$$
$$= \mathrm{d}(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) - (\alpha_1 \,.\, \overline{\tau_{10} - \lambda\omega_2} + \alpha_2 \,.\, \overline{\tau_{20} - \lambda\omega_1})B,$$

la condition cherchée est

$$\alpha_1 \tau_{10} + \alpha_2 \tau_{20} = \lambda(\alpha_1 \omega_2 + \alpha_2 \omega_1). \tag{27,10}$$

Or on déduit de (27,5) et (27,6) par différentiation extérieure

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{10} = a_0\omega_1 + a_1\omega_2, \quad \tau_{20} = a_1\omega_1 + a_2\omega_2, \\ &\tau_{31} = -a_1\omega_1 + a_2\omega_2,\ \tau_{32} = a_0\omega_1 - a_1\omega_2, \\ &\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} = 2(c_1\omega_1 + c_2\omega_2), \\ &\omega_{12} = c_0\omega_1 - c_1\omega_2,\ \omega_{21} = -c_2\omega_1 + c_3\omega_2. \end{aligned}\right\} \tag{27,11}$$

Condition (27,10) devient donc

$$\alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 = \lambda\alpha_2,\ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \lambda\alpha_1. \tag{27,12}$$

D'ailleurs on voit sans peine que si $a_0 = a_2 = 0$, la correspondance entre les deux surfaces (A) et (B) est homographique. En excluant ce cas nous trouvons qu'il y a deux valeurs possibles de $\alpha_1 : \alpha_2$ qui peuvent du reste coïncider. Par élimination de λ on obtient de (27,12) l'équation

$$a_0\alpha_1^2 - a_2\alpha_2^2 = 0 \tag{27,13}$$

déterminant les deux valeurs possibles de la tangente t. Autrement dit, les deux tangentes t sont $[A\ \mathrm{d}A]$, où

$$a_0\omega_1^2 - a_2\omega_2^2 = 0 \text{ ou bien } \omega_1\tau_{10} - \omega_2\tau_{20} = 0. \tag{27,14}$$

(27,14) n'est rien d'autre que ce que M. E. Cartan appelle „le réseau conjugué de déformation projective". Incidemment, nous sommes arrivés à une définition nouvelle de ce réseau.

Il importe de vérifier qu'une correspondance entre S_3 et S_3' qui s'obtient de façon indiquée en partant d'une déformation projective quelconque d'une surface non développable possède toujours une droite totalement K-linéarisante. Or ceci est mis en évidence par les équations suivantes, faciles a vérifier,

$$K(xA + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = xB + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2,$$
$$K\mathrm{d}(xA + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \mathrm{d}(xB + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2),$$
$$K\mathrm{d}^2(xA + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \mathrm{d}^2(xB + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) -$$
$$- (a_0\omega_1^2 + a_2\omega_2^2)(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) - (.)B.$$

28. *Cas* II. Nous allons prouver que ce cas ne conduit à aucune solution nouvelle. Si l'on change le repère A, A_1, A_2, A_3 en remplacant A_1 par $A_1 + \lambda A$ ce qui est évidemment permis (pourvu qu'on remplace en même temps B_1 par $B_1 + \lambda B$), ω_{12} vient d'être remplacé par $\omega_{12} + \lambda\omega_2$, et comme nous avons $[\omega_2\omega_{12}] = 0$, nous pouvons supposer que

$$\omega_{12} = 0. \tag{28,1}$$

Nous avons alors à considérer le système de Pfaff (26,1) soumis aux inégalités

$$[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0, \quad \tau_{20} \neq 0. \tag{28,2}$$

D'après (28,1), (26,8) donne

$$[\omega_{30}\tau_{13}] = 0. \tag{28,3}$$

Comme $[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0$, on déduit de (26,6) et (28,3) que

$$\tau_{13} = 0. \tag{28,4}$$

Ensuite (26,4) donne

$$[\omega_2\tau_{23}] = 0. \tag{28,5}$$

Maintenant on a

$$KA = B, \; KA_1 = B_1, \; KA_2 = B_2, \; KA_3 = B_3,$$
$$\mathrm{d}K \,.\, A = 0, \; \mathrm{d}K \,.\, A_1 = 0, \; \mathrm{d}K \,.\, A_2 = \tau_{20}A + \tau_{23}A_3, \; \mathrm{d}K \,.\, A_3 = 0.$$

Les relations (26,5) et (28,5) montrent que l'homographie K ne dépend que d'un seul parametre t tel que $[\omega_2\, \mathrm{d}t] = 0$. Pour $\omega_2 = 0$ le point A décrit le plan $[AA_1A_3]$ et l'on a $\mathrm{d}K.\, X = 0$ pour chaque point X de ce plan. Nous retombons donc à un cas particulier de la solution discutée au § 24.

Remarque. On pourrait être surpris comment est-ce qu'une solution qui était soumise à la condition (22,4) puisse apparaître dans des cas où cette condition n'est pas vérificée. L'explication en est fournie par la remarque faite à la fin du § 20. Dans les cas que nous examinons à présent, la droite $[AA_3]$ décrit une congruence ayant, en général, deux différentes nappes focales. Nous avons particularisé le repère de manière que A_3 soit un des deux foyers de notre congruence et il se peut bien que condition (22,4) est réalisé pour un foyer, n'étant pas réalisée pour le second.

29. *Cas* III. Nous allons voir que ce cas est impossible. Comme $[\omega_{30}\omega_{31}] = 0$, le point A_3 décrit une courbe (A_3). On peut particulariser le repère de façon que A_1 soit situé sur la tangente à la courbe (A_3), ce qui donne

$$\omega_{20} = 0. \tag{29,1}$$

D'après (29,1) on déduit de (26,8) que

$$[\omega_{13}\tau_{20}] = 0. \tag{29,2}$$

Comme $[\omega_2\omega_{12}] \neq 0$, les deux relations (26,5) et (29,2) montrent que $\tau_{20} = 0$, ce qui est en contradiction avec (26,3).

30. *Cas* IV. Comme $[\omega_{30}\omega_{31}] = 0$, le point A_3 décrit une courbe (A_3). En particularisant le repère de manière que A_1 soit situé sur la tangente à la courbe (A_3), on a

$$\omega_{30} = 0. \tag{30,1}$$

Aux relations (26,10) on doit alors ajouter

$$e_{10} = e_{12} = 0 \tag{30,2}$$

(le point A_1 est restreint à la droite fixe $[A_1A_3]$ pour des valeurs fixes de paramètres principaux) tandis que

$$e_{11} - e_{00},\ e_{22} - e_{00},\ e_{33} - e_{00},\ e_{20},\ e_{21},\ e_{13},\ e_{23} \tag{30,3}$$

restent arbitraires jusqu'à présent.

Nous allons prouver que l'on a nécessairement $\omega_{12} = 0$. Supposons par impossible que

$$\omega_{12} \neq 0. \tag{30,4}$$

Puisque $\omega_{32} = 0$, on a

$$\begin{aligned} d[AA_1A_3] = (\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{33})\,[AA_1A_3] - \\ - \omega_2\,[A_1A_2A_3] + \omega_{12}\,[AA_2A_3]. \end{aligned}$$

Comme $[\omega_2\omega_{12}] = 0$, le plan $[AA_1A_3]$ ne dépend que d'un seul paramètre et il touche son enveloppe suivant une droite passant par A_3 et située dans $[AA_1A_3]$ qui ne coincide ni avec $[AA_3]$ ni avec $[A_1A_3]$. En particularisant le repère, on peut supposer que ce soit la droite $[A-A_1, A_3]$ ce qui donne

$$\omega_{12} = \omega_2. \tag{30,5}$$

On a $\delta(A - A_1) = e_{00}A - e_{11}A_1 + e_{13}A_3$, $\delta A_3 = e_{33}A_3$. La droite $[A - A_1, A_3]$ étant fixe en position pour des valeurs fixes de paramètres principaux, il faut ajouter à (26,10) et (30,2) la relation nouvelle

$$e_{11} - e_{00} = 0, \tag{30,6}$$

tandis que

$$e_{22} - e_{00},\ e_{33} - e_{00},\ e_{20},\ e_{21},\ e_{13},\ e_{23} \tag{30,7}$$

restent arbitraires. Nous avons le système de Pfaff (26,1) + (30,1) + + (30,5) soumis aux conditions (26,2) et (26,3). La différentiation extérieure de (26,1) a donné les relations (26,4) — (26,9) qui s'écrivent maintenant

$$[\omega_1\tau_{13}] + [\omega_2\tau_{23}] = 0, \tag{30,8}$$

$$[\omega_2\tau_{20}] = 0. \tag{30,9}$$

$$[\omega_{31}\tau_{13}] = 0, \tag{30,10}$$

$$[\omega_1\tau_{20}] + [\omega_{31}\tau_{23}] = 0, \tag{30,11}$$

$$[\omega_2\omega_{31}] = 0. \tag{30,12}$$

En différentiant extérieurement les équations (30,1) et (30,5) on est conduit à ajouter

$$[\omega_{10}\omega_{31}] = 0, \tag{30,13}$$

$$[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{10} + \omega_1\,\omega_2] = 0. \tag{30,14}$$

D'après (26,2) on déduit de (30,10) et (30,12) que

$$[\omega_2\tau_{13}] = 0. \tag{30,15}$$

D'après (30,9), (30,12) et (30,15) on peut poser

$$\tau_{20} = \alpha\omega_2,\ \omega_{31} = \beta\omega_2, \tag{30,16}$$

$$\tau_{13} = \gamma\omega_2, \tag{30,17}$$

où $\alpha\beta \neq 0$ selon (26,2) et (25,3). En différentiant extérieurement (30,16) on obtient

$$\delta\alpha = 2(e_{22} - e_{00})\alpha,\ \delta\beta = (2e_{00} - e_{22} - e_{33})\beta.$$

Puisque $\alpha\beta \neq 0$, on déduit de (30,7) qu'on peut particulariser le repère de manière à avoir $\alpha = \beta = 1$ ou bien

$$\tau_{20} = \omega_2, \tag{30,18}$$

$$\omega_{31} = \omega_2; \tag{30,19}$$

aux relations (26,10), (30,2) et (30,6) il faut alors ajouter

$$e_{22} - e_{00} = e_{33} - e_{00} = 0, \tag{30,20}$$

tandis que

$$e_{20},\ e_{21},\ e_{13},\ e_{23} \tag{30,21}$$

restent arbitraires.

D'après (30,17), (30,18) et (30,19) on déduit de (30,8) et (30,11)

$$\gamma[\omega_1\omega_2] + [\omega_2\tau_{23}] = 0,\ [\omega_1\omega_2] + [\omega_2\tau_{23}] = 0,$$

ce qui donne d'abord $\gamma = 1$ ou

$$\tau_{13} = \omega_2 \tag{30,22}$$

et ensuite $[\omega_2\tau_{23} - \omega_1] = 0$ de sorte qu'on peut poser

$$\tau_{23} = \omega_1 + \varepsilon\omega_2. \tag{30,23}$$

En différentiant extérieurement (30,23) on obtient $\delta\varepsilon = 2e_{21}$; ayant égard à (30,21) on voit que l'on peut particulariser le repère de manière à avoir $\varepsilon = 0$ ou

$$\tau_{23} = \omega_1. \tag{30,24}$$

Par différentiation extérieure on déduit de (30,18), (30,19) et (30,22), tenant compte de (30,5) et (30,24),

$$[2(\omega_{00}-\omega_{22})+\omega_1\ \omega_2]=0, \tag{30,25}$$
$$[\omega_{00}+\omega_{11}-\omega_{22}-\omega_{33}+\omega_1\ \omega_2]=0, \tag{30,26}$$
$$[\omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{22}+\omega_{33}+2\omega_1\ \omega_2]=0. \tag{30,27}$$

Or en multipliant (30,25), (30,26), (30,27) respectivement par 1,—1, —1, et en ajoutant, on obtient $[\omega_1\omega_2]=0$, ce qui est impossible.

31. Il résulte du § 30 que toutes les solutions restantes de notre problème s'obtiennent en intégrant le système de Pfaff (26,1) + (31,1) où

$$\omega_{30}=0,\ \omega_{12}=0. \tag{31,1}$$

Nous en cherchons d'ailleurs seulement les solutions satisfaisantes aux inégalités (26,2) et (26,3). On a

$$\mathrm{d}A_3=\omega_{31}A_1+\omega_{33}A_3,\ \mathrm{d}A_1=\omega_{10}A+\omega_{11}A_1+\omega_{13}A_3.$$

Si $\omega_{10}\neq 0$, le lieu (A_3) du point A_3 est une courbe gauche dont $[AA_1A_3]$ est le plan osculateur; si $\omega_{10}=0$, (A_3) est la droite $[A_1A_3]$. Au paragraphe présent. nous résoudrons le cas

$$\omega_{10}\neq 0. \tag{31,2}$$

Les équations (26,4) — (26,9), obtenues par différentiation extérieure de (26,1), s'écrivent maintenant

$$[\omega_1\tau_{13}]+[\omega_2\tau_{23}]=0, \tag{31,3}$$
$$[\omega_2\tau_{20}]=0, \tag{31,4}$$
$$[\omega_{31}\tau_{13}]=0, \tag{31,5}$$
$$[\omega_1\tau_{20}]+[\omega_{31}\tau_{23}]=0. \tag{31,6}$$

Il faut y ajouter le résultat de la différentiation extérieure de (31,1), qui est

$$[\omega_{31}\omega_{10}]=0, \tag{31,7}$$
$$[\omega_2\omega_{10}]=0. \tag{31,8}$$

D'après (31,2) on déduit de (31,7) et (31,8)

$$[\omega_{31}\omega_2]=0. \tag{31,9}$$

Rappelons aussi les relations (26,10), (30,2) et (30,3).

D'après (31,4), (31,8) et (31,9) on peut poser

$$\tau_{20}=\alpha\omega_2,\ \omega_{10}=\beta\omega_2,\ \omega_{31}=\gamma\omega_2,$$

où $\alpha\beta\gamma\neq 0$ en vertu de (26,3), (31,2) et (26,2). Par différentiation extérieure on en déduit

$$\delta\alpha=2(e_{22}-e_{00})\alpha,\ \delta\beta=(e_{11}+e_{22}-2e_{00})\beta,$$
$$\delta\gamma=(e_{22}+e_{33}-e_{00}-e_{11})\gamma.$$

Ayant égard à (30,3), on voit qu'il est possible de particulariser le repère de manière à avoir $\alpha=\beta=\gamma=1$ ou

$$\tau_{20}=\omega_2,\ \omega_{10}=\omega_2,\ \omega_{31}=\omega_2. \tag{31,10}$$

Aux relations (26,10) et (30,2) il faut alors ajouter

$$e_{11} - e_{00} = e_{22} - e_{00} = e_{33} - e_{00} = 0, \tag{31,11}$$

tandis que

$$e_{20},\ e_{21},\ e_{13},\ e_{23} \tag{31,12}$$

restent arbitraires.

En différentiant extérieurement les équations (31,10) on obtient

$$[\omega_{11} - \omega_{00}\omega_2] = [\omega_{22} - \omega_{00}\omega_2] = [\omega_{33} - \omega_{00}\omega_2] = 0. \tag{31,13}$$

Ayant égard à (31,10) on déduit de (31,3) et (31,6) que

$$[\omega_1\tau_{13} - \omega_2] = 0,\ [\omega_2\tau_{23} - \omega_1] = 0;$$

or on a $[\tau_{13}\omega_2] = 0$ selon (31,5) et (31,10) de manière que

$$\tau_{13} = \omega_2, \tag{31,14}$$

$$\tau_{23} = \omega_1 + a\omega_2. \tag{31,15}$$

On déduit de (31,15) par différentiation extérieure que $\delta a = 2e_{21}$. De (31,12) il résulte qu'on peut particulariser le repère de manière à avoir $a = 0$ ou bien

$$\tau_{23} = \omega_1; \tag{31,16}$$

aux relations (26,10), (30,2) et (31,11) il faut alors ajouter

$$e_{21} = 0, \tag{31,17}$$

tandis que

$$e_{20},\ e_{13},\ e_{23} \tag{31,18}$$

restent arbitraires.

La différentiation extérieure de (31,14) ne donne rien de nouveau, mais celle de (31,16) fournit

$$[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_1] - 2[\omega_{21} - \omega_3\omega_2] = 0. \tag{31,19}$$

En introduisant la supposition permise (v. § 6),

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0,$$

les relations (31,13) conduisent à poser

$$\omega_{00} = \alpha\omega_2,\ \omega_{11} = \alpha_1\omega_2,\ \omega_{22} = \alpha_2\omega_2,\ \omega_{33} = \alpha_3\omega_3,$$
$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

La différentiation extérieure donne

$$\delta\alpha = -e_{20},\ \delta\alpha_1 = e_{13},\ \delta\alpha_2 = e_{20},\ \delta\alpha_3 = -e_{13}.$$

D'après (30,18), on peut particulariser le repère de sorte que

$$\omega_{00} = \alpha\omega_2,\ \omega_{11} = -\alpha\omega_2, \tag{31,20}$$

$$\omega_{22} = 0,\ \omega_{33} = 0. \tag{31,21}$$

Les relations (31,21) donnent par différentiation extérieure $[\omega_{20}\omega_2] = 0$, $[\omega_{31}\omega_2] = 0$, de sorte que l'on peut poser

$$\omega_{20} = \beta\omega_2,\ \omega_{13} = \gamma\omega_2. \tag{31,22}$$

Différentiation extérieure de (31,20) et (31,22) conduit à poser

$$d\alpha = \omega_1 + p\omega_2,\ d\beta = \omega_{21} + q\omega_2,\ d\gamma = -\omega_3 + r\omega_2. \qquad (31,23)$$

Ensuite on différentie extérieurement (31,23) ce qui conduit à poser

$$\left.\begin{aligned} dp &= \omega_{21} + 2\alpha\omega_1 + p_1\omega_2 - \omega_3,\\ dq &= \alpha\omega_{21} - \omega_{23} + \beta\omega_1 + q_1\omega_2,\\ dr &= -\omega_{23} + \gamma\omega_1 + r_1\omega_{12} - \alpha\omega_3. \end{aligned}\right\} \qquad (31,24)$$

On trouve aisément que $[d\omega_2] = 0$, d'où

$$\omega_2 = dt. \qquad (31,25)$$

Maintenant on calcule successivement

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA_3}{dt} = A_1,\ \frac{d^2A_3}{dt^2} = A - \alpha A_1 + \gamma A_3,\\ &\frac{d^3A_3}{dt^3} = (-p + \alpha^2 + \gamma)A_1 + A_2 + (r - \alpha\gamma)A_3,\\ &\frac{d^4A_3}{dt^4} = (-p + \alpha^2 + \beta + \gamma)A + (2r - p_1 - 2\alpha\gamma + 3\alpha p - \alpha^3)A_1 +\\ &\qquad + (r_1 - \alpha r - 2\gamma p + \gamma^2 + \alpha\gamma)A_3; \end{aligned}\right\} \qquad (31,26)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dB_3}{dt} = B_1,\ \frac{d^2B_3}{dt^2} = B - \alpha B_1 + (\gamma + 1)B_3,\\ &\frac{d^3B_3}{dt^3} = (-p + \alpha^2 + \gamma + 1)B_1 + B_2 + (r - \alpha\,.\,\overline{\gamma + 1})B_3,\\ &\frac{d^4B_3}{dt^4} = (-p + \alpha^2 + \beta + \gamma + 2)B + (2r - p_1 - 2\alpha\,.\,\overline{\gamma + 1} +\\ &\qquad + 3\alpha p - \alpha^3)B_1 + (r_1 - \alpha r - 2\,.\,\overline{\gamma + 1}\,.\,p + \overline{\gamma + 1}^2 +\\ &\qquad + \alpha\,.\,\overline{\gamma + 1})B_3; \end{aligned}\right\} \qquad (31,27)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d[AA_1A_3]}{dt} = -[A_1A_2A_3],\\ &\frac{d^2[AA_1A_3]}{dt^2} = \alpha[A_1A_2A_3] - [AA_2A_3] + \beta[AA_1A_3],\\ &\frac{d^3[AA_1A_3]}{dt^3} = (p - \alpha^2 - \beta)[A_1A_2A_3] + (q - \alpha\beta)[AA_1A_3] + [AA_1A_2],\\ &\frac{d^4[AA_1A_3]}{dt^4} = (p_1 - 3\alpha p - 2q + 2\alpha\beta + \alpha^3)[A_1A_2A_3] +\\ &\qquad + (p - \alpha^2 - \beta - \gamma)[AA_2A_3] + (q_1 - 2\beta p - \alpha q +\\ &\qquad + \alpha^2\beta + \beta^2)[AA_1A_2]; \end{aligned}\right\} \qquad (31,28)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t} &= -[B_1B_2B_3],\\
\frac{\mathrm{d}^2[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^2} &= \alpha[B_1B_2B_3]-[BB_2B_3]+(\beta+1)[BB_1B_3],\\
\frac{\mathrm{d}^3[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^3} &= (p-\alpha^2-\beta-1)[B_1B_2B_3]+(q-\alpha\,.\,\overline{\beta+1})[BB_1B_3]+\\
&\quad+[BB_1B_2],\\
\frac{\mathrm{d}^4[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^4} &= (p_1-3\alpha p-2q+2\alpha\,.\,\overline{\beta+1}+\alpha^3)[B_1B_2B_3]+\\
&\quad+(p-\alpha^2-\beta-\gamma-2)[BB_2B_3]+(q_1-2\,.\\
&\quad.\,\overline{\beta+1}\,.\,p-\alpha q+\alpha^2\,.\,\overline{\beta+1}+\overline{\beta+1}^2)[BB_1B_3].
\end{aligned}\right\} \quad (31,29)$$

Or en introduisant deux homographies K_1 et K_2 moyennant les équations

$$K_1A = B+\tfrac{2}{3}B_3,\; K_1A_1 = B_1,\; K_1A_1 = B_2-\alpha B_3,\; K_1A_3 = B_3; \quad (31,30)$$

$$K_2A = B,\; K_2A_1 = B_1,\; K_2A_2 = B_2-\tfrac{2}{3}B_1-\alpha B_3,\; K_2A_3 = B_3 \quad (31,31)$$

on voit de (31,26) — (31,29) que

$$\left.\begin{aligned}
&K_1A_3 = B_3,\; K_1\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}t},\; K_1\frac{\mathrm{d}^2A_3}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2B_3}{\mathrm{d}t^2}-\tfrac{1}{3}B_3,\\
&K_1\frac{\mathrm{d}^3A_3}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}^3B_3}{\mathrm{d}t^3}-\frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}t},\; K_1\frac{\mathrm{d}^4A_3}{\mathrm{d}t^4} = \frac{\mathrm{d}^4B_3}{\mathrm{d}t^4}-2\frac{\mathrm{d}^2B_3}{\mathrm{d}t^2}+\lambda_1B_3;
\end{aligned}\right\} \quad (31,32)$$

$$\left.\begin{aligned}
&K_2[AA_1A_3] = [BB_1B_3],\; K_2\frac{\mathrm{d}[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t},\\
&K_2\frac{\mathrm{d}^2[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^2}-\tfrac{1}{3}[BB_1B_3],\\
&K_2\frac{\mathrm{d}^3[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}^3[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^3}-\frac{\mathrm{d}[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t},\\
&K_2\frac{\mathrm{d}^4[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t^4} = \frac{\mathrm{d}^4[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^4}-2\frac{\mathrm{d}^2[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^2}+\lambda_2[BB_1B_3],
\end{aligned}\right\} \quad (31,33)$$

où les valeurs de λ_1 et λ_2 ne nous intéressent pas.

Les équations (31,32) mettent en évidence que K_1 est *l'homographie osculatrice ponctuelle* de la correspondance entre les deux courbes (A_3) et (B_3), c'est-à-dire qu'il y a un contact analytique du quatrième ordre entre les deux courbes $K_1(A_3)$ et (B_3) au point initial B_3. Pareillement, les équations (31,33) montrent que K_2 est *l'homographie osculatrice tangen-*

tielle de la même correspondance entre (A_3) et (B_3), c'est-à-dire que le contact analytique du quatrième ordre entre les courbes $K_2(A_3)$ et (B_3) a lieu si l'on considère les plans osculateurs (non les points) comme les éléments générateurs des deux courbes. Les équations (31,31) mettent en évidence que la correspondance considérée entre les deux espaces S_3 et S_3' s'obtient en attachant *à chaque point d'un plan osculateur à la courbe l'image de ce point dans l'homographie* K_2.

Or, pour que la correspondance ainsi construite entre les deux espaces S_3 et S_3' possède pour chaque couple de points correspondants, une droite totalement K-linéarisante (pour un choix convenable de l'homographie tangente K) il faut et il suffit que la correspondance génératrice entre les deux courbes (A_3) et (B_3) jouisse d'une propriété qui découle des équations suivantes, résultantes de (31,30) et (31,31):

$$\begin{gathered}(K_1 - K_2)A = \tfrac{2}{3}B_3,\ (K_1 - K_2)A_1 = 0,\ (K_1 - K_2)A_2 = \tfrac{2}{3}B_1,\\ (K_1 - K_2)A_3 = 0.\end{gathered} \tag{31,34}$$

La propriété en question consiste en ce que, *pour chaque point* X qui n'est pas situé sur la tangente $[A_1A_3]$ à la courbe (A_3) au point A_3, *la droite* $[K_1X, K_2X]$ *rencontre la tangente* $[B_1B_3]$ à la courbe (B_3) au point B_3 correspondant à A_3 *dans le point que est l'image du plan tangent à la courbe* (B_3) *contenant la droite* $[K_1X, K_2X]$ *dans le système nul associé au complexe linéaire osculateur à la courbe* (B_3) au point B_3. C'est ce que le lecteur peut vérifier sans peine, ainsi que la validité des remarques suivantes. *Les deux courbes gauches* (A_3) *et* (B_3) *étant données, si chacune d'elles appartient à un complexe linéaire fixe, la propriété énoncée est toujours vraie, de quelle manière qu'on choisisse la correspondance entre* (A_3) *et* (B_3). *Par contre, la propriété est toujours fausse si une et une seule des deux courbes* (A_3) *et* (B_3) *appartient à un complexe linéaire fixe. Enfin si aucune des deux courbes* (A_3) *et* (B_3) *n'appartient à un complexe linéaire fixe, il y a trois familles* (dont une seule est réelle pour des courbes réelles) ∞^1 *de correspondances entre* (A_3) *et* (B_3) *jouissant de la propriété indiquée*. La courbe (A_3) étant rapportée à un paramètre v et la seconde courbe (B_3) à un paramètre v', ces correspondances s'obtiennent en intégrant l'équation

$$\Theta_3(v)\, dv^3 = \Theta_3'(v')\, dv'^3,$$

où Θ_3 est invariant différentiel bien connu de E. J. WILCZYNSKI (v. son livre *Projective differential geometry of curves und ruled surfaces*, p. 240) relatif à la courbe (A_3) et Θ_3' est le même invariant relatif à (B_3).

32. Reste à examiner le système de Pfaff (26,1) + (32,1), où

$$\omega_{30} = \omega_{12} = \omega_{10} = 0, \tag{32,1}$$

dont les conditions d'intégrabilité sont

$$[\omega_1\tau_{13}] + [\omega_2\tau_{23}] = 0, \tag{32,2}$$

$$[\omega_2\tau_{20}] = 0. \tag{32,3}$$

$$[\omega_{31}\tau_{13}] = 0, \tag{32,4}$$

$$[\omega_1\tau_{20}] + [\omega_{31}\tau_{23}] = 0. \tag{32,5}$$

Nous sommes intéressés dans les solutions de (26,1) + (32,1) satisfaisant aux inégalités (26,2) et (26,3). Rappelons encore les relations (26,10), (30,2) et (30,3). Il résulte de (32,2) — (32,5) que l'on peut poser $\omega_{31} = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$. Par différentiation extérieure on en déduit que

$$\begin{aligned} \delta\alpha_1 &= (e_{33} - e_{00})\alpha_1, \\ \delta\alpha_2 &= e_{21}\alpha_1 + (e_{22} + e_{33} - e_{00} - e_{11})\alpha_2. \end{aligned} \tag{32,6}$$

D'après (26,2) et (30,3) on voit que l'on peut particulariser le repère de manière à avoir soit $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, c'est-à-dire $\omega_{31} = \omega_1$; soit $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, c'est-à-dire $\omega_{31} = \omega_2$. Dans le paragraphe présent, on examinera l'hypothèse

$$\omega_{31} = \omega_1; \tag{32,7}$$

l'hypothèse $\omega_{31} = \omega_2$ sera examinée au § 33. D'après (32,6), on doit ajouter à (26,10) et (30,2)

$$e_{33} - e_{00} = e_{21} = 0 \tag{32,8}$$

tandis que

$$e_{11} - e_{00},\ e_{22} - e_{00},\ e_{20},\ e_{13},\ e_{23} \text{ restend arbitraires.} \tag{32,9}$$

Si l'on avait $\tau_{13} = 0$, on aurait

$$KA = B,\ KA_1 = B_1,\ KA_2 = B_2.\ KA_3 = B_3,$$
$$\mathrm{d}K \,.\, A = 0,\ \mathrm{d}K \,.\, A_1 = 0,\ \mathrm{d}K \,.\, A_2 = \tau_{20}A + \tau_{23}A_3,\ \mathrm{d}K \,.\, A_3 = 0.$$

D'après (32,2) et (32,3) on aurait $[\omega_2\tau_{20}] = [\omega_2\tau_{23}] = 0$ de sorte que l'homographie K ne dépendrait que d'un seul paramètre t tel que $[\mathrm{d}t\omega_2] = 0$. Pour $\omega_2 = 0$ le point A décrirait le plan $[AA_1A_3]$ et l'on aurait $\mathrm{d}K \,.\, X = 0$ pour chaque point X de ce plan. On retomberait donc à un cas particulier de la solution discutée au § 24. Il en résulte que l'on doit supposer que

$$\tau_{13} \neq 0. \tag{32,10}$$

Les conditions d'intégrabilité du système de Pfaff (26,1) + (32,1) + + (32,7) sont évidemment

$$\tau_{20} + \tau_{23} = 0, \tag{32,11}$$

$$[\omega_2\tau_{20}] = [\omega_1\tau_{13}] = 0, \tag{32,12}$$

$$[\omega_1\, \omega_{00} - \omega_{33} + \omega_3] - [\omega_2\omega_{21}] = 0. \tag{32,13}$$

(32,12) permet de poser $\tau_{20} = \beta_1\omega_2$, $\tau_{13} = \beta_2\omega_1$. Différentiation extérieure donne $\delta\beta_1 = 2(e_{22} - e_{00})\beta_1$, $\delta\beta_2 = 2(e_{11} - e_{00})\beta_2$. D'après (26,3), (32,9) et (32,10) on peut particulariser le repère de manière à avoir $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ou

$$\tau_{20} = \omega_2,\ \tau_{23} = -\omega_2,\ \tau_{13} = \omega_1. \tag{32,14}$$

Aux relations (26,10), (30,2) et (32,8) on doit ajouter

$$e_{11} = e_{00} = e_{22} - e_{00} = 0, \tag{32,15}$$

tandis que

$$e_{20}, e_{13}, e_{23} \tag{32,16}$$

restent arbitraires.

Différentiation extérieure de (32,14) donne

$$[\omega_2\,\omega_{00} - \omega_{22}] = 0,$$
$$[\omega_2\,\omega_{22} - \omega_{33} + \omega_3] - [\omega_1\omega_{21}] = 0,$$
$$[\omega_1\,\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33}] - [\omega_2\omega_{21}] = 0.$$

Par suite, les conditions d'intégrabilité du système de Pfaff (26,1) + + (32,1) + (32,7) + (32,11) + (32,14) peuvent être écrites sous la forme

$$\left.\begin{aligned}\omega_{11} - \omega_{33} = a\omega_1,\ \omega_{22} - \omega_{00} = b\omega_2,\\ \omega_{33} - \omega_{00} = h\omega_1 + k\omega_2 + \omega_3,\ \omega_{21} = k\omega_1 + h\omega_2.\end{aligned}\right\} \tag{32,17}$$

Le système de Pfaff est donc en involution et sa solution générale dépend de quatre fonctions arbitraires d'une variable.

Or on prouve aisément que le cas $h \neq 0$ ne conduit à aucune solution nouvelle. En effet, posons

$$A' = A,\ A_1' = -A_2,\ A_2' = A_1,\ A_3' = A_3 - A,$$
$$B' = B,\ B_1' = -B_2,\ B_2' = B_1,\ B_3' = B_3 - B.$$

Alors on trouve

$$\begin{aligned}
dA' &= (\omega_{00} + \omega_3)A' - \omega_2A_1' + \omega_1A_2' + \omega_3A_3',\\
dA_1' &= -(\omega_{20} + \omega_{23})A' + \omega_{21}A_1' - (k\omega_1 + h\omega_2)A_2' - \omega_{23}A_3',\\
dA_2' &= \omega_{13}A' + \omega_{11}A_2' + \omega_{13}A_3',\\
dA_3' &= (h\omega_1 + k\omega_2)A' + \omega_2A_1' + (\omega_{33} - \omega_3)A_3';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dB' &= (\omega_{00} + \omega_3)B' - \omega_2B_1' + \omega_1B_2' + \omega_3B_3',\\
dB_1' &= -(\omega_{20} + \omega_{23})B' + \omega_{22}B_1' - (k\omega_1 + h\omega_2)B_2' - (\omega_{23} - \omega_2)B_3',\\
dB_2' &= (\omega_{13} + \omega_1)B' + \omega_{11}B_2' + (\omega_{13} + \omega_1)B_3'\\
dB_3' &= (h\omega_1 + k\omega_2)B' + \omega_2B_1' + (\omega_{33} - \omega_3)B_3'.
\end{aligned}$$

On voit bien que, aux notations près, nous avons ici pour $h \neq 0$ un cas particulier de la solution examinée au § 27. Il s'agit du cas particulier de congruences R dont une nappe focale dégénère en une droite.

Dans tous les cas, différentiation extérieure de la dernière (ou de l'avant-dernière) relation (23,17) donne $\delta h = 0$, $\delta k = -(e_{20} + e_{23})$. On peut donc particulariser le repère de manière que $k = 0$, ce qui exige d'ajouter à (32,15) la relation nouvelle

$$e_{20} + e_{13} = 0.$$

Si l'on a aussi $h = 0$, on a alors

$$\omega_{33} - \omega_{00} = \omega_3,\ \omega_{21} = 0. \tag{32,18}$$

La différentiation extérieure de (32,18) donne $[\omega_2 \omega_{20} + \omega_{23}] = 0$, $[\omega_1 \omega_{20} + \omega_{23}] = 0$ de sorte que l'on doit avoir

$$\omega_{20} + \omega_{23} = 0. \tag{32,19}$$

Différentiation extérieure des deux premières relations (32,17) donne $\delta a = 2e_{13}$, $\delta b = -2e_{20}$. Les e_{13} et e_{20} étant encore libres, on peut achever la particularisation du repère en posant $a = b = 0$ ou bien

$$\omega_{11} - \omega_{03} = 0, \ \omega_{22} - \omega_{00} = 0. \tag{32,20}$$

On vérifie aisément que $[\mathrm{d}\omega_1] = [\mathrm{d}\omega_2] = 0$ de sorte que

$$\omega_1 = \mathrm{d}u, \ \omega_2 = \mathrm{d}v. \tag{32,21}$$

Les équations fondamentales prennent la forme

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3, \\
\mathrm{d}A_1 &= (\omega_{00} + \omega_3)A_1 + \omega_{13}A_3, \\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{00}A_2 + \omega_{23}(A_3 - A), \\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_1 A_1 + (\omega_{00} + \omega_3)A_3; \\
\mathrm{d}B &= \omega_{00}B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3, \\
\mathrm{d}B_1 &= (\omega_{00} + \omega_3)B_1 + (\omega_{13} + \omega_1)B_3, \\
\mathrm{d}B_2 &= \omega_{00}B_2 + (\omega_{23} - \omega_2)(B_3 - B), \\
\mathrm{d}B_3 &= \omega_1 B_1 + (\omega_{00} + \omega_3)B_3.
\end{aligned}\right\} \tag{32,22}$$

On a donc

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{d}A_3 = \omega_1 A_1 + (\omega_{00} + \omega_3)A_3, \ \mathrm{d}B_3 = \omega B_1 + (\omega_{00} + \omega_3)B_3, \\
&\mathrm{d}A_1 = (\omega_{00} + \omega_3)A_1 + \omega_{13}A_3, \ \mathrm{d}B_1 = (\omega_{00} + \omega_3)B_1 + (\omega_{13} + \\
&\qquad\qquad + \omega_1)B_3,
\end{aligned}\right\} \tag{32,23}$$

ce qui montre que la position des deux points A_3 et B_3 ne dépend que du paramètre u seul; en variant u le point A_3 décrit une droite (A_3), le point B_3 décrit une droite (B_3), et on a une correspondance *non homographique* entre ces deux droites, cette correspondance étant d'ailleurs arbitraire.

De plus, on a

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}(A_3 - A) &= -\omega_2 A_2 + \omega_{00}(A_3 - A), \\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{00}A_2 + \omega_{23}(A_3 - A); \\
\mathrm{d}(B_3 - B) &= -\omega_2 B_2 + \omega_{00}(B_3 - B), \\
\mathrm{d}B_2 &= \omega_{00}B_2 + (\omega_{23} - \omega_2)(B_3 - B),
\end{aligned}\right\} \tag{32,24}$$

ce qui montre que la position des deux points $A_3 - A$ et $B_3 - B$ ne dépend que du paramètre v seul; en variant v le point $A_3 - A$ décrit une droite $(A_3 - A)$, le point $B_3 - B$ décrit une droite $(B_3 - B)$, et on a une correspondance *non homographique*, d'ailleurs arbitraire, entre ces deux droites.

De (32,23) et (32,24) on déduit sans peine [v. § 3, ainsi que (12,2)] que l'homographie K contient l'homographie osculatrice de la correspondance entre les deux droites (A_3) et (B_3) ainsi que celle de la correspondance entre les deux droites $(A_3 - A)$ et $(B_3 - B)$.

Les deux droites fixes $(A_3) = [A_1A_3]$ et $(A_3 - A) = [A_2, A_3 - A]$ sont les droites directrices d'une congruence linéaire non spéciale, décrite par la droite $[AA_3]$. Par cette congruence linéaire fixe passe un faisceau de complexes linéaires, à savoir

$$[A_3A_1] + \lambda[A_3 - A, A_2] \tag{32,25}$$

Pareillement, on a dans l'espace S_3' une congruence linéaire non spéciale contenu dans le faisceau de complexes linéaires

$$[B_3B_1] + \lambda[B_3 - B, B_2]. \tag{32,25}$$

Or des équations (32,22) on déduit que, pour chaque valeur fixe de λ, les deux complexes linéaires (32,25) et (32,26) sont fixes; et chaque homographie K porte évidemment chaque complexe (32,25) dans le complexe (32,26) correspondant à la même valeur de λ.

Les correspondances du type envisagé entre les espaces S_3 et S_3' s'obtiennent donc de la manière suivante. Choisissons deux droites gauches d_1, d_2 dans S_3 ainsi que deux droites gauches d_1', d_2' dans l'espace S_3'. Choisissons une correspondance φ_1 non homographique entre les deux droites d_1, d_1' et une correspondance φ_2 non homographique entre les deux droites d_2, d_2'. Choisissons enfin une homographie fixe L entre S_3 et S_3' portant d_1 dans d_1' et d_2 dans d_2'. Cela étant, la correspondance cherchée attache à un point quelconque A de l'espace S_3 (que nous supposons situé en dehors des deux droites d_1 et d_2) le point B de l'espace S_3 contruit de la manière suivante. Par le point A passe une droite rencontrant d_1 au point C_1, d_2 au point C_2. Soit ψ_1 l'homographie osculatrice à la correspondance φ_1, correspondant à la position C_1 du point mobile sur d_1; soint ψ_2 l'homographie osculatrice à la correspondance φ_2, correspondant à la position C_2 du point mobile sur d_2. Il existe une homographie K bien déterminée entre S_3 et S_3' contenant ψ_1 et ψ_2 telle qu'on ait $KE = LE$ pour chaque complexe linéaire E contenant la congruence linéaire non spéciale à droites directrices d_1 et d_2. Alors on a $B = KA$.

33. Le dernier cas à examiner est celui du système de Pfaff (26,1) + + (33,1), où

$$\omega_{30} = \omega_{12} = \omega_{10} = 0, \ \omega_{31} = \omega_2. \tag{33,1}$$

Nous avons posé $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ dans (32,6), de manière que nous devons ajouter à (26,10) et (30,2)

$$e_{00} + e_{11} - e_{22} - e_{33} = 0, \tag{33,2}$$

tandis que

$$e_{11} - e_{00}, \ e_{22} - e_{00}, \ e_{20}, \ e_{21}, \ e_{13}, \ e_{23} \tag{33,3}$$

restent arbitraires.

Nous cherchons les solutions satisfaisant aux inégalités (26,2) et (26,3).

On voit sans peine que les conditions d'intégrabilité du système (26,1) + (33,1) sont

$$\tau_{13} = \tau_{20}, \tag{33,4}$$

$$[\omega_2 \tau_{20}] = 0, \tag{33,5}$$

$$[\omega_1 \tau_{20}] + [\omega_2 \tau_{23}] = 0, \tag{33,6}$$

$$[\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}\ \omega_2] = 0. \tag{33,7}$$

D'après (33,7) on peut poser $\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} = a\omega_2$. Par différentiation extérieure on en déduit que $\delta a = (e_{22} - e_{00})a - 2e_{20} + 2e_{13}$. Par suite de (33,3), on peut particulariser le repère de manière à avoir $a = 0$ ou bien

$$\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} = 0. \tag{33,8}$$

On a alors le système de Pfaff (26,1) + (33,1) + (33,4) + (33,8) dont les conditions d'intégrabilité sont, comme on voit sans peine

$$\tau_{20} = \alpha\omega_2, \tag{33,9}$$

$$\tau_{23} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \tag{33,10}$$

$$\omega_{20} - \omega_{13} = \gamma\omega_2. \tag{33,11}$$

Notre système de Pfaff est donc en involution et sa solution générale dépend de trois fonctions arbitraires d'une variable. D'après (26,3), nous aupposons que $\alpha \neq 0$. On a $[\mathrm{d}\omega_2] = [\omega_{00} - \omega_{22}\ \omega_2]$ d'où $[\omega_2 \mathrm{d}\omega_2] = 0$; l'équation $\omega_2 = 0$ est donc complètement intégrable, c'est-à-dire équivalente à une équation de la forme $\mathrm{d}t = 0$.

Les équations fondamentales prennent la forme

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,\\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_{13}A_3,\\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_2 A_1 + \omega_{33}A_3;\\
\mathrm{d}B &= \omega_{00}B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3,\\
\mathrm{d}B_1 &= \omega_{11}B_1 + (\omega_{13} + \alpha\omega_2)B_3,\\
\mathrm{d}B_2 &= (\omega_{20} + \alpha\omega_2)B + \omega_{21}B_1 + \omega_{22}B_2 + (\omega_{23} + \alpha\omega_1 + \beta\omega_2)B_3,\\
\mathrm{d}B_3 &= \omega_2 B_1 + \omega_{33}B_3.
\end{aligned}\right\} \tag{33,12}$$

Il en résulte que

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{33}A_3 + \omega_2 A_1, & \mathrm{d}B_3 &= \omega_{33}B_3 + \omega_2 B_1,\\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{13}A_3 + \omega_{11}A_1; & \mathrm{d}B_1 &= (\omega_{13} + \alpha\omega_2)B_3 + \omega_{11}B_1;
\end{aligned}\right\} \tag{33,13}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}[AA_1A_3] &= -\omega_{22}[AA_1A_3] + \omega_2[A_1A_3A_2],\\
\mathrm{d}[A_1A_3A_2] &= \omega_{20}[AA_1A_3] - \omega_{00}[A_1A_3A_2];\\
\mathrm{d}[BB_1B_3] &= -\omega_{22}[BB_1B_3] + \omega_2[B_1B_3B_2],\\
\mathrm{d}[B_1B_3B_2] &= (\omega_{20} + \alpha\omega_2)[BB_1B_3] - \omega_{00}[B_1B_3B_2].
\end{aligned}\right\} \tag{33,14}$$

On voit que les deux droites $[A_1A_3] = \mathrm{d}$ et $[B_1B_3] = \mathrm{d}'$ restent fixes en position. Le point A_3 (B_3) décrit la droite d (d'); en posant

$$\Gamma = [AA_1A_3],\quad \Delta = [BB_1B_3],$$

le plan Γ (Δ) tourne autour de la droite d (d'). La position des deux points A_3, B_3 et celle des deux plans Γ, Δ ne dépendent que du paramètre t seul.

Des équations (33,14) il résulte d'après (12,2) que l'homographie osculatrice à la correspondance entre A_3 et B_3 est subordonnée à l'homographie K. Des équations (33,8), (33,13) et (33,14) on déduit, en se rappelant le résultat du § 12, que *l'élement différentiel projectif de la correspondance entre le point A_3 et le plan Γ a la même valeur $\omega_{20} - \omega_{13} = \gamma\omega_2$ que celui de la correspondance entre le point B_3 et le plan Δ*. En particulier, la correspondance entre le point B_3 et le plan Δ est homographique si, et seulement si, la correspondance entre le point A_3 et le plan Γ est homographique. Pour chaque valeur fixe de t, la droite $[AA_3]$ décrit un faisceau de centre A_3 dans le plan Γ et la droite $[BB_3]$ décrit un faisceau de centre B_3 dans le plan Δ. En variant t, le premier faisceau engendre une congruence L_1 et le second une congruence L_2. Pour $\gamma = 0$, les deux congruences L_1 et L_2 sont linéaires spéciales; pour $\gamma \neq 0$, aucune des deux congruences n'est linéaire. En tout cas, les deux nappes focales de L_1 (de L_2) dégénèrent dans la droite d (d').

A la correspondance envisagée entre S_3 et S_3' est subordonnée une correspondance entre les deux congruences L_1 et L_2 qui a la propriété qu'à chacun des faisceaux engendrant L_1 correspond un des faisceaux engendrant L_2. Choisissons une surface réglée R_1 de la congruence L_1; on voit sans peine qu'on peut particulariser les repères de manière que, le point A décrivant R_1, on ait $\omega_1 = 0$. Le point B correspondant décrit alors une surface réglée R_2 de la congruence L_2. A la correspondance donnée est subordonée une correspondance entre les deux surfaces réglées R_1 et R_2 qui est telle qu'aux génératrices rectilignes de R_1 correspondent les génératrices rectilignes de R_2; or on voit sans peine qu'aussi aux asymptotiques curvilignes de R_1 correspondent celles de R_2 (l'équation de ces asymptotiques est, d'après (33,12) et puisque $\omega_2 = 0$, $\omega_{00}\omega_1 + \overline{\omega_{21}} + \omega_3\omega_2 = 0$ pour R_1 et pour R_2).

Les considérations qui précèdent conduisent à la construction suivante des correspondance cherchées. On choisit une surface réglée R_1 à directrice rectiligne d dans l'espace S_3 et une surface réglée R_2 à directrice rectiligne d' dans l'espaces S_3'. Le choix de R_1 et R_2 n'est soumis qu'à la restriction suivante: si une des deux surfaces réglées R_1 et R_2 appartient à une congruence linéaire *spéciale* fixe, l'autre surface doit avoir aussi la même propriété (les directrices des deux congruences sont naturellement les deux droites d et d'). Nommons *cas spécial* celui où R_1 et R_2 appartiennent à des congruences linéaires spéciales fixes, le cas contraire étant le *cas général*. Introduisons une corre spondance ponctuelle φ entre les deux droites d et d'. Cette correspondance φ est arbitraire dans le cas spécial. Par contre, dans le cas général, la correspondance φ doit jouir de la propriété suivante. Exprimons les points de d et d' en fonctions d'un paramètre t de manière que φ associe l'un à l'autre les deux points correspondants a la même valeur de t; alors l'élément différentiel projectif, défini au § 12, de la correspondance entre le point X de la droite d et le plan tangent à R_1 au point X (plan qui contient la droite d) doit être égal à l'élément différentiel projectif de la correspondance entre le point X' de la droite d' et le plan tangent à R_2 au point X' (plan qui contient la droite d'); on suppose que les deux éléments différentiels projectifs se rapportent à la variable t. On voit sans peine que, dans le cas général, les deux surfaces réglées R_1 et R_2 étant choisies, les correspondances φ jouissant de la propriété indiquée existent toujours et forment deux familles continues simplement infinies; les deux familles peuvent être imaginaires conjuguées, mais alors elles deviennent réelles si, en ne changeant pas R_1, on transforme R_2 par dualité.

Choisissons encore un point fixe A_0 de la droite d de sorte que $B_0 = \varphi(A_0)$ est un point fixe de la droite d'. Soit $r_0(r_0')$ la génératrice de R_1 passant par le point A_0 (le point B_0); choisissons une correspondance homographique h_0 entre les droites r_0 et r_0' telle que $h_0(A_0) = B_0$. Alors il existe pour chaque point A_3 de la droite d une correspondance homographique h bien déterminée entre la génératrice r de R_1 passant par A_3 et la génératrice r' de R_2 passant par $B_3 = \varphi(A_3)$ telle que, si le point C_0 de r_0 et le point C de r appartiennent à la même courbe asymptotique de R_1, alors le point $h_0(C_0)$ de r_0' et le point $h(C)$ de r' appartiennent à la même courbe asymptotique de R_2.

Cela posé on définit la correspondance cherchée entre S_3 et S_3' de la manière suivante. Soit A un point quelconque de S_3. Il existe un point A_3 de d tel que A soit situé dans le plan tangent Γ à R_1 au point A_3. Soit Δ le plan tangent à R_2 au point $B_3 = \varphi(A_3)$. Alors $\Gamma(\Delta)$ contient la génératrice r (r') de R_1 (de R_2) passant par A_3 (par B_3); soit h la correspondance homographique entre r et r' qui vient d'être définie. Soit aussi k l'homographie osculatrice à la correspondance φ entre d et d', correspondante au couple A_3, B_3. Il existe une homographie K bien déterminée entre les deux plans Γ et Δ telle que h et k fassent partie de K. L'image du point A dans la correspondance cherchée est alors le point $B = KA$.

Projektivní diferenciální geometrie korespondencí mezi dvěma prostory. III.

(Obsah předešlého článku.)

V předcházejícím pojednání byly stanoveny dva typy korespondencí mezi dvěma prostory S_n, S_n' majících totálně K-linearisující přímky. Pouze pro $n = 3$ existují ještě další typy korespondencí. Jsou to celkem čtyři typy. U každého z těchto typů tvoří (i v prostoru S_3 i v prostoru S_3') K-linearisující přímky přímkovou kongruenci L. V tomto shrnutí popíši pouze tvar těchto kongruencí L. U prvního typu je L libovolná kongruence R nebo R_0, tedy kongruence, jejíž každá fokální plocha je projektivně deformovatelná nerozvinutelná plocha a obráceně každá projektivní deformace nerozvinutelné plochy dává vznik dvěma (v případě R) korespondencím tohoto typu nebo jedné (v případě R_0). U druhého typu je L libovolná lineární kongruence se dvěma různými řídícími přímkami. U třetího typu se kongruence L skládá z ∞^1 svazků přímek; středy těch svazků vyplní libovolnou prostorovou křivku a rovina svazku je vždy příslušnou oskulační rovinou této křivky. U čtvrtého typu je L libovolná taková kongruence, jejíž obě fokální plochy degenerují v jednu a touž přímku; speciálně může L býti lineární kongruence se splývajícími řídícími přímkami.