František Kadeřávek

O skupinách ploch, které mají společné charakteristické vlastnosti

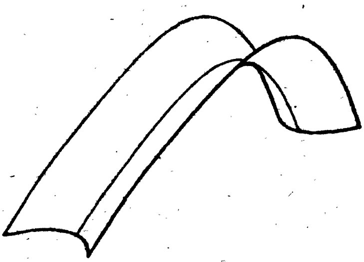
Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 3, D277--D282

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123873

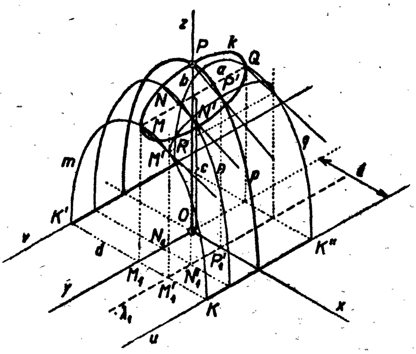
O SKUPINÁCH PLOCH, KTERÉ MAJÍ SPOLEČNÉ CHARAKTERISTICKÉ VLASTNOSTI.

Dr FRANTIŠEK KADEŘÁVEK, Praha.

V technické praxi při stavbách velikých prostorných síní používá se jako stavebního prvku části hyperbolického paraboloidu, omezeného dvěma k hlavní rovině souměrnými parabolickými řezy a hyperbolickým řezem, kolmým k ose (obr. I). Tato hyperbola je křivočarou patkou použité skořepinové klenby, což je pro konstrukci málo výhodné. Proto projevila se snaha, nahraditi uvažovaný hyperbolický paraboloid plochou, která by podržela v jedné rovině hlavní parabolu, v rovinách rovnoběžných s druhou rovinou hlavní rovněž vesměs paraboly, které by se připínaly nikoliv na hyperbolickou patku, ale na dvě rovnoběžné přímky. Takto stanovená plocha je jednou ze skupiny ploch, které mají řadu společných vlastností a které budeme v dalším vyšetřovati.



Obr. I.



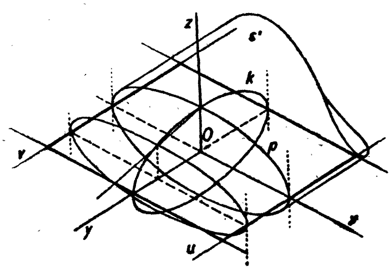
Obr. 1.

Vytkněme (obr. 1) v rovině $yz \equiv \mu$ kuželosečku k, která má jednu svoji osu délky $2b$ v ose z a druhou osu délky $2a$ ve vzdálenosti c od osy y; dále si zvolme v $\pi \equiv xy$ dvě přímky u, v rovnoběžné s osou y a vzdálené od y o délku $+d$ resp. $-d$. Tím je určena řada kuželoseček, které jsou položeny v rovinách rovnoběžných s v, mají dva své vrcholy v přímkách u, v a další vrchol na kuželosečce k. Všechny tyto kuželosečky vyplňují určitou plochu ε, na níž vždy dvě kuželosečky, na př. m a n mající vrcholy v M a N jsou afinní a položené v rovnoběžných rovinách, proto jsou položeny na konoidu, který má rovinu $yz \equiv \mu$ za řídící rovinu a jehož řídící přímka, rovnoběžná s osou x, je položena v π. To platí i pro dvě soumezné kuželosečky plochy. Je z toho patrno, že plochy ε se podél libovolné kuželosečky položené v rovině rovnoběžné s v dotýká plocha konoidu o řídící rovině μ a řídící přímce položené v π a rovnoběžné s osou x. Pro kuželosečku m přešel tečný konoid v rovinu; m je kraterovou křivkou plochy. Pro kuželosečku p přešel tečný konoid v plochu válcovou o přímkách rovnoběžných s osou y. Protože v afinních kuželosečkách $m, n, p, \dots$ je poměr $\overline{MM_1} : \overline{M'M_1'} = \overline{NN_1} : \overline{N'N_1'} = \dots$ stálý, protínají přímky $MM', NN', PP', \dots$ určitou s osou y rovnoběžnou přímku, položenou v π. Z toho je zřejmo, že i kterékoliv dvě křivky plochy ε v rovinách rovnoběžných s μ spočívají na konoidu, jsou proto afinní ke kuželosečce k, v daném případě jsou to tedy kuželosečky. Podél každé z těchto křivek, mezi něž patří kuželosečka k a obě úsečky v přímkách u a v, se plochy ε rovněž dotýká plocha konoidu o řídící rovině ν a řídící přímce rovnoběžné s y a položené v π. Tento konoid přechází jen pro křivku k v plochu válcovou o povrchových přímkách rovnoběžných s osou x. Pro přímky u, v přechází v roviny rovnoběžné s μ. Oba pláště plochy přicházející s jedné i druhé strany kuželosečky k k úsečce $\overline{KK''}$ připomínají břit sekery či spíše klínu a proto můžeme plochy této skupiny označiti názvem *plochy klínové* (cuneoidy — od cuneus = klín) nebo plochy sfenoidické (od ὁ σφήν — τό σφηνοειδής = řecky klín, klínový). Obě části plochy, vyplněné body eliptického a hyperbolického zakřivení jsou od sebe odděleny kraterovými kuželosečkami m a q. Je-li $c - b = 0$, přejde kuželosečka stanovená bodem R kuželosečky k v osu x a plocha ε se podél x dotkne roviny π. Protne-li k osu y v reálných bodech, bude ε obsahovati další dvě dvojné přímky v π, rovnoběžné s x, podél nichž se dotknou konoidy o povrchových přímkách rovnoběžných s μ. Bude-li konečně $c = 0$, přejde ε do plochy η, zachovávající všechny dosavad uvedené vlastnosti, které jsou rozšířením vlastností ploch posuvných o rovinných křivkách, tvořící a řídicí, a kde místo tečných konoidů byly pouze tečné plochy válcové. Plocha ε a stejně i η mají v rovinách π, ν, μ roviny kolmé souměrnosti, v osách x, y, z své osy kolmé souměrnosti a jsou tedy středově souměrné podle O. (Afinní transformací se uvedené vlastnosti nemění, pouze kolmá souměrnost přechází v souměrnost šikmou.)

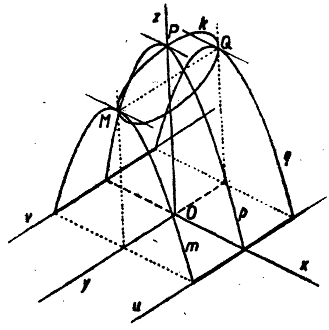
Zvolíme-li křivku k pro plochu η kruhovou, je rovnice plochy $\eta \equiv x^2y^2 + r^4 = r^2(x^2 + y^2 + z^2)$, kdežto plocha ${}^1\eta$, která je dána kuželosečkou k tak, že tato je rovnoosou hyperbolou o hlavní ose kolmé k π, je určena rovnicí $x^2y^2 - r^4 = r^2(y^2 - x^2 - z^2) \equiv {}^1\eta$. Plocha η má kromě dvojných přímek u a v ještě další dvě, které uvedené doplňují na čtverec o středu O. Plochu η nebo k ní podle roviny ν kolmo afinní můžeme použíti jako plochy klenební nad čtvercem, resp. obdélníkem. Klenba přechází tečně v přímých patkách do podpůrného zdiva, kdežto plocha kruho-kruhová nebo kruho-eliptická přecházejí tečně podél lunet kruhových resp. eliptických do podpěr.

Plocha η je stupně čtvrtého; proložíme-li (obr. 2) kuželosečkou p plochu válcovou ε' o ose v přímce y, nebo plochu ε'' k ε' kolmo afinní pro rovinu π, je součet ploch $\eta + \varepsilon'$ resp. $\eta + \varepsilon''$ některá z ploch uvažovaných v prvém obrazci a označených tam ε. Z toho je zřejmo, že ε jako součet ploch druhého a čtvrtého stupně je stupně osmého.

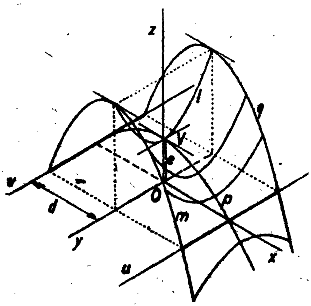
Veďme místo uvažovaných elips z obrazce prvního paraboly (obr. 3), které protínají přímky $u \parallel y \parallel v$ (u, v souměrné k ose y). Paraboly jsou v rovinách rovnoběžných s ν a mají své vrcholy na kuželosečce k a osy rovnoběžné se z! Vznikne tu plocha τ téhož typu a vlastností jako v prvém případě, ježto paraboly m, p, q, ..., jsou afinní.



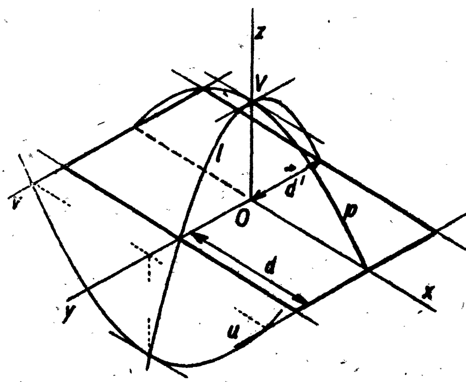
Obr. 2.



Obr. 3.



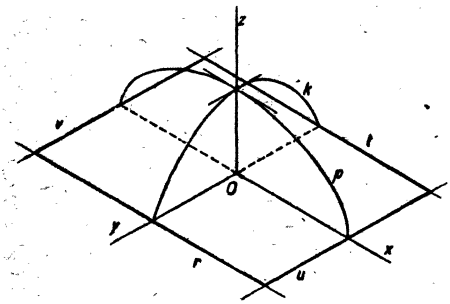
Obr. 4.



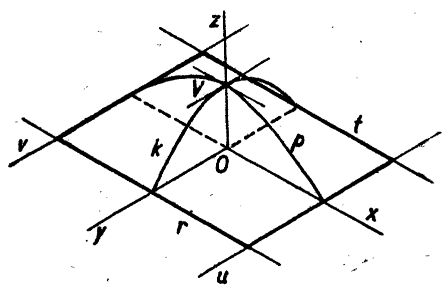
Obr. 5.

Zaměňme středovou kuželosečku k parabolou l! (obr. 4). Vzdálenost $\overline{VO}$ označme e, odlehlost rovnoběžek $u \dashv y = y \dashv v = d$! Vznikne tu plocha čtvrtého stupně τ, která má rovnici $\tau \equiv (y^2 + 2pe)(x^2 - d^2) + 2pd^2z = 0$, kde p je parametr paraboly l. Tečná rovina bodu V protíná plochu v křivce t určené rovnicemi $x^2y^2 + 2pex^2 - d^2y^2 = 0$, a $z = e$; je to křivka nazývaná uhlíkovou (Kohlenspitzenkurve) pro podobu s konci uhlíků v obloukové lampě. Má ve vrcholu V dvojný bod s dvěma inflexními tečnami. Plocha τ má v rovinách rovnoběžných s μ opět paraboly o vrcholech v p a o osách rovnoběžných se z. Podél všech parabol se jí dotýkají konoidy s řídícími rovinami buď v ν nebo μ. Úběžné přímky těchto rovin ν a μ jsou dvojné přímky uvažované plochy. Touto plochou, na kterou mne upozornil prof. Dr Bedřich Hacar, jsou nyní ve skořepinových konstrukcích železobetonových nahrazovány dříve používané paraboloidy buď z části nebo zcela, jak uvedeno v úvodu této práce.

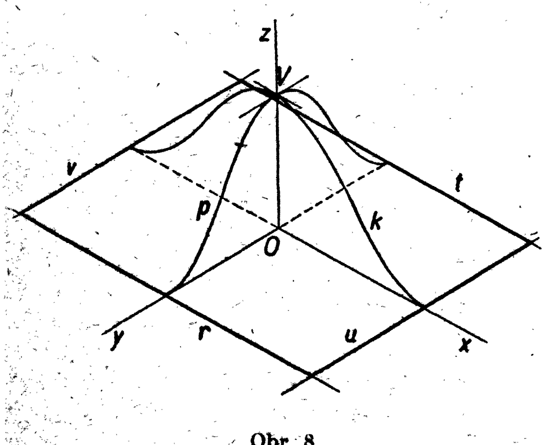
Použijeme-li pro plochu τ paraboly opačného parametru (obr. 5), získáme plochu, která opět mimo dvojné přímky u a v má v π další



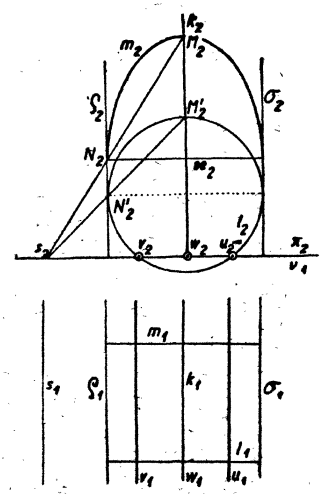
Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.

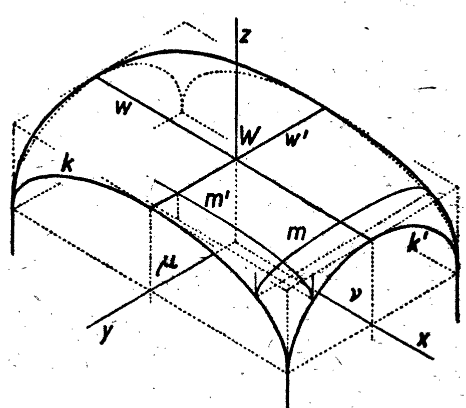


Obr. 9.

dvě dvojné přímky rovnoběžné s osou x. Zvolíme-li $d = p$ a $d' = d$, má plocha τ rovnici $\tau \equiv (x^2 - p^2)(y^2 - p^2) + 2p^3z = 0$. Této plochy i ploch k ní podle ν nebo μ kolmo afinních lze opět použíti jako klenby o vodorovných patkách nad čtvercovým nebo obdélníkovým půdorysem. Plocha vchází do patek nikoliv tečně, ale v úhlu. Je zřejmé, že plocha nekončí čtyřmi přímkami v rovině $xy \equiv \pi$, ale rozvíjí se za tento obrazec dále, což v obrazci není vyrýsováno a jde až k úběžným přímkám druhé a třetí průmětny, které jsou jejími dvojnými přímkami.

Pro plochy, které by řešily danou úlohu, totiž provedení klenby nad čtvercovým nebo obdélníkovým půdorysem a přímočarých patkách, můžeme použíti různé křivky jako řídicí a tvořicí, které označme k a p. Tak bychom mohli za k použíti katenoidu a za p obecnou cykloidu (obr. 6). Podél přímek u, v by se plocha klenby dotkla podpůrného zdiva, podél přímek r a t by je protínala v úhlu. Zvolíme-li křivky k a p jako shodné sinusoidy, které mají na u a v resp. r a t své body obratu a v bodě V společný vrchol, dostaneme plochu τ totožnou s translační plochou vlnovko-vlnovkovitou (obr. 7), která má podél křivek rovnoběžných s rovinami ν a μ tečné konoidy s řídicími přímkami v π, kdežto podél křivek položených v rovinách rovnoběžných s osou z a svírajících s ν a μ úhly 45° dotýkají se jí dotykové plochy válcové. Shodné sinusoidy k a p o společném vrcholu V, které se dotýkají průmětny π, vedou k zajímavé ploše, která sestává z nekonečně mnoha shodných dílů položených nad π (obr. 8), oddělených od sebe kraterovou křivkou, tvořenou čtvercovou sítí určenou přímkami u, v; r, t ... v π. Rovnice této plochy má tvar $2z = (\cos x + 1)(\cos y + 1)$. Je tu zajímavé rozložení oblasti bodů eliptické a hyperbolické křivosti.

Afinní křivky v rovnoběžných rovinách můžeme zvoliti také tak, že zvolíme dvě tečné roviny σ, ϱ těchto křivek (obr. 9), rovnoběžné s rovinou $\varkappa$ křivky řídicí k a od ní stejně vzdálené a obě přímky u, v rovněž rovnoběžné s $\varkappa$ a ve stejných odlehlostech od ní. Obě tyto přímky u, v mohou přejíti do dvojiny imaginárních sdružených přímek — pak pomocná kružnice l neprotíná π — nebo mohou splynouti v jedinou přímku w — pak l se dotýká π a v přímce w mají pak křivky tvořicí jeden ze svých vrcholů. Tento případ je pozoruhodný a vede k ploše osmého stupně, kterou lze s výhodou použíti jako plochu klenby, připomínající křížovou klenbu o čtyřech lunetách, podél nichž se plocha klenby dotýká stěn podpůrného zdiva (obr. 10). Plocha je vytvářena elipsami m, které jsou položeny v rovinách rovnoběžných s μ, mající na w jeden svůj vrchol, další vrchol na elipse k, která omezuje lunetu a osy elips m jsou rovnoběžné s osou z. Plocha nese na svém povrchu další elipsy v rovinách rovnoběžných s ν a mající svůj další vrchol na elipse



Obr. 10.

k' (kterou je vymezena další luneta), jeden vrchol je na vrcholové přímce w' a osa je opět rovnoběžná s osou z. Podél elips obou soustav dotýkají se plochy konoidy o přímkách řídicích položených v rovině $(w\,w')$.

*

Sur un groupe des surfaces, ayant les propriétés caractéristiques communes. On traite les surfaces formées par les courbes affines, situées dans les plans parallèles et secants une courbe du deuxième ordre et deux droites parallèles entre eux et normales à une axe de la courbe donnée. Les surfaces portent sur sa superficie deux systèmes des courbes affines entre eux, lelong desquelles on peut construire les conoïdes, qui sont tangeantes à la surface traitée. Une partie de cette surfaces est formée comme un coin, c'est pour cella, qu'on a donné à cettes surfaces le nom: les cuneoïdes ou les surfaces sphénoïdales (ὁ σφήν = le coin). Certaines de cettes surfaces ont trouvées l'application dans les travaux du beton armé.

JEDNA CREMONOWA INVOLUCE 14-ho STUPNĚ A JEJÍ DEGENERACE.

J. BÍLEK, Praha.

I.

Nechť body $A_1, A_2, \ldots, A_9$ tvoří basi svazku kubik S_3^1. Body A_1, A_2 jako dvojnásobnými a body $A_3, A_4, \ldots, A_8$ jako jednoduchými je určena síť eliptických kvartik S_4^2. S_4^2 vytíná na obecné kubice lin. soustavu g_2^1, neboť na obecné kubice nemůže existovat lin. soustava g_2^2. Vidíme tedy, že síť S_4^2 tvoří složenou lin. soustavu v tom smyslu, že všechny kvartiky jdoucí bodem P, jdou nutně ještě dalším bodem P'. Touto složeností je v rovině vytvořena jednoznačná algebraická involutorní příbuznost s konečným počtem výjimek. Je to tedy Cremonova transformace.

Tuto involuci můžeme dostat také transformací známé Geiserovy involuce J_8 užitím kvadratické transformace T_2. Nechť v rovině S' je dána Geiserova involuce J_8 o hlavních bodech $A_1', \ldots, A_7'$ a nechť dále body A_8', A_9' tvoří homologickou dvojici v J_8. Mezi rovinami S a S' volme kvadratickou transformaci T_2 o hlavních bodech O_1, O_2, O_3 a $O_1' \equiv A_1'$, $O_2' \equiv A_2'$, $O_3' \equiv A_8'$. Transformace $T_2^{-1} J_8 T_2$ je involucí v rovině S. Stupeň této involuce je 14, neboť přímce p v S, která neprochází žádným bodem O_i, odpovídá

$$p \underset{T_2}{\sim} k_2(A_1'\, A_2', A_8') \underset{J_8}{\sim} k_{10}(A_1^{3'},\ A_2^{3'},\ A_3^{4'}, \ldots, A_7^{4'}\, A_9') \underset{T_2^{-1}}{\sim}$$
$$k_{14}(A_1^7, A_2^7, A_3^4, \ldots, A_7^4, A_8^4, A_9).$$

Bodu A_1 odpovídá

$$O_1 \equiv A_1 \underset{T_2}{\sim} A_2'\, A_8' \underset{J_8}{\sim} k_5(A_1^{2'}, A_2'\, A_3^{2'}, \ldots, A_7^{2'}\, A_9') \underset{T_2^{-1}}{\sim}$$
$$k_7(A_1^4, A_2^3\, A_3^2, \ldots, A_7^2, A_8^2\, A_9).$$